

700 Thermodynamik

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der physikalischen Grösse Temperatur und den mit dieser Grösse zusammenhängenden Phänomenen. Gemäss dem nullten Hauptsatz der Thermodynamik kann jedem makroskopischen System eine Temperatur zugeordnet werden. Für ein grundlegendes Verständnis muss auf eine mikroskopische Betrachtungsweise zurück gegriffen werden. Mit einem Teilchenmodell lassen sich Grössen wie Temperatur und Entropie gut fassen. Die Temperatur lässt sich mikroskopisch mit mechanischen Grössen in Verbindung bringen. Die physikalischen Anwendungen in diesem Kapitel bewegen sich jedoch vor allem auf der makroskopischen Ebene.

Inhalt

Die Lernziele sind:

Lernziele

1. Temperatur und Temperatureffekte physikalische beschreiben können
2. Prinzipien der Temperaturmessung kennen
3. Definitionen der wichtigsten thermodynamischen Grössen anwenden können
4. Energieumwandlungsprozesse thermisch in eigenen Worten beschreiben können



710 Temperatur

711 thermische Ausdehnung von Gasen

Theorie

Im Rahmen einer Modellvorstellung für ein ideales Gas können die Teilchen (Atome bzw. Moleküle) als harte Kugeln betrachtet werden. Die Stöße zwischen den Atomen sind in diesem Modell vollkommen elastisch. Werden nun eine Anzahl N Teilchen in einem Volumen V bei einer bestimmten Temperatur T betrachtet, so bewegen sich diese mit einer Geschwindigkeit $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ durch das Volumen. Ein Teil dieser Teilchen stösst gegen die das Volumen begrenzende Wände. Betrachten wird eine Wand, deren begrenzende Fläche senkrecht zur x -Richtung steht. Der Druck p auf diese Wand ist durch die x -Komponente der Kraft \vec{F} gegeben, welche die gegen die Wand stossenden Teilchen auf diese ausüben. Es gilt für das Flächenelement dA demnach:

*Mikro-
skopisches
Modell*

Druck

$$p = \frac{dF_x}{dA} \quad (\text{Eq.1})$$

Wenn jedes Teilchen die genau gleiche Masse m hat, so lässt sich die Kraft in x -Richtung durch die Impulsänderung des Teilchens in x -Richtung ausdrücken:

$$F_x = \frac{d(2mv_x)}{dt} = 2m \frac{dv_x}{dt} \quad (\text{Eq.2})$$

Der Druck könnte nun berechnet werden, wenn die Geschwindigkeitsverteilung bekannt ist. Dafür müssten Überlegungen zur Geschwindigkeitsverteilung angestellt werden¹, was hier zu weit führen würde. Im Folgenden sollen aber ein paar interessante Zusammenhänge aufgezeigt werden.

*Geschwindig-
keitsverteilung*

Die Geschwindigkeitsverteilung im idealen Gas wird durch die sogenannte MAXWELL-BOLTZMANN-Verteilung beschrieben. Dabei kann das ideale Gas im Volumen als isotrop betrachtet werden – es gibt also keine ausgezeichnete Richtung. Wenn sich nun N Teilchen in einem Volumen V bei der Temperatur T befinden, so kann die Anzahl Teilchen dN , welche die Geschwindigkeit $v + dv$ haben (sich also in der Geschwindigkeitsverteilung

Ideales Gas

¹ Es müsste der Druckbeitrag dp , welcher durch die Teilchen im Geschwindigkeitsintervall dv verursacht wird, berechnet werden.

im Intervall $v + dv$ befinden), berechnet werden mit $dN = N \cdot f(v) \cdot dv$. Dabei ist $f(v)$ eine normierte Verteilungs-funktion, für die gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cdot dv = 1$$

Der Erwartungswert des Quadrates der Geschwindigkeit lässt sich berechnen durch:

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 \cdot f(v) \cdot dv$$

Im Fall der Maxwell-Boltzmann- Verteilung ist $f(v)$ gegeben durch:

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad (\text{Eq.3})$$

Maxwell-Boltzmann-Verteilung

In Fig.1 sind die Verteilungen bei verschiedenen Temperaturen T dargestellt.

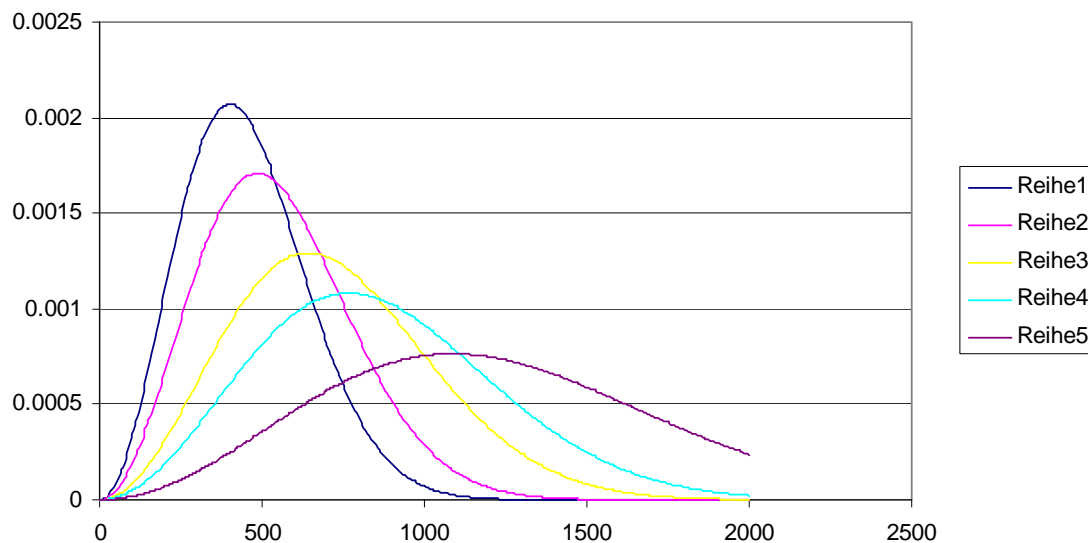


Fig.1. Maxwell-Boltzmann- Verteilung für verschiedene Temperaturen: Reihe 1 $T = 273$ K; Reihe 2 $T = 400$ K; Reihe 3 $T = 700$ K, Reihe 4 $T = 1000$ K; Reihe 5 $T = 2000$ K

Ausgehend von Eq.3 kann nun der Erwartungswert für die Maxwell-Boltzmann- Verteilung berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\langle v^2 \rangle &= \int_0^{\infty} v^2 \cdot f(v) \cdot dv = \int_0^{\infty} v^2 \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot dv \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \int_0^{\infty} v^4 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left[\frac{3\sqrt{\pi}}{8} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{\frac{5}{2}} \right] \\
&= \frac{3}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{2kT}{m} \right)^{\frac{5}{2}} = \frac{3kT}{m}
\end{aligned}$$

Für den Erwartungswert der kinetischen Energie ergibt sich somit:

$$\left\langle \frac{1}{2} mv^2 \right\rangle = \frac{3}{2} kT \quad (\text{Eq.3})$$

Dabei ist $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ die Boltzmann-Konstante. Diese ist quasi eine Umrechnungskonstante für die mittlere Energie eines Teilchens. Es ist zu beachten, dass die Temperatur (in Kelvin K) als absolute Grösse in die Beziehung eingeht. Aus Eq.3 lässt sich herauslesen, dass eine Temperaturerhöhung zu einer Erhöhung des Erwartungswertes für die Geschwindigkeit und somit zu einem Druckanstieg führt. Zudem kann festgehalten werden, dass der Druck mit der Anzahl Teilchen N im Volumen V steigt. Sowohl theoretisch als auch experimentell kann folgende Beziehung gefunden werden:

$$p = \frac{N}{V} kT \quad (\text{Eq.4})$$

In der Praxis (e.g. Chemie) ist es von Vorteil, nicht mit der Anzahl Teilchen N , sondern mit der Anzahl Mol n zu rechnen. Anstelle der Boltzmann-Konstante tritt die universelle Gaskonstante $R = N_A \cdot k$ (mit $N_A = \text{Avogadrozahl}$). Diese beträgt $6.022 \cdot 10^{23} (\text{mol}^{-1}) \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} (\text{JK}^{-1}) = 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Mit der universellen Gaskonstante R lässt sich das Gasgesetz für ideale Gase wie folgt schreiben:

$$pV = nRT \quad (\text{Eq.5})$$

Für nicht-ideale Gase müssen die intermolekularen Kräfte noch berücksichtigt werden. Näherungsweise kann dies mit der Van der Waals-Gleichung erfolgen.

Boltzmann-Konstante

Temperatur

universelle Gaskonstante

Van der Waals - Gleichung

Aufgaben

A1. Leiten Sie den mittleren Impuls eines Teilchens im idealen Gas als Funktion der Temperatur her.

A2. Welche mittlere Geschwindigkeit hat ein Stickstoffmolekül bei einer Temperatur von 0°C und bei 1000°C ?

A3. Zeigen Sie, dass das Produkt pV die Einheit Joule hat.

A4. Welches Volumen hat ein Mol eines idealen Gases bei Raumtemperatur (20°C) und 1013 hPa Druck?

A5. In einer Druckflasche mit einem Volumen von 10 Liter habe es 50 g reinen Sauerstoff.

- a) Welcher Druck hat die Flasche bei 20°C ?
- b) Welcher Druck hat die Flasche bei 20°C , wenn anstelle von reinem Sauerstoff 50 g Luft genommen würde?

A6. In einer geschlossenen Flasche mit 20 Liter Inhalt herrsche bei 15°C ein Druck von 2000 hPa.

- a) Welche Menge CO_2 müssten in der Flasche sein, um diesen Druck zu erzeugen?
- b) Um welchen Faktor würde sich der Druck ändern, wenn die Flasche mit Inhalt auf -30°C abgekühlt wird?

Lösungen

L1.

$$E_{kin} = \frac{(mv)^2}{2m} \rightarrow (mv) = \sqrt{2mE_{kin}} = \sqrt{3mkT}$$

L2.

$$\left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle = \frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle \Rightarrow v \approx \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \underline{491.64m/s}$$

bei 0°C und $\langle v \rangle = \underline{1061.64m/s}$ bei 1000°C

L3.

$$Pa \cdot m^3 = \frac{N}{m^2} \cdot m^3 = Nm = J$$

L4.

$$V = \frac{nRT}{p} = \underline{0.024m^3} = \underline{24Liter}$$

L5.

$$(a) p = \frac{nRT}{V} = \underline{380442Pa} = \underline{3804.42hPa}$$

$$(b) p = \frac{nRT}{V} = \underline{422714Pa} = \underline{4227.14hPa}$$

L6.

$$(a) n = \frac{pV}{RT} = \underline{1.67mol} \text{ bzw. } m = M_{CO_2} \cdot n = M_{CO_2} \cdot \frac{pV}{RT} = \underline{73.5g}$$

$$(b) \Delta p = \frac{nR\Delta T}{V} = \underline{31250Pa} = \underline{312.5hPa};$$

$$\text{Faktor} = \frac{2000hPa}{(2000 - 312)hPa} = \underline{1.18}$$

712 thermische Ausdehnung von Flüssigkeiten und Festkörpern

Theorie

Die meisten festen Körper und auch Flüssigkeiten dehnen sich aus, wenn sie sich erwärmen. Wenn die Temperatur in Zusammenhang mit der Bewegung der Atome gebracht wird, ergibt sich eine Erklärung: Je mehr sich die einzelnen Atome bewegen, desto mehr Platz benötigen Sie. Dabei nehmen wir an, dass sich die Atome in beliebige Richtungen bewegen, die Bewegungsrichtungen also statistisch verteilt sind.

*Temperatur
und
Ausdehnung*

Auf makroskopischer Ebene lässt sich diese Ausdehnung messen. Die Längenänderung Δl eines Stabes mit der Länge l bei Erwärmung um die Temperaturdifferenz ΔT ist gegeben durch:

*thermische
Ausdehnung
eines Stabes*

$$\Delta l \approx \alpha l \cdot \Delta T \quad (\text{Eq.6})$$

Die Längenausdehnungskoeffizienten liegen im Bereich von $31,3 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ für Blei und 10^{-7} K^{-1} für Glaskeramik. Für die Volumenausdehnung von festen Stoffen und Flüssigkeiten kann ein ganz ähnliches Gesetz gefunden werden:

*Volumen-
ausdehnung*

$$\Delta V \approx \gamma V \cdot \Delta T \quad (\text{Eq.7})$$

Für Festkörper gilt näherungsweise $\gamma \approx 3\alpha$.

Aufgaben

A1. Mittels der Ausdehnung eines Stabes soll die Temperatur gemessen werden. Dabei soll eine Längenänderung von 1 mm genau einer Temperaturdifferenz von 1°C entsprechen.

Welches Material ist zu verwenden, damit der Stab möglichst kurz wird und wie lang wäre dieser Stab?

A2. Ein Thermometer bestehe aus einer Hohlkugel mit einem Innenradius R von 1 cm und einem daran befestigten Steigrohr (Innenradius $r = 1$ mm) gemäss Fig.1. Darin befinde sich Quecksilber.

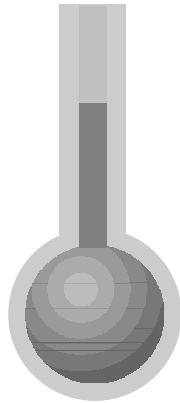


Fig.1. Hohlkugel mit Steigrohr

- a) Welche Höhendifferenz des Quecksilbers wird bei einem Temperaturanstieg um 1°C im Steigrohr erzielt?
- b) Ist $h = h(T)$ eine lineare Funktion? Welchen Einfluss hat das im Steigrohr befindliche Volumen?

A3. Eine Hochspannungsleitung bestehe aus Kupferdrähten mit einer Querschnittsfläche von 0.5 cm^2 . Der Abstand zwischen zwei Masten betrage 50 m. Die Länge des Drahtes betrage bei 20°C zwischen den zwei Masten 60 m, da die Leitung durchhängt.

Wie ändert sich die Zugspannung, welche auf den Draht wirkt, wenn die Umgebungstemperatur auf -5°C fällt?

Hinweis: Für die Lösung soll hier nur von einem ganz einfachen Modell ausgegangen werden, bei welchem die Gewichtskraft in der Mitte der beiden Masten angreift. Der Draht soll von diesem Punkt aus geradlinig zu den Masten verlaufen.

Lösungen

L1. Mit Blei ergibt sich:

$$l = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\Delta l}{\Delta T} = \frac{10^{-3} m K^{-1}}{31.3 \cdot 10^{-6} K^{-1}} = \underline{31.95 m}$$

L2. Wenn das Anfangsvolumen im Steigrohr vernachlässigt wird, resultiert durch die Volumenausdehnung in der Kugel eine Änderung der Steighöhe $h = h(T)$:

$$\Delta V_{Rohr} = \Delta h \cdot \pi r^2 = \Delta V_{Kugel} = \gamma V \cdot \Delta T = \gamma \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot \Delta T$$

$$\Delta h = \gamma \cdot \frac{4R^3}{3r^2} \cdot \Delta T = \frac{4 \cdot 1.82 \cdot 10^{-4} K^{-1}}{3} \cdot \frac{10^{-6} m^3}{10^{-6} m^2} = \underline{2.43 \cdot 10^{-4} m}$$

Die von der Temperatur abhängige Höhe $h(T)$ ergibt sich durch Grenzwertbildung und Integration:

$$\int dh = \frac{4R^3 \gamma}{3r^2} \int dT \rightarrow h(T) = \frac{4R^3 \gamma}{3r^2} \cdot T$$

Dabei müsste für den Nullpunkt $h(T = 0K) = h_0 = 0$ sein. Da Quecksilber bei diesen Temperatur fest ist, macht dieser Bezugspunkt keinen Sinn. Für die Kalibrierung muss also ein anderer Bezugspunkt gesucht werden. Zudem gilt diese Beziehung nur für $V_{Rohr} \ll V_{Kugel}$. Sonst muss auch noch die Volumenausdehnung des im Steigrohr befindlichen Quecksilbers mitberücksichtigt werden. Wird das Volumen im Steigrohr nicht berücksichtigt, dann ist $h(T)$ eine lineare Funktion von T , da quasi immer für jeden Temperaturschritt das gleiche Ausgangsvolumen in der Kugel genommen wird.

L3. Sei l die halbe Drahtlänge zwischen den Masten und d die halbe Distanz, sowie β der Winkel zwischen Draht und horizontaler Richtung. Dann gilt:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F_G}{A \cdot \sin \beta} = \frac{\rho \cdot A \cdot l \cdot g}{A \cdot \sin\left(\arccos\left(\frac{d}{l}\right)\right)} = \frac{\rho \cdot l \cdot g}{\sin\left(\arccos\left(\frac{d}{l}\right)\right)}$$

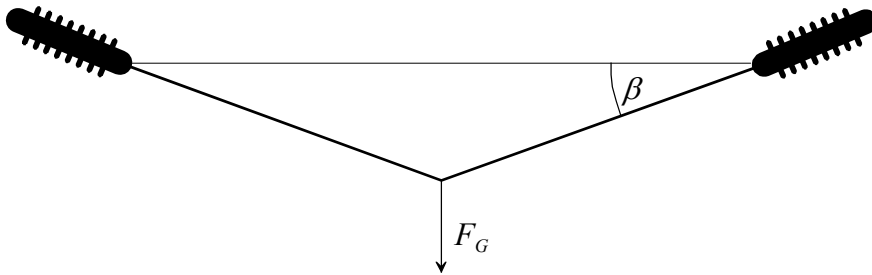


Fig.2. Modell für Leitung

Die Zugspannung σ lässt sich für beide Temperaturen berechnen. Bei 20°C beträgt diese:

$$\sigma = \frac{\rho \cdot l \cdot g}{\sin\left(\arccos\left(\frac{d}{l}\right)\right)} = \frac{8920\text{kg/m}^3 \cdot 30\text{m} \cdot 9.81\text{m/s}^2}{\sin\left(\arccos\left(\frac{25}{30}\right)\right)} = 4.749 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

und bei -5°C mit $l = 30\text{m} - \alpha l \cdot \Delta T = 29.987\text{m}$ ist $\sigma = 4.754 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.
Achtung: Bei -5°C muss die gleiche Masse verwendet werden, wie bei 20°C !

713 Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstands

Theorie

Die Längen und Volumenausdehnung kann für Temperaturmessungen verwendet werden. Eine andere Möglichkeit ist die Bestimmung des Ohmschen Widerstandes eines elektrischen Leiters. Dieser ist ebenfalls temperaturabhängig. Die Änderung des elektrischen Widerstandes ΔR ist ebenfalls durch ein analoges Gesetz gegeben:

$$\Delta R \approx \alpha R \cdot \Delta T \quad (\text{Eq.8})$$

Genau genommen ist es der spezifische elektrische Widerstand $\rho = \rho(T)$, welcher sich mit der Temperatur ändert. Der Ohmsche Widerstand eines Leiters mit der Querschnittsfläche A und der Länge l ist gegeben durch:

*Spezifischer
elektrischer
Widerstand*

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} \quad (\text{Eq.9})$$

Für Kupfer beträgt $\rho = 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega m$, für Wolfram bei Raumtemperatur ist dieser $\rho = 5.3 \cdot 10^{-8} \Omega m$.

Aufgaben

A1. Die Temperatur soll über den elektrischen Widerstand eines Drahtes bestimmt werden. Für die Kalibrierung wurden zwei Messungen des Stroms bei konstanter Spannung gemacht:

$$T_1 = 20^\circ\text{C} \quad I_1 = 2.1 \text{ mA}$$

$$T_2 = 700^\circ\text{C} \quad I_2 = 0.2 \text{ mA}$$

Bestimmen Sie die Funktion $I(T)$: Welche Annahmen machen Sie dabei?

Lösungen

L1. Die Temperaturabhängigkeit des Widerstandes in Eq.8 lässt sich schreiben als:

$$\frac{dR}{dT} = \alpha R$$

Durch Integration ergibt sich:

$$R(T) = R(T_1) \cdot e^{\alpha(T-T_1)}$$

Der Zusammenhang zur Stromstärke ergibt sich durch Anwendung des Ohmschen Gesetzt $U = RI$:

$$\frac{U}{I(T)} = \frac{U}{I(T_1)} \cdot e^{\alpha\Delta T}$$

und somit:

$$I(T) = I(T_1) \cdot e^{-\alpha\Delta T}$$

Der Temperaturkoeffizient lässt sich nun bestimmen:

$$I(T_2) = I(T_1) \cdot e^{-\alpha(T_2-T_1)}$$

also:

$$\ln\left(\frac{I(T_2)}{I(T_1)}\right) = -\alpha(T_2 - T_1)$$

$$\alpha = \frac{\ln(I(T_1)/I(T_2))}{T_2 - T_1} = 3.458 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

(Der Temperaturkoeffizient liegt in der Nähe desjenigen von Zink)

720 Wärme und Energie

721 Wärmekapazität

Theorie

Wird eine bestimmte Menge einer Substanz erwärmt, so wird dafür eine bestimmte Energiemenge benötigt. Oder anders ausgedrückt, es wird mit der Wärme eine bestimmte Energiemenge gespeichert (in Form von innerer Energie) – in diesem Zusammenhang wird von der Wärmemenge Q gesprochen, die einem Körper zugeführt wird (z. B. aufgrund eines Temperaturunterschieds). Wichtig ist hier, dass Wärme als Energieform betrachtet werden kann. Dies ist ein wesentlicher Bestandteil des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik.

Jedem Körper kann eine innere Energie U zugeordnet werden. Es handelt sich dabei quasi um den "Energiegehalt" eines Körpers. Die Änderung der inneren Energie kann durch verrichten von Arbeit oder durch Zufuhr von Wärme erfolgen. Für ein geschlossenes System gilt:

$$dU = \delta Q + \delta W \quad (\text{Eq.1})$$

Die Schreibweise deutet darauf hin, dass dU ein totales Differential ist, es gilt also:

$$\oint dU = 0 \quad (\text{Eq.2})$$

Auf diesen Umstand wird dann im Abschnitt 724 näher eingegangen. Steht ein Körper mit der Masse m im thermischen Kontakt mit einer Umgebung, so wird diesem Wärme zugeführt, wenn die Umgebungstemperatur höher ist. Für das Fassungsvermögen für Wärme lässt sich eine Kapazität, die Wärmekapazität definieren:

$$c_x = \left(\frac{\delta Q}{m \cdot dT} \right)_x \quad (\text{Eq.3})$$

Der Index x steht für eine oder mehrere Zustandsgrößen (e.g. Druck, Volumen), welche bei der Wärmezufuhr δQ konstant gehalten wurden.

Die Wärmekapazität lässt sich durchaus auch mikroskopisch erklären. Bei höherer Temperatur ist die kinetische Energie der Teilchen grösser. Für ein ideales Gas lässt sich die Wärmekapazität mit Hilfe der kinetischen Gastheorie beschreiben. Für Gase macht es Sinn, die molare Wärmeka-

*Wärme als
Energieform*

innere Energie

*totales
Differential*

*Definition der
Wärme-
kapazität*

*mikrosko-
pischer Ansatz*

pazität zu nehmen. Die molare Wärmekapazität ist jene Wärmemenge, die einem Mol des betreffenden Stoffes zugeführt werden muss, um eine Temperaturerhöhung von einem Kelvin zu erreichen. Gemäss der Formel Eq.3 gilt für ein Mol mit der Masse m :

$$\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}RT$$

Für n Mole eines idealen Gases ist die gespeicherte Wärmemenge (relativ zum absoluten Nullpunkt):

$$Q = \frac{3}{2}nRT = C_V nT$$

Daraus folgt die molare Wärmekapazität für ideale Gase:

$$C_V = \frac{3}{2}R \quad (\text{Eq.4})$$

Die drei im Zähler von Eq.4 folgt aus den drei Raumrichtungen für die Geschwindigkeit. Befindet sich ein System vieler Teilchen im Gleichgewicht, entfällt auf jeden Freiheitsgrad eine Energie von:

$$E = \frac{1}{2}RT \text{ pro Mol bzw. } E = \frac{1}{2}kT \text{ pro Teilchen}$$

Dies wird das Äquipartitionstheorem (Gleichverteilungssatz) genannt. Für ein zweiatomiges Gas kommen zu den drei Richtungen für die Translation noch zwei Freiheitsgrade für die Rotation dazu (Die Rotation um die Längsachse des Moleküls liefert wegen dem verschwindend kleinen Trägheitsmoment keinen nennenswerten Beitrag).

Auch für Festkörper gilt der Gleichverteilungssatz. Im Fall eines Kristalls besteht der Körper aus regelmässig, auf einem Gitter angeordneten Atomen oder Molekülen. Die einzelnen Teilchen können im Kristallgitter schwingen. Da nun jedes Atom sowohl kinetische als auch potentielle (Feder)-Energie hat (siehe 411), ergibt sich:

$$C_V = 3R \quad (\text{Eq.5})$$

Dieses Gesetz (Gesetz von DULONG-PETIT) ist gut erfüllt für schwere Elemente. Für leichte Elemente bleiben die realen Werte hinter dem Wert von Eq.5 mit sinkender Temperatur zurück.

Wärmekapazität eines idealen Gases

Äquipartitions-Theorem

Gesetz von Dulong-Petit

Zum Schluss noch ein dynamisches Beispiel: Der zeitliche Verlauf beim Auskühlen eines Wärmespeichers ist u.a. von der Wärmekapazität abhängig. In Analogie zum Abschnitt 625 kann folgende Wärmestrombilanz betrachtet werden: Die zeitliche Änderung der gespeicherten Wärme Q ist gleich dem ausfließenden Wärmestrom, also

$$\frac{dQ}{dt} = -I_Q = -k \cdot (T - T_u)$$

Mit der Umgebungstemperatur T_u . Für die Temperatur T des Speichers resultiert, wenn die Wärmekapazität temperaturunabhängig und die Masse konstant ist:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{k}{mc_0} \cdot (T - T_u)$$

Mit der Substitution $T - T_u = \mathcal{G}$ und $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{d}{dt}[T - T_u] = \frac{dT}{dt}$ resultiert:

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = -\frac{k}{mc_p} \cdot \mathcal{G}$$

Durch Integration und Separation resultiert:

$$\int \frac{d\mathcal{G}}{\mathcal{G}} = -\frac{k}{mc_p} \cdot \int dt = -\frac{k}{mc_p} \cdot t + const. = \ln|\mathcal{G}|$$

Und somit. $\mathcal{G}(t) = \mathcal{G}_0 \cdot e^{-\frac{k}{mc_p} \cdot t}$

Aufgaben

A1. Bei der Erhitzung einer festen metallischen Substanz wird folgende Beobachtung gemacht: Für eine Temperaturdifferenz von 90 K werden für 100 g der Substanz werden 2.12 kJ Energie verbraucht.

Um was für eine Substanz könnte es sich handeln?

A2. Wie viel Energie könnte 1 m³ Wasser entzogen werden, wenn dieses von 20 °C auf 17 °C abgekühlt werden könnte?

A3. In eine Badewanne wurde zu kaltes Wasser eingelassen. Nun soll durch Zugabe von heissem Wasser die Temperatur auf angenehme Werte gebracht werden.

- a) Berechnen Sie die Mischtemperatur formal, wenn heisses und kaltes Wasser gemischt wird?
- b) Berechnen Sie die Mischtemperatur für 120 Liter Badewasser mit einer Temperatur von 22°C, wenn 10 Liter heisses Wasser mit einer Temperatur von 60°C beigegeben wird.

A4. Eine Kaffee-Tasse sei mit heissem Wasser gefüllt, welcher zur Zeit $t = 0$ eine Temperatur von 70°C habe. Nach fünf Minuten betrage die Temperatur noch 40°C. Die Umgebungstemperatur betrage 20°C.

Welche Temperatur hat das Wasser nach (a) 8 Minuten; (b) 12 Minuten?

A5. Bei einem Wärmespeicher mit 2 kg Wasser werde bei $t = 0$ s eine Heizung eingeschaltet und nach 5 Minuten wieder ausgeschaltet. Während 15 Minuten (ab Beginn des Heizens) werde die Temperatur gemessen (Tab.1). Die Heizleistung sei P .

Tab.1. Messwerte (Temperatur)

Zeit [Min.]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15
T [°C]	20.0	33.4	45.0	55.0	63.7	71.2	64.6	58.6	53.4	45.1	38.8	32.2

- a) Wie gross ist die maximal gespeicherte thermische Energie?
- b) Welche Differentialgleichung beschreibt die Änderung der Wärmemenge im System?
- c) Schätzen Sie anhand der Messwerte (Tab.1) die Heizleistung P ab: Zu welchem Zeitpunkt geht das am Besten?
- d) Berechnen Sie die Temperatur $T(t)$ als Funktion der Zeit für $t > 300$ s: Bestimmen Sie aus den Messwerten in Tab.1 alle Parameter.

A6. Berechnen Sie gemäss Theorie die molare Wärmekapazität für ein- und zweiatomige Gase sowie für einfache Kristalle und vergleichen Sie diese mit Tabellenwerten: Wie gross sind die Differenzen zwischen gemessenen und berechneten Werten? Wie könnten sich diese Differenzen erklären lassen?

Lösungen

L1.

$$c \approx \frac{\Delta Q}{m \cdot \Delta T} = \frac{2120J}{0.1kg \cdot 90K} = 235.56 \frac{J}{kg \cdot K} \rightarrow \text{Silber}$$

L2.

$$\Delta Q = c_p \cdot m \cdot \Delta T = 4182J \cdot kg^{-1}K^{-1} \cdot 10^3 kg \cdot 3K = \underline{12.546MJ}$$

L3. Die vom heissen Wasser abgegebene Wärme ΔQ_{12} ist gleich die vom kalten Wasser aufgenommene Wärme ΔQ_{21} :

$$m_1 c_p \cdot \Delta T_1 = m_2 c_p \cdot \Delta T_2$$

Die Temperaturdifferenzen lassen sich durch die Temperatur des heissen Wassers T_1 und diejenige des kalten Wassers T_2 ausdrücken: $\Delta T_1 = T_1 - T$ und $\Delta T_2 = T - T_2$, mit der Mischtemperatur T . Somit gilt:

$$m_1 c_p \cdot (T_1 - T)_1 = m_2 c_p \cdot (T - T_2) \rightarrow T = \frac{m_2 T_2 + m_1 T_1}{m_1 + m_2}$$

für (b):

$$T = \frac{m_2 T_2 + m_1 T_1}{m_1 + m_2} = \underline{24.92^\circ C}$$

(gerechnet mit einer konstanter Dichte für Wasser von 1000 kg/m^3)

L4.

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = -\kappa \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}(t) = \mathcal{G}_0 \cdot e^{-\kappa t} \text{ mit } \mathcal{G} = T - T_U \text{ und } \kappa = k/(mc_p)$$

Bestimmung von κ :

$$\frac{\mathcal{G}(t)}{\mathcal{G}_0} = e^{-\kappa t} \rightarrow \kappa = \frac{\ln(\mathcal{G}_0 / \mathcal{G}(t))}{t} = 0.183 \text{ min}^{-1}$$

(a) $31.6^\circ C$ (b) $25.6^\circ C$

L5.

$$Q_{\max} = Q(300s) = mc_p T(300s) =$$

$$(a) \quad 2kg \cdot 4182 \frac{J}{kg \cdot K} \cdot (71.2 + 273.16)K = \underline{2.88MJ}$$

$$(b) \quad \frac{dQ}{dt} = I_Q^{in} - I_Q^{out} = P - k \cdot (T - T_U); \text{ mit } T_U = 20^\circ C$$

(c) Am Anfang des Heizens, da dort I_Q^{out} am kleinsten ist (bei eingeschalteter Heizung):

$$P \approx \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{mc_p \cdot (T_1 - T_0)}{t_1 - t_0} = \underline{1868W}$$

(effektiv wären es 2 kW)

$$(d) \quad P = 0 \text{ W} \rightarrow \frac{dT}{dt} = -\frac{k}{mc_p} \cdot (T - T_U) \rightarrow T(t) = T_U + (T_0 - T_U) \cdot e^{-\kappa t}$$

mit $T_0 = T(300s) = 71.2^\circ C$ und

$$\kappa = \frac{\ln(T_0 - T_U) - \ln(T_t - T_U)}{\Delta t} = 0.0024s^{-1}$$

$k = 19.99 \text{ s}^{-1}$; effektiv wären es $k = 20 \text{ s}^{-1}$

L6.

Einatomige Gase: $C_V = 12.47 \text{ J/(molK)}$;

$C_V(\text{He}) = 12.52 \text{ J/(molK)}$; $C_V(\text{Ne}) = 12.52 \text{ J/(molK)}$;

$C_V(\text{Ar}) = 12.52 \text{ J/(molK)}$

Zweiatomige Gase: $C_V = 20.78 \text{ J/(molK)}$;

$C_V(\text{H}_2) = 20.44 \text{ J/(molK)}$; $C_V(\text{N}_2) = 20.80 \text{ J/(molK)}$;

$C_V(\text{O}_2) = 20.98 \text{ J/(molK)}$

Kristall (einatomiges Gitter): $C = 24.93 \text{ J/(molK)}$;

Au: $C = 25.28 \text{ J/(molK)}$; Al: $C = 24.10 \text{ J/(molK)}$

722 Phasenübergänge

Theorie

Materie existiert in unterschiedlichen Aggregatzuständen (gasförmig, flüssig, fest). Innerhalb eines Zustandes können nochmals verschiedene Modifikationen (Phasen) auftreten. Vor allem bei festen Körpern kann bei ein und demselben Element das Kristallgitter verschieden sein, je nach Druck und Temperatur. Auch im gasförmigen Zustand können sich durch Ionisation der Atome Änderungen ergeben. Ein ionisiertes Gas ist ein sogenanntes Plasma, welches sich ganz anders verhalten kann.

Ein ideales Gas kann nicht kondensieren, da in diesem Model keine zwischenatomaren oder zwischenmolekularen Kräfte eingeschlossen sind. Die Zustandsgleichung realer Gase lässt sich näherungsweise finden, wenn folgende Annahmen berücksichtigt werden: (1) reale Moleküle sind nicht punktförmig, es steht dem Gas somit nur das Volumen $(V-b)$ pro Mol zur Verfügung. (2) Moleküle üben anziehende Kräfte aufeinander aus, der Druck wird dadurch reduziert:

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2} \right) \cdot (V - nb) = nRT \quad (\text{Eq.6})$$

Dabei wird a als Kohäsionsdruck und b als Kovolumen bezeichnet. Für hohe Temperaturen ergeben sich in einem p-V-Diagramm für die Isothermen hyperbelförmige Kurven, das Gas verhält sich nahezu ideal. Bei tieferen Temperaturen flachen die Isothermen in bestimmten Bereichen ab (Fig.1).

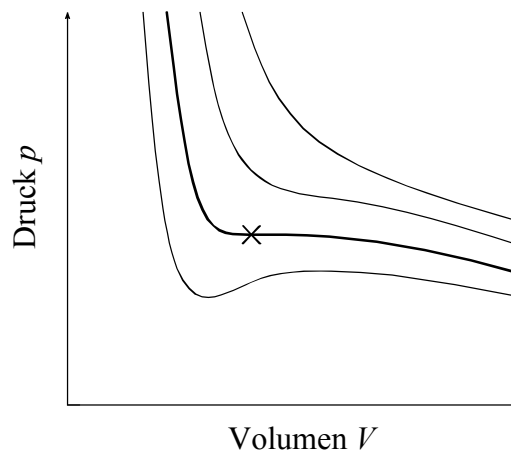


Fig.1. Isothermen für ein reales Gas: Das Kreuz bezeichnet den kritischen Punkt.

Aggregatzustände

Phasen

Reale Gase

*Zustandsgleichung
reale Gase*

*Isothermen
realer Gase*

Die Steigung der Isothermen sind gegeben durch:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{T=const} = \frac{2an^2}{V^3} - \frac{nRT}{(V-nb)^2}$$

Am kritischen Punkt wird die Steigung der Isotherme null, es gilt:

kritischer Punkt

$$\frac{\partial p}{\partial V} = 0 \text{ und } \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} = 0$$

Unterhalb des kritischen Punktes liegt ein Flüssigkeits-Gas-Gemisch vor.

Für CO₂ beträgt $a = 0.364 \text{ Pa}\cdot\text{m}^6/\text{mol}^2$ und $b = 0.043\cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{mol}$, für H₂O ist $a = 0.557 \text{ Pa}\cdot\text{m}^6/\text{mol}^2$ und $b = 0.031\cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{mol}$.

Das p-T-Diagramm von reinen Stoffen kann generell zur Veranschaulichung von Zuständen und deren zugehörigen Phasen dienen (Fig.2).

Phasen-Diagramme

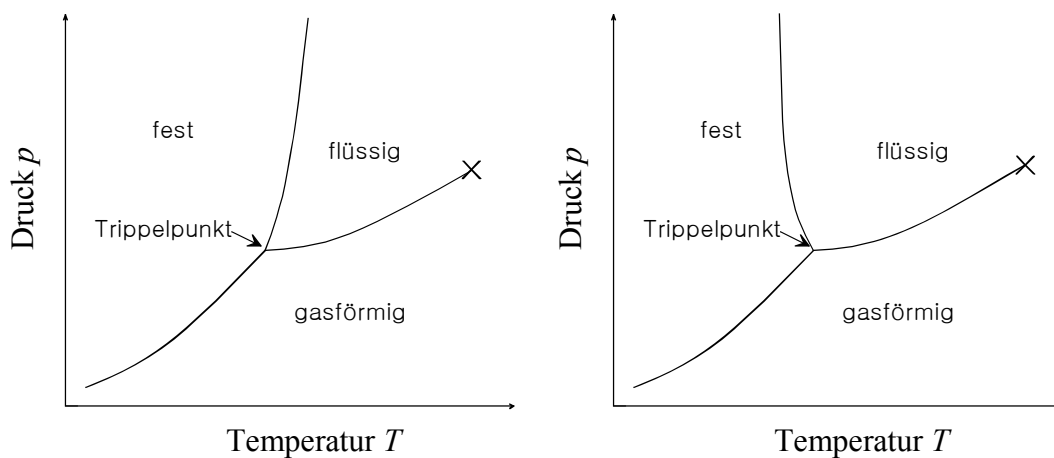


Fig.2. Phasendiagramme: Links Stoff ohne Anomalie; recht Stoff mit Anomalie; das Kreuz bezeichnet den kritischen Punkt.

Der Vorgang des Schmelzens und des Verdampfens benötigt Energie. Dabei kann man beobachten, dass während des Schmelz- bzw. des Verdampfungsprozesses die Temperatur nicht ansteigt. Bei diesen Prozessen investieren wir also Energie in die "Umformung" einer Substanz. Bei dieser Umformung werden zwischenatomare Bindungen gelöst. Umgekehrt wird diese Energie wieder frei, wenn die Substanz erstarrt (Erstarrungswärme) oder kondensiert (Kondensationswärme). Die für diese Prozesse benötigte Energie lässt sich über die Wärmemenge Q und die Menge der Substanz m berechnen. Die für das Schmelzen oder Erstarren notwendige Schmelz- bzw. Erstarrungswärme L_f ergibt sich aus der zugeführten Wärme Q während dem Prozess:

*Schmelzen
und
Erstarren*

$$L_f = \frac{Q}{m} \quad (\text{Eq.7})$$

Analog gilt für das Verdampfen und Kondensieren:

$$L_v = \frac{Q}{m} \quad (\text{Eq.8})$$

*Verdampfen
und Kondensieren*

Die für den Übergang benötigte Energie ist somit gegeben durch:

$$Q = L_v m \quad \text{bzw.} \quad Q = L_f m \quad (\text{Eq.9})$$

Eine spezielle Stoffumwandlung ist das Verbrennen. Dabei handelt es sich nicht um eine rein physikalische Phasenumwandlung, sondern um eine chemische Reaktion. Somit gehört dieser Prozess eigentlich nicht in diesen Abschnitt. Die Berechnung kann aber in analoger Weise geschehen, wie bei Eq.8 und Eq.9. Die durch eine Verbrennung freigesetzte Energie ist durch den Heizwert H gegeben:

Verbrennen

$$Q = Hm \quad (\text{Eq.10})$$

Bei Verbrennung von Holzkohle werden 31 MJ / kg, bei trockenem Holz 16 MJ / kg und bei Heizöl 41 MJ /kg freigesetzt.

Aufgaben

A1. Ein Würfel von 5 g Eis werde in einem Drink (Volumen = 1 dl) geschmolzen?

- a) Welche Energie wird dafür benötigt?
- b) Um wie viele °C kühlt sich dabei der Drink ab (Annahme: Drink hat Dichte von Wasser)?

A2. Ein Barren von 250 g Zinn soll geschmolzen werden. Dabei soll dies elektrisch erfolgen. Die dafür benötigte Heizung arbeite bei einer Spannung von 100 V und der Heizstrom betrage 3 A. Der Wirkungsgrad der Heizung betrage 78%.

Wie lange dauert es, bis die 250 g Zinn geschmolzen sind?

A3. Bei einer Regenmessung wurde festgestellt, dass innerhalb von einer Stunde eine Regenmenge von 20 Liter pro m² gefallen ist. Das Regengebiet sei 2 km² gross.

Welche Kondensationswärme wurde in der Regenwolke frei gesetzt?

A4. In einer kalten Nacht (Umgebungstemperatur unter null Grad) soll mit einem Feuer durch Schmelzen von Schnee 2 Liter Wasser gewonnen werden.

Welche Menge Holz muss dafür mindestens zur Verfügung stehen?

A5. Berechnen Sie für 1 Mol CO₂ den Druck sowohl mit dem Zustandsgesetz für ideale Gase als auch mit dem Gesetz für reale Gase bei 0°C und bei 20°C, wenn sich dieses in einem Gefäss mit einem Liter Inhalt befindet. Wie gross ist die Differenz?

A6. Das Aufheizen und Sieden eines Behälters mit Wasser soll mit einem graphischen Modelleditor modelliert und simuliert werden. Dazu müssen folgende Fragen geklärt werden: Welche Systemgleichungen beschreiben den Prozess? Wie sieht die Flussdiagrammstruktur aus?

Lösungen

L1.

$$(a) Q = L_f \cdot m = 3.338 \cdot 10^5 \text{ J/kg} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = \underline{1.669 \text{ kJ}}$$

$$(b) \Delta T \approx \frac{\Delta Q}{mc_p} = \frac{1.669 \cdot 10^3 \text{ J}}{0.1 \text{ kg} \cdot 4182 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}} \approx 4^\circ \text{C}$$

L2.

$$P \cdot \Delta t = UI \cdot \Delta t = L_f \cdot m \rightarrow \Delta t = \frac{L_f \cdot m}{UI} = \frac{1.49 \cdot 10^4 \text{ J}}{0.78 \cdot 300 \text{ W}} = \underline{63.7 \text{ s}}$$

L3.

$$\begin{aligned} Q &= L_v \cdot m = L_v \cdot \rho V = L_v \cdot \rho \cdot A \cdot h \\ &= 2.256 \cdot 10^6 \text{ J/kg} \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 2 \cdot 10^6 \text{ m}^2 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ &= \underline{9.024 \cdot 10^{13} \text{ J}} \end{aligned}$$

L4. Annahme: Alle Energie wird ins Schmelzen investiert:

$$L_f \cdot m_{H_2O} = H \cdot m_{Holz} \rightarrow m_{Holz} = \frac{L_f \cdot m_{H_2O}}{H} = \underline{41.7 \text{ g}}$$

Allerdings ist der Wert unrealistisch, da ein offenes Feuer viel Energie in die Umgebung abstrahlt. Wird lediglich 1% der Energie nutzbar, so werden bereits 4.17 kg Holz benötigt.

L5.

$$\text{Ideal: } p = \frac{nRT}{V} = 2.269 \cdot 10^6 \text{ Pa} \text{ für } 0^\circ \text{C} \text{ bzw. } 2.436 \cdot 10^6 \text{ Pa} \text{ für } 20^\circ \text{C}$$

$$\text{Real: } p = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2} = 2.007 \cdot 10^6 \text{ Pa} \text{ } 0^\circ \text{C} \text{ bzw. } 2.180 \cdot 10^6 \text{ Pa} \text{ für } 20^\circ \text{C}$$

also rund 12-13% weniger Druck

L6.

Fallunterscheidung

$T < 100^\circ\text{C}$

$$\frac{dQ}{dt} = P_{in} - \kappa \cdot (T - T_u)$$

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

$T > 100^\circ\text{C}$

$$\frac{dQ}{dt} = P_{in} - \kappa \cdot (T - T_u) - L_V \cdot \frac{dm}{dt}$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{P_{in} - \kappa \cdot (T - T_u)}{L_V}$$

723 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik, Entropie

Theorie

Der erste Hauptsatz reicht zur Beschreibung von thermodynamischen Vorgängen nicht aus. Es können leicht Beispiele gefunden werden, welche nach dem Energiesatz erlaubt sind, jedoch in der Natur nie beobachtet werden können. So hebt sich nicht spontan ein Körper unter Abkühlung in die Höhe. Ein Körper erwärmt sich auch nicht spontan durch Wärmeentzug aus der Umgebung. Viele Prozesse sind auch nicht einfach umkehrbar. So kann Leben leicht zerstört, nicht aber einfach generiert werden. Offensichtlich gibt es bei (spontanen) Energieumwandlungen eine Vorzugsrichtung. Spontan fließt Wärme von einem heißen zu einem kalten Reservoir. Soll der Prozess umgekehrt werden, so muss zusätzliche Energie zugeführt werden. Nach der Aussage von CLAUSIUS lässt sich dies folgendermassen formulieren: Es gibt keine periodisch arbeitende Maschine, die ausschliesslich einem kälteren Wärmebad Wärme entzieht und diese einem heißeren Wärmebad zuführt.

Mikroskopisch betrachtet lässt sich der Sachverhalt mit der Ordnung bzw. Unordnung im System beschreiben. Würden alle Atome mit einer bestimmten Bewegungsenergie in einen bestimmten Bereich des Systems gebracht, so entspricht dies quasi einer atomaren Ordnung schaffen. Spontan läuft eher der umgekehrte Prozess ab: Teilchen mischen sich, was makroskopisch einer Verteilung der Wärme entspricht. Für die thermodynamische Beschreibung eines Systems kann nun eine Zustandsfunktion bzw. Grösse gesucht werden, welche die Ordnung im System beschreibt. Diese Zustandsgrösse wird Entropie S genannt und wurde von R. CLAUSIUS 1850 eingeführt. Sie ist definiert durch die bei einer bestimmten Temperatur T reversibel² ausgetauschte Wärme δQ_{rev} :

$$dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T} \quad (\text{Eq.11})$$

*spontane Prozesse**zweiter Hauptsatz**Entropie*

² Irreversible Prozesse können sich nicht von selbst umkehren. Irreversible Prozesse laufen so lange ab, bis ein Gleichgewicht erreicht wird. Im Gegensatz dazu bezeichnet man Prozesse, welche nur über Gleichgewichtszustände führen, als reversibel. Reversible Prozesse stellen somit eine Idealisierung dar, welche es streng genommen nicht gibt. Im Gleichgewicht haben die Zustandsvariablen zeitunabhängige Werte. Reversible Prozesse lassen sich aber durch infinitesimale Änderungen annähern, wenn das Gleichgewicht nur wenig gestört wird. Erfolgen die Änderungen genügend langsam, so stellt sich im System immer wieder ein Gleichgewicht ein.

Die Normierung dieser Grösse erfolgt durch den dritten Hauptsatz der Thermodynamik: Die Entropie am absoluten Nullpunkt ist null, also $S_{T=0K} = 0$.

*absoluter
Nullpunkt*

Ein abgeschlossenes System erreicht sein Gleichgewicht, wenn $dS = 0$ bzw. $S = S_{\max}$ gilt (zweiter Hauptsatz der Thermodynamik). Für irreversible Prozesse nimmt die Entropie zu, es gilt $dS > 0$. Das System strebt nach einem neuen Gleichgewichtszustand. Dabei wächst ebenfalls die Entropie, bis sie maximal geworden ist. Für ein nicht abgeschlossenes System kann die Entropie auch abnehmen, wenn Wärme mit der Umgebung ausgetauscht wird.

Gleichgewicht

Die Entropie ist eine extensive Grösse (Tab.1). Die Wärmemenge ändert sich mit der Grösse des Systems (Masse), hingegen die Temperatur nicht.

Mit Hilfe der Entropie kann der erste Hauptsatz der Wärmelehre (Eq.1) umgeschrieben werden. Für eine reversible Zustandsänderung gilt: $\delta Q_{\text{rev}} = T dS$. Wird im System noch Kompressionsarbeit verrichtet, so lässt sich diese berechnen durch:

*erster
Hauptsatz*

$\delta W = -F \cdot ds = -pA \cdot ds = -p \cdot dV$. Somit resultiert für den ersten Hauptsatz (für reversible Prozesse):

$$dU = T \cdot dS - p \cdot dV \quad (\text{Eq.12})$$

Ist die Funktion $U = U(S, V)$ gegeben, so lassen sich daraus folgende Relationen ableiten:

$$T = \left[\frac{\partial U}{\partial S} \right]_{V, N, \dots} \quad (\text{Eq.13})$$

und

$$-p = \left[\frac{\partial U}{\partial V} \right]_{S, N, \dots} \quad (\text{Eq.14})$$

Tab.1. Vier Zustandsgrössen in der Thermodynamik

	<i>Intensive Grössen</i>	<i>Extensive Grössen</i>
$pV = nRT$	Druck p	Volumen V
$TS = \text{pot. Energie}$	Temperatur T	Entropie S

Die Entropie lässt sich als treibende Ursache für thermische Prozesse auffassen. Ein interessanter Aspekt liefert der Vergleich der Leistung mit der Elektrizität, Mechanik und Hydraulik: Die Entropie fügt sich zwanglos in ein Bild der Analogien ein (Tab.2). Die bei einer Temperaturdifferenz ΔT transportierte Leistung ist durch den Entropiestrom I_S gegeben:

Leistung und Entropie-Strom

$$P = T \cdot \frac{dS}{dt} = T \cdot I_S \quad (\text{Eq.15})$$

Tab.2. Analogien zum Entropiestrom

Mechanisch	Hydraulisch	Elektrisch	Thermisch
Potentialdifferenz ΔV	Druckdifferenz Δp	Elektr. Spannung Potentialdifferenz $U = \Delta \varphi$	Temperatur T
Massestrom $\frac{dm}{dt} = I_m$	Volumenstrom $\frac{dV}{dt} = I_V$	Ladungsstrom $\frac{dQ}{dt} = I$	Entropiestrom $\frac{dS}{dt} = I_S$
$P = \Delta V \cdot I_m$	$P = \Delta p \cdot I_V$	$P = UI$	$P = T \cdot I_S$

physikalische Analogien

Aufgaben

A1. Bestimmen Sie die Entropie eines idealen Gases bei konstanter Teilchen-zahl N in Abhängigkeit von der Temperatur T und dem Volumen V . Beachten Sie dabei folgende Zustandsgleichungen:

$$U = \frac{3}{2} NkT \quad \text{und} \quad pV = NkT$$

A2. Bei einem Kraftwerk mit Flusskühlung werde eine Leistung von 200 MW ans Kühlwasser abgegeben. Die Temperatur des Wassers sei konstant bei 27°C. Wie gross ist der Entropiestrom? Wie gross ist die an den Fluss abgegebene Entropie als Funktion der abgegebenen Wärmemenge?

A3. Betrachten Sie folgende Definition:

*statistische
Entropie*

$$S = -\sum_k x_k \log x_k$$

Berechnen Sie S für folgende Zahlenreihen:

0.9999981	0.25214322	0.05
1E-07	0.25214322	0.05
1E-07	0.25214322	0.05
1E-07	0.12607161	0.05
1E-07	0.05042864	0.05
1E-07	0.02521432	0.05
1E-07	0.01260716	0.05
1E-07	0.0075643	0.05
1E-07	0.00504286	0.05
1E-07	0.00252143	0.05
1E-07	0.00201715	0.05
1E-07	0.001765	0.05
1E-07	0.00151286	0.05
1E-07	0.00126072	0.05
1E-07	0.00126072	0.05
1E-07	0.00126072	0.05
1E-07	0.00126072	0.05
1E-07	0.00126072	0.05
1E-07	0.00126072	0.05
1E-07	0.00126072	0.05
1E-07	0.00126072	0.05

Berechnen Sie zudem S auch für 20 Zufallszahlen dividiert durch die Summe der 20 Zufallszahlen.

Was fällt auf? Wie lässt sich die Definition mit der physikalischen Entropie in Verbindung bringen?

Lösungen

L1. Durch Umformen von Eq.11 und einsetzen ergibt sich:

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p \cdot dV}{T} = \frac{3}{2} Nk \cdot \frac{dT}{T} + Nk \cdot \frac{dV}{V}$$

(mit $p = NkT/V$)

Ausgehend von einem Referenzzustand mit T_0 und V_0 mit der Entropie S_0 kann nun integriert werden:

$$\begin{aligned} \int dS &= \frac{3}{2} Nk \int \frac{dT}{T} + Nk \int \frac{dV}{V} = \frac{3}{2} Nk \cdot [\ln T]_{T_0}^T + Nk [\ln V]_{V_0}^V \\ &= Nk \cdot \left[\ln \left(\left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \right) + \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) \right] = Nk \cdot \ln \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{V}{V_0} \right) \right] \end{aligned}$$

L2.

$$I_S = \frac{P}{T} = -0.67 \cdot 10^6 \frac{W}{K}$$

$$Q = -T \cdot \int I_S \cdot dt = T \cdot S \rightarrow \text{Ausgetauschte Entropie } S = \frac{Q}{T}$$

L3.

$$S = 1.41 \cdot 10^{-5} / 0.769999 / 1.30103 / \text{Zufallszahlen} \sim 1.2$$

Die Zahlen könnten physikalisch die Besetzung von Zuständen beschreiben, wobei 0 unbesetzt bedeuten würde. Die Zahl x_k beschreibt dann, wie viele Teilchen im Zustand k anzutreffen sind. Ist nur ein Zustand besetzt (erste Zahlenkolonne), so ist die Ordnung hoch und somit die Entropie tief. Je mehr Zustände besetzt sind, desto grösser wird S . Sind alle Zustände gleich besetzt (alles ist gleichmässig verteilt), wird S maximal: Die Grösse S widerspiegelt somit das Verhalten der physikalischen Entropie.

724 Wärmekraftmaschinen

Experiment und Theorie

Ein Rundkolben sei durch einen Schlauch mit einem Zylinder verbunden (Fig.5). Wird der Glaskolben nun in ein Bad mit warmem Wasser mit der Temperatur T_2 getaucht, so lässt sich beobachten, wie im Glaszylinder ein darin befindlicher Kolben nach oben gedrückt wird. Es wird somit Wärme in mechanische Energie umgewandelt.

*Umwandlung
von Wärme
in
mechanische
Energie*

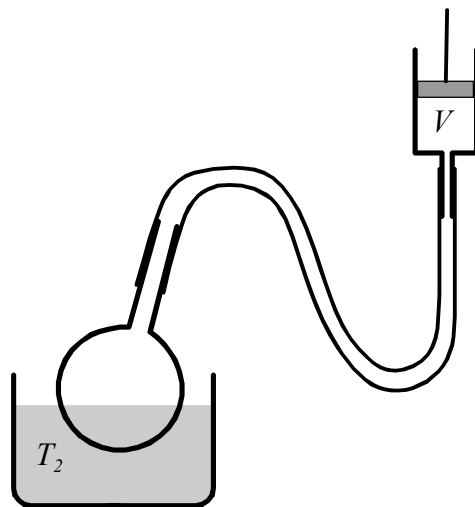


Fig.5. Experiment zur Wärmekraftmaschine

Die mechanische Arbeit ist durch die Expansion des Volumens V um den Beitrag dV gegeben, es gilt: $dW = F \cdot ds = mg \cdot dh = p \cdot dV$. Dabei wird ein konstanter Druck angenommen. Damit nun diese Anordnung zyklisch arbeitet, müsste der Rundkolben in einem zweiten Bad mit kaltem Wasser bei einer Temperatur T_1 abgekühlt werden.

Für die genauere Analyse soll im Folgenden ein ganz bestimmter Kreisprozess, der Carnotsche Kreisprozess betrachtet werden. Dieser Kreisprozess wurde von CARNOT 1824 eingeführt. Seine Bedeutung liegt darin, dass er einerseits der idealisierte Grenzfall realer Kreisprozesse in Wärmekraftmaschinen darstellt. Andererseits lassen sich anhand dieses Prozesses grundlegende Erkenntnisse gewinnen. Für die Darstellung des Kreisprozesses eignet sich ein $p - V$ - Diagramm (Fig.6). Die von einer Kurve umschlossene Fläche ist die vom System geleistete Arbeit.

*Carnotscher
Kreisprozess*

*p-V-
Diagramm*

Als Arbeitsmedium wird ein ideales Gas verwendet. Der Carnot-Prozess besteht aus vier reversiblen Teilschritten, welche im $p-V$ -Diagramm dargestellt werden können. In einem ersten Schritt (Fig.6, A) erfolgt eine isotherme Expansion. Isotherm bedeutet, dass die Temperatur konstant gehalten wird. Wenn sich dabei der Rundkolben im Kontakt mit dem warmen Reservoir (Temperatur T_2) befindet, wird diesem Wärme entzogen. Für die isotherme Expansion gilt wegen des idealen Gasgesetzes (Eq.5):

*isotherme
Expansion*

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2} \quad (\text{Eq.16})$$

Die innere Energie U eines idealen Gases ändert sich nicht. Somit gilt: $\Delta U_A = W_A + Q_A = 0$. Die entzogene Wärme ist deshalb gegeben durch:

$$\begin{aligned} Q_A = -W_A &= NkT_2 \cdot \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \\ &= NkT_2 \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \end{aligned} \quad (\text{Eq.17})$$

Der zweite Schritt ist eine adiabatische Expansion (Fig.6, B). Dabei wird das nun thermisch isolierte Arbeitsmedium vom Volumen V_2 auf das Volumen V_3 gebracht. Dabei ändert sich auch die Temperatur von T_2 auf T_1 . Für einen reversiblen, adiabatischen Prozess gilt:

*adiabatische
Expansion*

$dU = -p \cdot dV = mc_V \cdot dT$. Dies resultiert aus dem ersten Hauptsatz unter der Bedingung, dass kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet. Mit dem Gesetz für ideale Gase ergibt sich:

$$mc_V dT = -\frac{NkT}{V} \cdot dV \quad (\text{Eq.18})$$

Die Gleichung Eq.18 kann integriert werden:

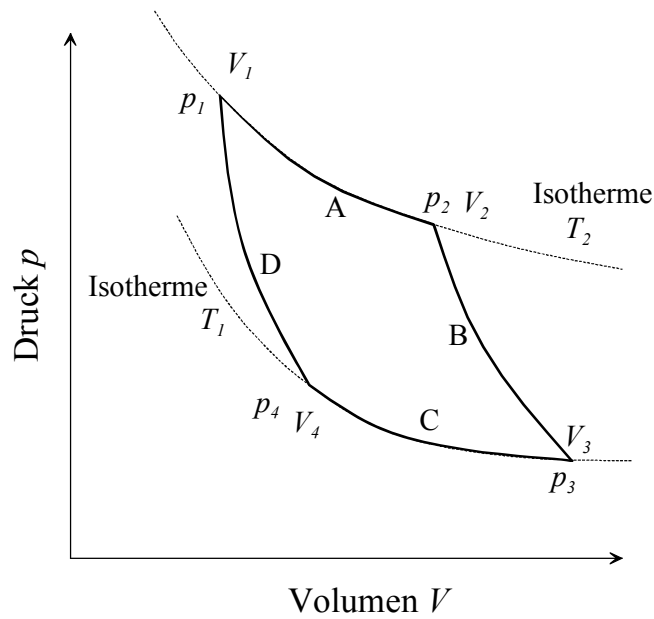


Fig.6. Darstellung des Carnotschen Kreisprozesses im $p - V$ -Diagramm: (A) isotherme Expansion, (B) adiabatische Expansion, (C) isotherme Kompression, (D) adiabatische Kompression.

$$\frac{mc_V}{Nk} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = - \int_{V_3}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow \frac{mc_V}{Nk} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = - \ln\left(\frac{V_2}{V_3}\right)$$

(Eq.19)

Mit $mc_V = \frac{3}{2} Nk$ (Eq.3!) ergibt sich:

$$\frac{3}{2} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \ln\left(\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}}\right) = \ln\left(\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{V_3}{V_2}$$

(Eq.20)

Die geleistete Arbeit wird bei diesem Prozessschritt der inneren Energie U entnommen: $W_B = \Delta U_B = mc_V \cdot (T_2 - T_1)$.

Als dritter Prozessschritt erfolgt eine isotherme Kompression. Dabei soll nun der Rundkolben im thermischen Kontakt mit dem Kältebad (Temperatur T_1) stehen. Analog zur Expansion gilt:

*isotherme
Kompression*

$$\frac{V_4}{V_3} = \frac{p_3}{p_4} \quad (\text{Eq.21})$$

Die bei der Kompression an das Kältebad abgegebene Energie beträgt:

$$Q_C = NkT_1 \cdot \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) \quad (\text{Eq.22})$$

Der vierte Prozessschritt besteht aus einer adiabatischen Kompression. Analog zum Prozessschritt B gilt:

*adiabatische
Kompression*

$$\frac{V_1}{V_4} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{Eq.23})$$

und

$$W_D = \Delta U_4 = mc_V \cdot (T_2 - T_1) \quad (\text{Eq.24})$$

Die Energiebilanz ergibt $\Delta U_{total} = Q_A + W_A + W_B + Q_C + W_C + W_D$. Die genauere Betrachtung zeigt, dass gilt:

*Energie-
bilanz*

$$\frac{Q_A}{T_2} + \frac{Q_C}{T_1} = 0 \quad (\text{Eq.25})$$

Diese Beziehung gilt für alle reversiblen Prozessführungen und ist in Übereinstimmung mit Abschnitt 723.

Wird der Carnotsche Kreisprozess in infinitesimale Schritte zerlegt, so kann geschrieben werden:

$$\oint \frac{\delta Q_{rev}}{T} = 0 \quad (\text{Eq.26})$$

Im $T - S$ -Diagramm ist der Carnotsche Kreisprozess durch ein Rechteck beschrieben, welches durch die Geraden mit konstanter Temperatur (Isothermen bei Schritt A und C) und die Geraden mit konstanter Entropie (Adiabaten bei reversiblen Prozess zwischen B und D = Isentropen) begrenzt wird.

Zum Schluss soll noch der Wirkungsgrad einer solchen Maschine betrachtet werden. Der Wirkungsgrad η ist definiert als das Verhältnis von geleisteter Arbeit zu aufgenommene Wärme:

Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{|W|}{Q_A} = \frac{Q_A + Q_B}{Q_A} = 1 + \frac{Q_B}{Q_A} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad (\text{Eq.27})$$

Je höher die Temperatur T_2 ist, desto näher kommt der Wirkungsgrad zu 1. Im Prinzip kann der Wirkungsgrad auch als Verhältnis von Nutzleistung zu investierter Leistung formuliert werden. Wird thermische in mechanische Energie umgewandelt, so ist der Wirkungsgrad gegeben durch:

$$\eta = \left| \frac{P_{mech}}{P_{therm}} \right| = \left| \frac{P_{mech}}{T_2 \cdot I_S} \right| = \left| \frac{(T_2 - T_1) \cdot I_S}{T_2 \cdot I_S} \right|$$

Es resultiert somit wieder der Ausdruck Eq.27. Dies entspricht dem best möglichen Wirkungsgrad, welcher bei Wärmekraftmaschinen erreicht werden kann.

Aufgaben

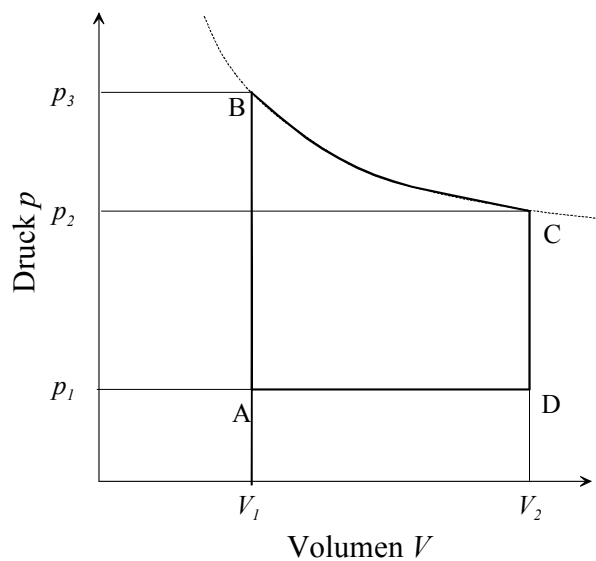
A1. In einem Zylinder mit einem Volumen von $3.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$ werde Luft bei 1013.25 hPa um $200 \text{ }^\circ\text{C}$ erwärmt, wobei sich ein Kolben aus dem Zylinder hinaus bewegt und der Druck konstant bleiben soll.

Welche Arbeit kann der Kolben dabei verrichten?

A2. In eine Dampfturbine (Wärme­kraftmaschine) wird Dampf mit einer Temperatur von 350°C eingelassen. Die Austrittstemperatur beträgt 150°C .

- Wie gross ist der Wirkungsgrad bestenfalls?
- Wie gross müsste die Eintrittstemperatur des Dampfes sein, damit der Wirkungsgrad 90% beträgt?

A3. Betrachten Sie folgendes Diagramm:



- Was für ein Prozess erfolgt zwischen Punkt A und B?
- Welcher Abschnitt könnte eine isotherme Expansion darstellen (Begründung)?
- Wie gross ist die Arbeit zwischen Punkt D und A? Wird sie vom System geleistet oder ins System investiert?
- Wie lässt sich die vom System insgesamt geleistete Arbeit berechnen?

Lösungen

L1.

$$\begin{aligned}
 W &= \int p \cdot dV = p \int_{T_1}^{T_2} \frac{nR}{p} \cdot dT = nR \int_{T_1}^{T_2} dT = nR(T_2 - T_1) \\
 &= \frac{m}{M} \cdot R \cdot \Delta T = \frac{\rho \cdot V}{M} \cdot R \cdot \Delta T \\
 &= \frac{(1.293 \text{ kg/m}^3) \cdot (3.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3)}{0.029 \text{ kg/mol}} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 200 \text{ K} = \underline{25.95 \text{ J}}
 \end{aligned}$$

L2.

$$(a) \quad \eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{423 \text{ K}}{623 \text{ K}} = \underline{0.321} \rightarrow 32\%$$

$$(b) \quad T_1 = -\frac{T_2}{\eta - 1} = \underline{4230 \text{ K}}$$

L3.

(a) isochores Heizen

$$(b) \text{ BC, falls Krümmung einer Isothermen entspricht: } \frac{p_3}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

$$(c) \quad W = p_1 \cdot \Delta V = p_1 \cdot (V_2 - V_1), \text{ wird investiert}$$

(d) Vom Kreisprozess eingeschlossene Fläche berechnet sich durch:

$$\begin{aligned}
 W &= \int p(V) \cdot dV - p_1 \cdot (V_2 - V_1) \\
 &= \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV - p_1 (V_2 - V_1) = nRT \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) - p_1 \cdot (V_2 - V_1)
 \end{aligned}$$

730 Chemische Reaktionen

731 Reaktionsenergie und Enthalpie

Theorie

Wärme und Energie spielen nicht nur bei Wärmekraftmaschinen eine entscheidende Rolle. Bei chemischen Reaktionen wird ebenfalls Energie aufgenommen oder abgegeben.

Jeder Stoff beinhaltet eine bestimmte Menge an innerer Energie. Die Differenz der inneren Energien von Edukten (Edukten) und Produkten einer chemischen Reaktion ist die Reaktionsenergie ΔU . Wird die Reaktion bei konstantem Druck p durchgeführt (also in einem offenen Gefäß) und tritt bei der Reaktion eine Volumenänderung ΔV ein (z.B. Bildung eines Gases), dann wird die Volumenarbeit $W = p \cdot \Delta V$ geleistet. Soll nun eine chemische Reaktion bezüglich der beobachtbaren Wärme untersucht werden, kann die Reaktionsenthalpie³ $\Delta H = \Delta U + p \cdot \Delta V$ definiert werden. Sie gibt den als Wärme beobachtbaren Teil der Reaktionsenergie an. Dabei ist zu beachten, dass quasi ein Teil der Energie als Hubarbeit investiert wird: $\Delta W = U_2 + p \cdot \Delta V - U_1 = \Delta H$. Wird Wärme freigesetzt (exotherme Reaktion) so ist ΔH negativ. Bei einer endothermen Reaktion wird Wärme benötigt, ΔH ist dann positiv. Die ΔH -Werte können durch kalorimetrische Messungen bestimmt werden.

Bei chemischen Reaktionen gilt natürlich auch Energie-Erhaltung. Somit ist der ΔH -Wert unabhängig, ob die Reaktion in einem oder mehreren Schritten abläuft (Satz von Hess). Deshalb kann mit Hilfe von sog. Standardenthalpien ΔH_f^0 die Reaktionsenthalpie einer Reaktion berechnet werden:

$$\Delta H = \sum \Delta H_f^0(\text{Produkte}) - \sum \Delta H_f^0(\text{Reaktanden})$$

Mit den mittleren Bindungsenergien kann auch der ΔH -Wert abgeschätzt werden. Die Reaktionsenthalpie ergibt sich dann aus der Summe aller ΔH -Werte für das Aufbrechen der Bindungen minus die Summe der ΔH -Werte für die Energie, welche beim Zusammenfügen der Bindungen in den Reaktionsprodukten frei wird. Es gilt jedoch zu beachten, dass die Bindungsenergie einer einzelnen Bindung stark von der Struktur des Moleküls abhängig ist. Tab.2 gibt nur mittlere Werte für die Bindungsenergie an.

Wärme und chemische Reaktionen

Reaktionsenthalpie

Satz von Hess

Bindungsenergien

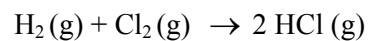
³ Reaktionswärme; Griechisch En = darin, thalpos = Wärme

Tab. 2. Mittlere Bindungsenergien (Dissoziationsenergie zweiatomiger Moleküle)

Bindung	Bindungsenergie kJ / mol	Bindung	Bindungsenergie kJ / mol	Bindung	Bindungsenergie kJ / mol
Br-Br	193	C-O	335	I-I	151
C-C	347	Cl-Cl	243	N-H	389
C=C	619	F-F	155	N-N	159
C-H	414	H-Br	364	O-H	463
C-F	485	H-Cl	431	O-O	138
C-N	293	H-H	435	O ₂	494

Aufgaben

A1. Schätzen Sie die Reaktionsenthalpie für die folgende chemische Reaktion ab:



Ist die Reaktion endotherm oder exotherm?

A2. Beim Verbrennen von O₂ und H₂ (Knallgasreaktion) entsteht H₂O. Die Reaktion verläuft explosionsartig beim korrekten stöchiometrischen Verhältnis der Reaktanden. Um wieviel würde sich ein mol H₂O nach dieser Reaktion gegenüber den Edukten (bei 20°C) erwärmen?

A3. Aus Graphit (Fig.1) und Wasserstoffgas soll Methan (CH₄) hergestellt werden. Die Reaktionsenthalpie beträgt -74.9 kJ / mol. Schätzen Sie anhand der Bindungsenergien die Reaktionsenthalpie ab: Was fällt auf?

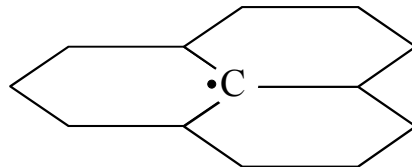
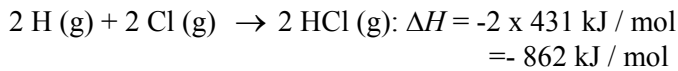
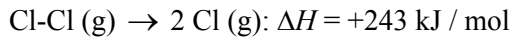
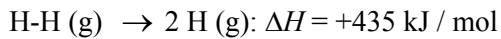


Fig.1. Struktur von Graphit

Lösungen

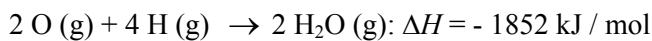
L1.



$$\Delta H = -184 \text{ kJ / mol}$$

Die Reaktion ist exotherm

L2.



$$\Delta H = -488 \text{ kJ / mol}$$

molare Wärmekapazität von Wasserdampf bei 20°C:

$$C_p = 33.6 \text{ J / mol} \cdot \text{K}$$

$$\Delta T = \frac{1}{2} \frac{\Delta Q}{n \cdot C_p} = 14523 \text{ K}$$

Dieser Wert ist natürlich nicht realistisch (es gilt nicht $dU = \delta Q$), es kommt zu einer fulminanten Explosion und damit zu einer schlagartigen Expansion des Gases ($W = p \cdot dV$) und das System ist nicht isoliert.

L3. Aus den Bindungsenergien ergibt ergibt sich:

$$3 \times \text{C-C: } 3 \cdot 347 \text{ kJ}$$

$$2 \times \text{H-H: } 2 \cdot 435 \text{ kJ}$$

$$-4 \times \text{C-H: } -4 \cdot 414 \text{ kJ}$$

$$\Delta H = 255 \text{ kJ / mol anstelle von } -74.9 \text{ kJ / mol}$$

Die Differenz erklärt sich, weil die Bindungsenergien für zwei-atomige Moleküle gelten und bestenfalls für gasförmige Stoffe einigermaßen gute Werte ergeben. Die Differenz ist auf das Herauslösen der C-Atome aus dem Kristallgitter zurück zu führen.

732 Chemische Reaktionskinetik

Theorie

Die Reaktionsgleichung gibt Auskunft über die stöchiometrische Beziehung zwischen Reaktanden und Produkten einer chemischen Reaktion. Sie gibt aber nicht Auskunft darüber, wie die Reaktion abläuft, also wie der zeitliche Verlauf ist oder ob sie über mehrere Stufen abläuft. Die chemische Reaktionskinetik beschäftigt sich mit diesen Aspekten. Zur Beschreibung chemischer Systeme kommen u.a. die gleichen mathematischen Konzepte zur Anwendung, wie sie bereits in den Kapiteln 100-700 besprochen wurden.

Zu Beginn soll folgende Reaktion betrachtet werden: $A + B \rightarrow C$. Die Konzentration des Stoffes A sei eine zeitabhängige Funktion $[A] = c_A(t)$ und analog dazu $[B] = c_B(t)$. Die Reaktionsgeschwindigkeit ist nun definiert durch:

$$\dot{c} = \frac{dc}{dt} \quad (\text{Eq.1})$$

Es stellt sich nun die Frage, von was die Reaktionsgeschwindigkeit abhängt. In einem einfachen Modell kann folgende Vorstellung herangezogen werden. Moleküle (A und B) können nur reagieren, wenn sie sich treffen, also miteinander kollidieren. Die Zahl der Kollisionen ist gemäss der kinetischen Gastheorie in einem Gas sehr gross: Bei Raumtemperatur und einem Druck von 1013 hPa erfolgen in einem Liter Gasvolumen ca. 10^{31} Kollisionen pro Sekunde. Würde jede Kollision jedoch zu einer Reaktion führen, wäre die Reaktion innerhalb einer Sekunde vollständig abgelaufen. Die meisten Reaktionen laufen aber wesentlich langsamer ab. Dies legt den Schluss nahe, dass nur ein geringer Bruchteil der Kollisionen zu einer Reaktion führen (effektive Kollisionen). Gründe für nicht-effektive Kollisionen können ungünstige Orientierung der kollidierenden Moleküle oder zu geringe Geschwindigkeit (kinetisch Energie) sein, um einen Bruch der chemischen Bindung zu bewirken. Dieses Konzept wird durch die Beobachtung unterstützt, dass bei einer Zunahme der Reaktionsgeschwindigkeit bei einer Temperaturerhöhung von 10°C sich in etwa verdoppelt. Bei einer Temperaturerhöhung von 25°C auf 35°C erhöht die Zahl der Kollisionen in einem idealen Gas um ca. 2%. Somit ist nicht die Gesamtzahl der Kollisionen massgebend, sondern die Zahl der effektiven Kollisionen steigt massiv an. Bei Betrachtung der Geschwindigkeitsverteilung der Moleküle (Fig.1) wird klar, dass bei geringer Temperaturerhöhung der Anteil an Molekülen oberhalb eines bestimmten Energiewertes massiv ansteigen

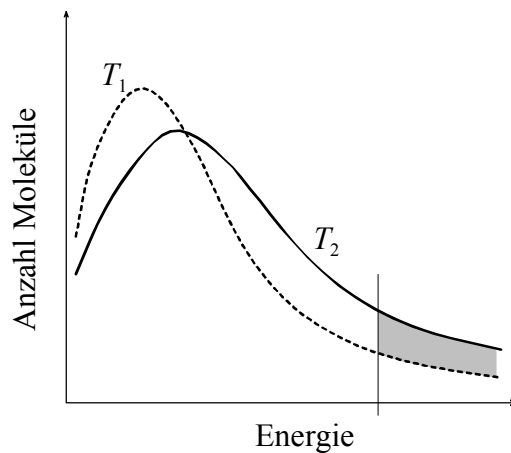
*Zeitliche
Entwicklung
von
chemischen
Reaktionen*

*Reaktions-
Geschwin-
digkeit*

*Kollisions-
Theorie*

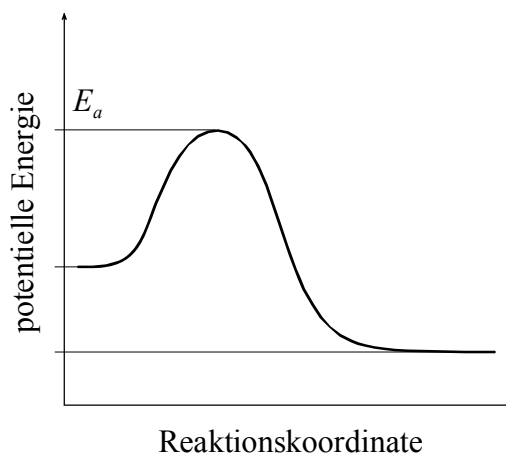
*Temperatur-
Abhängigkeit*

kann. Um eine Reaktion auszulösen, muss ein bestimmter Schwellenwert überschritten werden (Aktivierungsenergie, Fig.2)



*Energie-
Verteilung in
Gasen*

Fig.1. Schematische Darstellung der Verteilung der kinetischen Energie von Molekülen in einem idealen Gas bei zwei verschiedenen Temperaturen $T_1 < T_2$.



*Aktivierungs-
Energie*

Fig.2. Energiediagramm für eine einstufige chemische Reaktion mit der Aktivierungsenergie E_a .

Grob zusammengefasst lässt sich sagen, die ist Reaktionsgeschwindigkeit abhängig von der Anzahl vorhandener Moleküle, der Anzahl Kollisionen und der Temperatur. Dies gilt im Prinzip auch für Reaktionen in wässrigen Lösungen. Allerdings beeinflusst das Lösungsmittel die Reaktion und viele chemische Reaktionen laufen mehrstufig ab. Das hier vorgestellte Modell greift somit für viele Fälle zu kurz. Gerade aber Abweichungen von solchen

Modellen verraten unter Umständen einiges über die tatsächlich wirkenden Reaktionsmechanismen. Im Folgenden sollen ein paar exemplarische Reaktionsmuster näher betrachtet werden.

Ein Beispiel der Reaktionskinetik 0. Ordnung ist der Abbau einer Substanz $A \rightarrow B$. Würde dies mit konstanter Rate geschehen, so würde gelten:

*Kinetik
0.Ordnung*

$$\frac{dc_A}{dt} = -k \quad (\text{Eq.2})$$

Durch Integration von Eq.2 resultiert: $c_A(t) = -kt + c_A(0)$. Die Konzentrationsänderung ist linear. Sobald jedoch keine Substanz A mehr vorhanden ist, müsste die Reaktionsgeschwindigkeit null werden. Bei der Reaktionskinetik 1.Ordnung wird deshalb auch berücksichtigt, dass die Reaktionsgeschwindigkeit auch proportional zu $[A] = c_A(t)$ ist:

*Kinetik
1.Ordnung*

$$\frac{dc_A}{dt} = -k \cdot c_A \quad (\text{Eq.3})$$

Separation und Integration führen zur wohlbekanntem Lösung $c_A(t) = c_0 \cdot e^{-kt}$.

Für Reaktionen vom Typus $A + B \rightarrow C$ muss berücksichtigt werden, dass sich die Moleküle begegnen müssen, um mit einander zu reagieren (Kollisionsmodell). Somit ist die Reaktionsgeschwindigkeit von beiden Konzentrationen abhängig:

$$\frac{dc_A}{dt} = -k \cdot c_A c_B \quad (\text{Eq.4})$$

*Kinetik
2.Ordnung*

Für den Spezialfall $A + A \rightarrow C$ ergibt sich aus Eq.4

$$\frac{dc_A}{dt} = -k \cdot c_A^2 \quad (\text{Eq.5})$$

Dies entspricht einer Reaktionskinetik 2.Ordnung. Die Lösung lässt sich durch Integration und Separation leicht bestimmen:

$$\int \frac{dc_A}{c_A^2} = -k \cdot \int dt = -kt + c = -\frac{1}{c_A}$$

und somit

$$c_A(t) = \left[kt + \frac{1}{c_A(0)} \right]^{-1} \quad (\text{Eq.6})$$

Die Reaktionskinetik höherer Ordnungen folgt im Prinzip der gleichen Logik. Für die Reaktion des Typs $A + 2B \rightarrow$ Produkte lässt sich das folgende Geschwindigkeitsgesetz aufstellen:

*Kinetik
höherer
Ordnung*

$$\frac{dc_A}{dt} = -k \cdot c_A c_B^2 \quad (\text{Eq.7})$$

Ob ein solches Gesetz wirklich zutrifft, hängt von den tatsächlich wirkenden Reaktionsmechanismen ab und muss im konkreten Fall experimentell geprüft werden.

Die Temperaturabhängigkeit der Geschwindigkeitskonstante k kann näherungsweise durch die Arrhenius-Gleichung bestimmt werden:

*Arrhenius-
Gleichung*

$$k = A \cdot e^{-E_a/(RT)} \quad (\text{Eq.8})$$

Dabei ist A eine für die betreffende Reaktion charakteristische Konstante und E_a die Aktivierungsenergie.

Ein Spezialfall ist die Katalyse. Dabei wird ein Substrat mittels Katalysator abgebaut, ohne dass dieser verbraucht wird. Typischerweise folgen solche Reaktionen einer Michaelis-Menten-Kinetik.

*Michaelis-
Menten-
Kinetik*

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{v_m \cdot c}{(k_m + c) \cdot V_d} \quad (\text{Eq.9})$$

Dabei ist v_m die maximal mögliche Konzentrationsänderung (max. Änderungsgeschwindigkeit), welche auftritt, wenn alle am Transportvorgang beteiligten Trägermoleküle ausgenutzt sind. Die Konstante k_m wird Michaelis-Konstante genannt und repräsentiert die Konzentration, welche beim halben Wert der maximalen Änderungsgeschwindigkeit vorliegt.

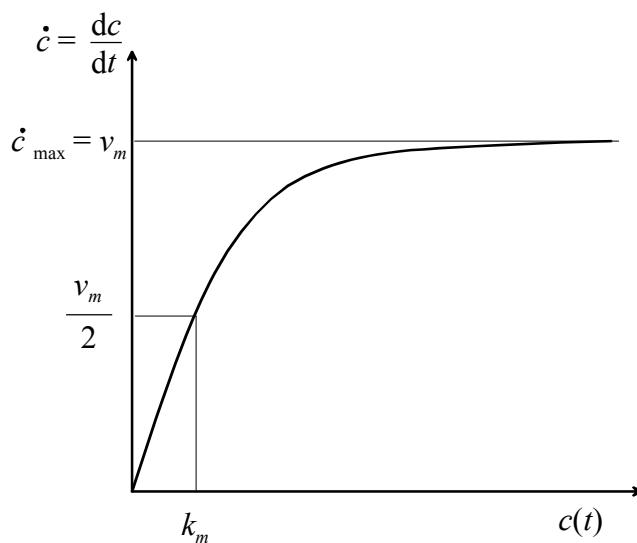
Das Verhalten des Systems bei einer Michaelis-Menten-Kinetik lässt sich für zwei Grenzfälle mathematisch gut untersuchen. Der erste Grenzfall ergibt sich, wenn sehr kleine Konzentrationen betrachtet werden:

$$\lim_{c \rightarrow 0} \left(\frac{v_m \cdot c}{(k_m + c) \cdot V_d} \right) = \frac{v_m}{k_m \cdot V_d} \cdot c \quad (\text{Eq.10})$$

Die rechte Seite von Eq.10 hängt nun linear von der Konzentration c ab. Damit liegt eine Kinetik erster Ordnung vor. Der zweite Grenzfall ergibt sich beim Vorliegen sehr hoher Konzentrationen:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \left(\frac{v_m \cdot c}{(k_m + c) \cdot V_d} \right) = \frac{v_m}{V_d} \quad (\text{Eq.11})$$

Somit nimmt Eq.11 die Form $\dot{c} = -k$ an, es liegt also eine Kinetik nullter Ordnung vor.



*Phasen-
diagramm*

Fig.3. Schematische Darstellung eines Phasendiagramms für ein Michaelis-Menten-System: Bei der Konzentration k_m wird für ein Verteilungsvolumen $V_d = 1 \text{ m}^3$ der halbe Wert der maximalen Geschwindigkeit v_m erreicht.

Aufgaben

A1. Welche Reaktionskinetik bzw. welches Geschwindigkeitsgesetz ist für die folgenden chemischen Reaktionen zu erwarten?

- $2 \text{ N}_2\text{O (g)} \xrightarrow{(\text{Au})} 2 \text{ N}_2 \text{ (g)} + \text{O}_2 \text{ (g)}$
- $2 \text{ NO}_2 \text{ (g)} \longrightarrow 2 \text{ NO (g)} + \text{O}_2$
- $2 \text{ HI (g)} \longrightarrow \text{H}_2 \text{ (g)} + \text{I}_2 \text{ (g)}$
- $\text{C}_2\text{H}_6 \longrightarrow 2 \text{ CH}_3$

A2. Für die Reaktion $2 \text{NOCl (g)} \longrightarrow 2 \text{NO (g)} + \text{Cl}_2 \text{(g)}$ wurde bei $T = 300 \text{ K}$ eine Geschwindigkeitskonstante von $2.6 \cdot 10^{-8} \text{ L}/(\text{mol} \cdot \text{s})$ und bei $T = 400 \text{ K}$ eine Geschwindigkeitskonstante von $4.9 \cdot 10^{-4} \text{ L}/(\text{mol} \cdot \text{s})$ gemessen.

- a) Wie gross ist die Aktivierungsenergie?
- b) Wie gross ist k bei 500 K ?

A3. In einem Gefäss mit einem Liter Wasser als Lösungsmittel laufe die folgende Zerfallsreaktion ab: $\text{A} \longrightarrow \text{B}$. Die Aktivierungsenergie für diese Reaktion betrage 50 kJ / mol und die Arrheniuskonstante sei 10^8 L/s . Die Reaktionsenthalpie betrage -1600 kJ / mol . Die Anfangskonzentration sei 0.1 M .

Beantworten Sie mittels Computersimulation folgende Frage:

- a) Welchen Reaktionsverlauf (Änderung der Menge der Substanz A und Temperaturverlauf) stellt sich ein, wenn das Reaktionsgefäss perfekt wärmeisoliert ist?
- b) Was ändert sich gegenüber Teilaufgabe (a), wenn das Gefäss nicht gut wärmeisoliert ist? Welcher Grenzfall ist bei guter Kühlung zu erwarten?

A4. Bei welcher Temperaturdifferenz $\Delta T = T_2 - T_1$ verdoppelt sich die Reaktionskonstante k im Fall einer Kinetik 1. Ordnung? Welchen Wert müsste die Aktivierungsenergie haben, damit bei Zimmertemperatur (293 K) eine Verdoppelung bei $\Delta T = 10 \text{ K}$ eintreten würde?

Lösungen

L1.

(a) katalytische Reaktion, Kinetik 0.Ordnung, solange Konzentration

genügend hoch ist: $\frac{dc(N_2O)}{dt} = -k$

(b) Kinetik 2.Ordnung: $\frac{dc(NO_2)}{dt} = -k \cdot c^2(NO_2)$

(c) Kinetik 2.Ordnung: $\frac{dc(HI)}{dt} = -k \cdot c^2(HI)$

(d) Kinetik 1.Ordnung: $\frac{dc(C_2H_6)}{dt} = -k \cdot c(C_2H_6)$

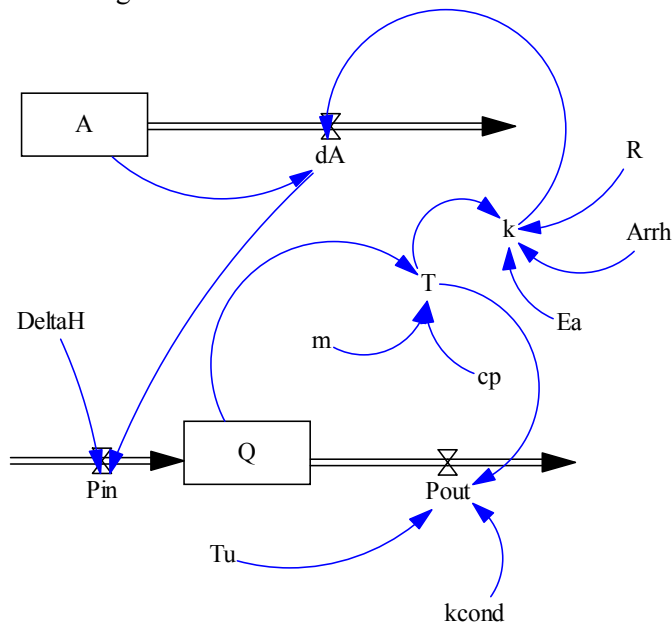
L2.

$$(a) \ln k_2 - \ln k_1 = \frac{E_a}{R} \cdot \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)$$

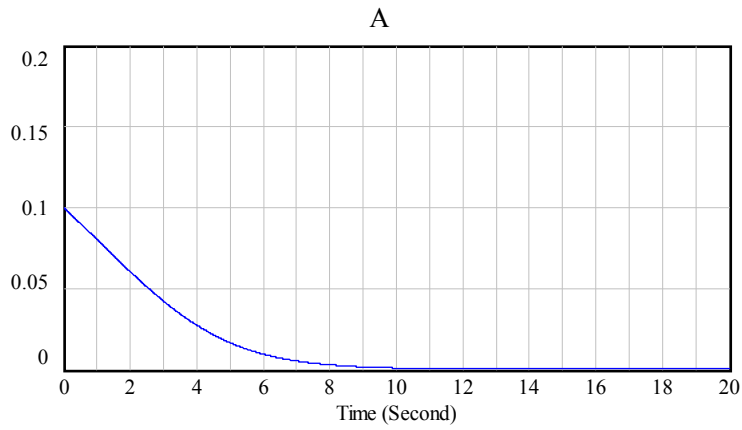
$$\text{also } E_a = R \cdot \frac{T_1 \cdot T_2}{T_2 - T_1} \cdot \ln \left(\frac{k_2}{k_1} \right) = 98.2 \text{ kJ / mol}$$

(b) $k(500 \text{ K}) = 0.19 \text{ L}/(\text{mol} \cdot \text{s})$

L3. Flussdiagramm für Vensim

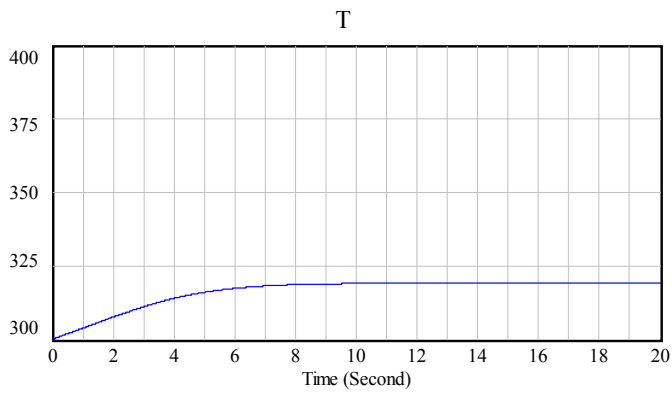


L3a) Verlauf der Menge von A (in mol)



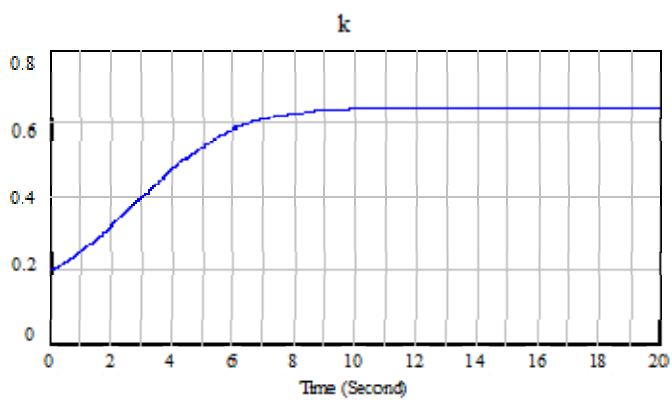
A : Current

Temperaturentwicklung



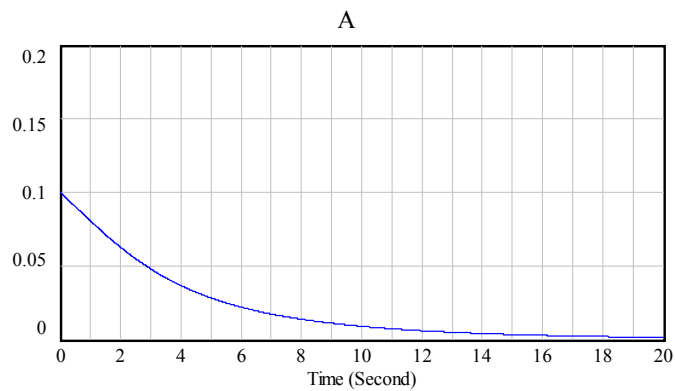
T : Current

Änderung der Geschwindigkeitskonstante



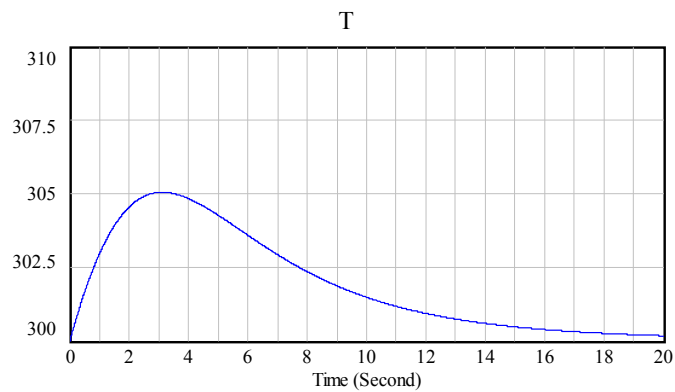
k : Current

L3b) Verlauf der Menge von A (in mol) für $k_{\text{cond}} = 2000 \text{ W/K}$: Die Reaktion läuft mit Kühlung langsamer ab und der Verlauf ist mehr exponentiell.



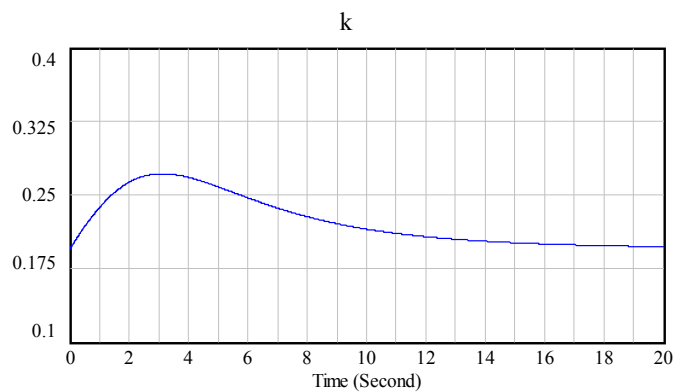
A : Current

Temperaturentwicklung



T : Current

Änderung der Geschwindigkeitskonstante



k : Current

L4.

Verdoppelung von k :

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{2k_1}{k_1} = 2 = \frac{A \cdot e^{-\frac{E_a}{RT_2}}}{A \cdot e^{-\frac{E_a}{RT_1}}} = A \cdot e^{-\frac{E_a}{RT_2} + \frac{E_a}{RT_1}}$$

$$\ln 2 = \frac{E_a}{R} \cdot \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = \frac{E_a}{R} \cdot \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_1 + \Delta T} \right) = \frac{E_a}{R} \cdot \left(\frac{\Delta T}{T_1 \cdot (T_1 + \Delta T)} \right)$$

$$\frac{RT_1 \cdot \ln 2}{E_a} = \frac{\Delta T}{T_1 + \Delta T} \rightarrow \frac{E_a}{RT_1 \cdot \ln 2} = \frac{T_1 + \Delta T}{\Delta T} = \frac{T_1}{\Delta T} + 1$$

$$\frac{E_a}{RT_1 \cdot \ln 2} - 1 = \frac{T_1}{\Delta T} \rightarrow \Delta T = \frac{T_1}{\frac{E_a}{RT_1 \cdot \ln 2} - 1}$$

Aktivierungsenergie:

$$E_a = RT_1 \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{T_1}{\Delta T} + 1 \right) = 51.14 \text{ kJ}$$

740 Wärmetransport und Transportphänomene

741 Wärmeleitung

Theorie

Bereits im Unterkapitel 720 wurde der Wärmetransport zwischen Wärmespeicher oder aus Wärmespeicher hinaus betrachtet. Der Transport von thermischer Energie kann durch Konvektion (Energie wird mit Masse transportiert), Wärmeleitung oder Wärmestrahlung geschehen. In diesem Abschnitt soll nun der Wärmetransport durch Wärmeleitung eingehender betrachtet werden. Die dabei geltenden Gesetze lassen sich auf verschiedene Diffusionsphänomene übertragen, weshalb in diesem Unterkapitel auch das generelle Thema Transportphänomene angeschnitten wird.

Als erstes soll der Wärmeleitung in einem Stab (Längsachse ist x -Richtung) betrachtet werden. Der Stab habe die Querschnittsfläche A und sei an den Enden thermisch leitend mit Wärmespeichern mit der Temperatur T_1 bzw. T_2 verbunden. Ansonsten sei der Stab thermisch isoliert. Wie schnell und somit wie viel Wärme pro Zeit fließt, hängt sowohl von der Temperaturdifferenz ΔT als auch von der betrachteten Länge Δx ab. Somit ist die Wärmestromdichte $j = dQ/(dA \cdot dt)$ vom Temperaturgradienten abhängig:

$$j = -k \cdot \frac{dT}{dx} \quad (\text{Eq.1})$$

Dies ist das sogenannte Fouriersche Gesetz (bzw. das Ficksche Gesetz für eine Dimension). Im stationären Fall kann angenommen werden, dass die Wärmestromdichte konstant ist. In diesem Fall lässt sich das Temperaturprofil längs des Stabes durch Integration ermitteln:

$$\int_{T_1}^T dT = -\frac{j}{k} \cdot \int dx = -\frac{j}{k} \cdot x = T - T_1$$

und somit:

$$T(x) = -\frac{j}{k} \cdot x + T_1 \quad (\text{Eq.2})$$

Der Temperaturverlauf längs des Stabes ist also im stationären Fall linear.

*Arten des
Wärme-
transportes*

*Wärme-
leitung in
Stab*

*Fouriersches
Gesetz*

*stationärer
Fall*

Interessanter ist der nicht-stationäre Wärmetransport in alle Raumrichtungen. Dazu kann ein infinitesimal kleiner Würfel mit dem Volumen $V = dx \cdot dy \cdot dz$ betrachtet werden. Die Wärmestromdichte in x -Richtung sei $j_x = dQ/(dt \cdot dy \cdot dz)$. Für die x -Richtung kann nun eine Bilanzierung vorgenommen werden: Die Änderung der Wärmemenge im Würfel verursacht durch den Transport in x -Richtung ist gegeben durch die den Wärmestrom $j_x(x) \cdot dy \cdot dz$, welcher an der Stelle x in den Würfel hinein fließt minus den Wärmestrom $j_x(x + dx) \cdot dy \cdot dz$, welcher an der Stelle $x + dx$ wieder aus dem Würfel austritt. Da der Würfel infinitesimal klein ist gilt:

$$j_x(x + dx) - j_x(x) = \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} \right) \cdot dx$$

Somit ist die durch den Wärmefluss in x -Richtung verursachte Änderung der Wärmemenge im Volumen $dx \cdot dy \cdot dz$ proportional zum Gradienten der Stromdichte. Beschreibt der Gradient eine Abnahme der Stromdichte auf der Länge dx , so bedeutet dies, dass Wärme seitwärts an die y - und z -Richtung abgegeben wird. Die Bilanz lässt sich nun für alle drei Raumrichtungen aufstellen, wenn die Stromdichten mit den entsprechenden Würfel Flächen multipliziert werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} &= - \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dy \cdot dz - \left(\frac{\partial j_y}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dx \cdot dz - \left(\frac{\partial j_z}{\partial z} \cdot dz \right) \cdot dy \cdot dx \\ &= - \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \end{aligned}$$

Da diese Bilanz für einen infinitesimal kleinen Würfel gilt, wird sinnvollerweise die Wärmedichte $u = Q/V = Q/(dx \cdot dy \cdot dz)$ eingeführt. Für diese Wärmedichte resultiert dann:

$$\frac{du}{dt} = - \frac{\partial j_x}{\partial x} - \frac{\partial j_y}{\partial y} - \frac{\partial j_z}{\partial z} = -\nabla \cdot \vec{j} = -\text{div}(\vec{j}) \quad (\text{Eq.3})$$

Die örtliche Mengenbilanz ist somit durch die Divergenz des Stromdichtefeldes $\vec{j}(x, y, z) = (j_x(x, y, z), j_y(x, y, z), j_z(x, y, z))$ gegeben. Generell gibt die Divergenz an, ob ein Vektorfeld zusammenläuft (Senke) oder auseinander läuft (Quelle). Ist das Vektorfeld \vec{j} quellen- und senkenfrei, so ist $\text{div}(\vec{j}) = 0$.

*Wärme-
leitung in
drei
Dimensionen*

*Wärmestrom-
Dichte*

Wärmedichte

Divergenz

In der Gleichung Eq.3 ist nun die mathematische Verbindung zwischen der zeitlichen Änderung der Wärmedichte $u(x, y, z, t)$ und dem Stromdichtefeld $\vec{j}(x, y, z, t)$ gegeben. Wärme- und Stromdichte sind aber auch physikalisch über das Ficksche Gesetz gekoppelt. Das Ficksche Gesetz für den dreidimensionalen Fall ist gegeben durch:

*Ficksches
Gesetz*

$$\vec{j} = -k \cdot \nabla u = -k \cdot \text{grad}(u) \quad (\text{Eq.4})$$

und somit $j_x = -k \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$; $j_y = -k \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$ und $j_z = -k \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$.

Durch Einsetzen von Eq.4 in Eq.3 resultiert die Wärmeleitungs-Gleichung:

*Wärme-
leitungs-
Gleichung*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (\text{Eq.5})$$

Anstelle der Wärmedichte kann auch die Temperatur genommen werden: Mit

$$u = \frac{dQ}{dx \cdot dy \cdot dz} = \frac{dm \cdot c \cdot T}{dV} = \rho c T$$

resultiert:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{k}{\rho c} \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (\text{Eq.6})$$

Die Gleichungen gelten auch für Diffusionsprozesse (u = Konzentration eines Stoffes), weshalb man von der sogenannten Diffusionsgleichung spricht.

*Diffusions-
Gleichung*

Aufgaben

A1. In einem Triebwerk werde eine Achse (Stab mit einer Länge von 20 cm, Querschnittsfläche 1 cm^2) verwendet. Die Achse werde mittels Kugellager in der Mitte gelagert. Die Temperatur darf dort 220°C nicht überschreiten. Auf der kalten Seite kann eine konstante Temperatur von 20°C angenommen werden (Umgebungstemperatur).

- a) Wie warm darf die Welle am heissen Ende maximal werden, wenn angenommen wird, dass die Welle ausser an den Enden thermisch isoliert sei.
- b) Welcher Wärmestrom durch die Achse ist zu erwarten?

A2. Ein dünner Stab mit einer Länge von 0.5 m sei an den Enden mit je einem Wärmespeicher thermisch leitend verbunden. Die Mantelfläche des zylindrischen Stabs sei thermisch isoliert. Die Temperatur des Warmen Speicher sei 10°C , die des kalten Speichers 0°C . Der Temperaturverlauf in Längsrichtung sei zur Zeit $t = 0$ s gegeben durch:

$$T(x,0) = 10^\circ\text{C} \cdot e^{-50\text{m}^{-1} \cdot x}$$

- a) Zeigen Sie, dass $T(x,t) = T_0 \cdot e^{\pm\lambda_1 x + \lambda_2 t}$ eine mögliche Lösung von Eq.6 für das vorliegende Problem ist. Bestimmen Sie λ_1 und λ_2 .
- b) Der Temperaturverlauf in Abhängigkeit der Zeit soll durch eine Computersimulation bestimmt werden. Erstellen Sie ein Konzept, wie Eq.6 numerisch gelöst werden kann und implementieren Sie dieses in ein Programm (Tabellenkalkulation oder frei wählbare Programmiersprache). Testen Sie ihre Simulation: Entsprechen die Resultate ihren physikalischen Vorstellungen?

A3. Berechnen Sie den Temperaturverlauf für folgende Fälle:

- a) Die Wärmequelle (Kugel mit Radius r_1) sitzt im Zentrum einer Kugel mit dem Radius r_2 : Gesucht ist der radiale Temperaturverlauf $T(r)$.
- b) Zwischen der Grundfläche und der Spitze eines Kegelstumpfes herrsche eine Temperaturdifferenz: Gesucht ist das Temperaturprofil $T(x)$ entlang der Kegelachse zwischen x und $x+l$. Die Spitze des Kegels sei bei $x = 0$.

L1. (a) Es gilt gemäss Eq.2

$$T(x) = T_1 - \frac{j}{k} \cdot x$$

also

$$T(0.2m) = 20^\circ C = T_1 - \frac{j}{k} \cdot 0.2m$$

$$T(0.1m) = 220^\circ C = T_1 - \frac{j}{k} \cdot 0.1m$$

$$\rightarrow T_1 = 420^\circ C$$

$$\rightarrow \frac{j}{k} = \frac{(T_1 - T(x))}{x} = 2000 \text{ K/m};$$

$$(b) \text{ Wärmestrom } \frac{dQ}{dt} = j \cdot A = \left(\frac{j}{k}\right) \cdot Ak = \underline{0.2 \text{ Km} \cdot k}$$

Der Temperaturgradient ist hier durch den stationären Fall bestimmt, k bestimmt den Wärmestrom

L2.

$$(a) \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_2 \cdot T_0 \cdot e^{\pm \lambda_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot t}; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \lambda_1^2 \cdot T_0 \cdot e^{\pm \lambda_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot t}$$

$$\text{also } \lambda_2 \cdot e^{\pm \lambda_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot t} = \lambda \cdot \lambda_1^2 \cdot e^{\pm \lambda_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot t}$$

$$\text{das ist erfüllt für: } \lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1^2}$$

(b) Ausgangspunkt der Simulation ist die folgende Differenzen-gleichung:

$$\Delta T = \lambda \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) \cdot \Delta t$$

Die entsprechende Berechnungstabelle hat folgende Struktur:

x	$T(x, t_0)$	$T'(x, t_0)$	$T''(x, t_0) =$	$T(x, t_1) =$
x_0	$T(x_0, t_0)$	$\Delta T_0 / \Delta x$	$\Delta T'(x_0, t_0) / \Delta x$	$T(x_0, t_0) + \lambda \cdot T''(x_0, t_0) \cdot \Delta t$
x_1	$T(x_1, t_0)$	$\Delta T_1 / \Delta x$	$\Delta T'(x_1, t_1) / \Delta x$	$T(x_1, t_0) + \lambda \cdot T''(x_1, t_0) \cdot \Delta t$
x_2	$T(x_2, t_0)$	$\Delta T_2 / \Delta x$	$\Delta T'(x_2, t_2) / \Delta x$	$T(x_2, t_0) + \lambda \cdot T''(x_2, t_0) \cdot \Delta t$
...

In vertikaler Richtung liegt die Längsachse (x -Richtung), horizontal liegt die Zeitachse (t -Richtung). Die Tabelle geht nur bis zum ersten Zeitschritt $t_1 = t_0 + \Delta t$. Das Rechenschema ist für jeden Zeitschritt zu wiederholen. Da wegen den zweiten Ableitungen sehr schnell grosse numerische Fehler auftreten, ist ein entsprechend kleines Δt zu wählen. Damit werden die Berechnungstabellen schnell sehr gross. Deshalb lohnt sich die Programmierung mittels einer geeigneten Programmiersprache.

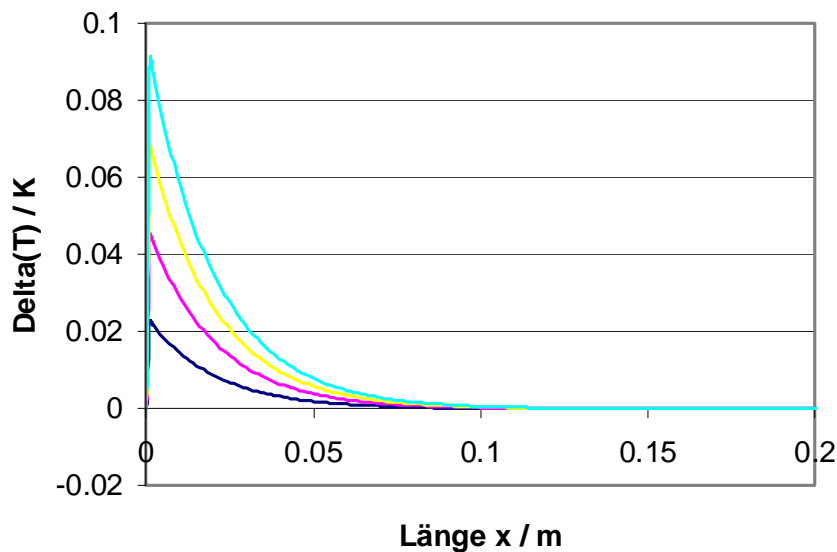
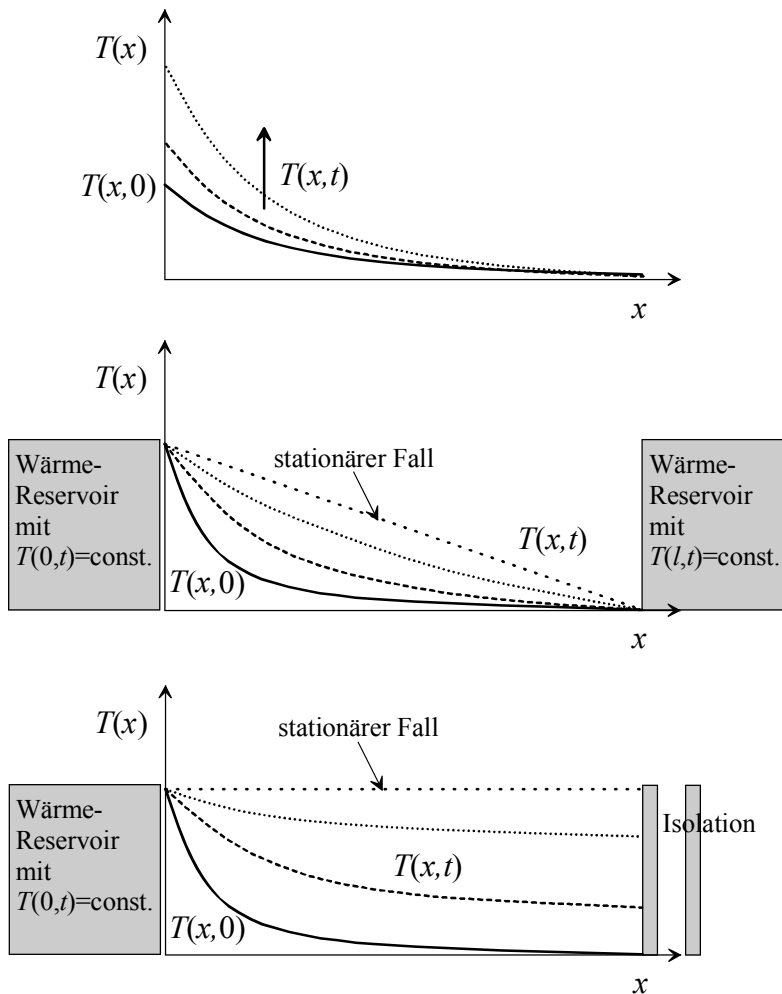


Fig.1. Resultate der Simulation mit $\Delta t = 10^{-3}$ s, $\lambda = 10^{-4}$ m²s⁻¹: gezeigt ist die Temperaturdifferenz $\Delta T(x) = T(x, t) - T(x, 0)$.

Wichtig ist hier, dass die in Fig.1 gezeigten Resultate Lösungen zu einem Anfangswertproblem darstellen. Je nachdem, wie nun die Randwerte vorgegeben werden, ergeben sich unterschiedliche Lösungen (Fig.2). Die Lösung $T(x,t) = T_0 \cdot e^{-\lambda_1 x + \lambda_2 t} = T_0 \cdot e^{-\lambda_1 x} \cdot e^{\lambda_2 t}$ ist Lösung der eindimensionalen Wärmeleitgleichung (s. Teilaufgabe a) und liefert für ein gegebenes x ein Anwachsen mit der Zeit t .

Anfangs- und Randwert-Probleme



Transiente und stationäre Lösungen

Fig.2 Verschiedene Lösungen (schematische Darstellung) der eindimensionalen Wärmeleitgleichung für verschiedene Randbedingungen (Randwerte): In den Fällen mit vorgegebenen Temperaturen oder Isolierungen an den Rändern nähern sich die transienten Lösungen dem stationären Fall an.

L3.

(a) Der radiale Wärmestrom ergibt sich aus der Wärmestromdichte:

$$J(r) = A(r) \cdot j(r) = -kA(r) \cdot \frac{dT}{dr}$$

Der gesamte Wärmestrom bleibt über den Radius gesehen konstant, wenn nicht zusätzliche Wärme produziert wird. Somit kann das Temperaturprofil durch Integration ermittelt werden:

$$\int dT = -\frac{J}{k} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{A(r)} \cdot dr = -\frac{J}{4\pi k} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} \cdot dr = -\frac{J}{4\pi k} \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

(b)

$$\begin{aligned} \int dT &= -\frac{J}{k} \cdot \int_x^{x+l} \frac{1}{A(x)} \cdot dx = -\frac{J}{\pi k} \int_x^{x+l} \frac{1}{r^2(x)} \cdot dx \\ &= -\frac{J}{\pi k} \int_x^{x+l} \frac{1}{\alpha^2 x^2} \cdot dx = -\frac{J}{\alpha^2 \pi k} \int_x^{x+l} \frac{1}{x^2} \cdot dx = -\frac{J}{\alpha^2 \pi k} \cdot \left(\frac{1}{x+l} - \frac{1}{x} \right) \\ &= T(x-l) - T(x) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \alpha = \frac{r(x+l) - r(x)}{l} = \text{const.}$$

742 Wärmestrahlung

Theorie

Je wärmer ein Körper, desto mehr Wärme strahlt dieser ab. Diese Wärmeabstrahlung erfolgt auch im Vakuum. Somit kann es sich nicht um Wärmeleitung handeln, da für diese Art von Wärmeübertragung ein Medium benötigt würde. Zudem lässt sich beobachten, dass mit zunehmender Temperatur auch sichtbares Licht emittiert wird. Licht und Wärmestrahlung (Infrarot-Strahlung) beruhen auf demselben Phänomen: Energietransport durch elektromagnetische Wellen (siehe Abschnitt 852). Elektromagnetische Wellen lassen sich mathematisch wie mechanische Wellen (Kap. 600) beschreiben. Es gilt dabei ebenfalls die fundamentale Beziehung zwischen Wellenlänge λ , der Frequenz ν und der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c : $c = \lambda \nu$.

Mit zunehmender Temperatur T eines Strahlers verschiebt sich die Wellenlänge λ_{\max} des Strahlungsmaximums Richtung kleinere Werte (Wien'sches Verschiebungsgesetz):

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T} \quad (\text{Eq.7})$$

Dabei ist $b = 2.897756 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ die sogenannte Wienkonstante.

Ebenfalls ändert sich die vom Strahler emittierte Leistung. Das von Josef STEFAN 1879 empirisch gefundene und 1884 von Ludwig BOLTZMANN theoretisch begründete Gesetz zeigt eine T^4 -Abhängigkeit der Strahlungsleistung:

$$P = \varepsilon \sigma A T^4 \quad (\text{Eq.8})$$

Dabei ist ε der Emissionsgrad oder die Emissionszahl, welche für den schwarzen Strahler (perfekt absorbierendes Material) gerade eins ist. Die Stephan-Boltzmann-Konstante $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$ vermittelt den Zusammenhang von abgestrahlter Leistung zu Fläche A und Temperatur T des Strahlers.

*Abstrahlung
von Wärme*

*Wien'sches
Verschiebungs-
Gesetz*

*Stefan-
Boltzmann-
Gesetz*

Tab.1. Emissionszahlen ausgewählter Materialien und Oberflächen

Material	Temperatur / °C	ε
Aluminium poliert	170	0.05
Stahl poliert	20	0.16
Kupfer oxidiert	20	0.78
Wasser	0...100	0.95

*Emissions-
Zahlen**Aufgaben*

A1. Die Lichtemission der Glühlampe beruht auf der Abstrahlung eines Wolfram-glühwendels (Glühfaden), welcher bei normalen Glühlampen eine Temperatur von 2900 - 3000 K und bei Niedervolthalogenglühlampen eine Temperatur von 3100 – 3400 K erreicht.

Programmieren Sie eine Computersimulation des zeitlichen Verlaufs der Temperatur eines Glühwendels beim Einschalten der Lampe. Verwenden Sie dabei für die von der Lampe abgestrahlte Leistung folgendes Gesetz:
 $P_{rad} = \varepsilon \sigma A \cdot T^4$ mit der Stefan-Boltzmann-Konstante
 $\sigma \approx 5.67 \cdot 10^{-8} W / (m^2 K)$. A ist die abstrahlende Oberfläche und ε ist die Emissionszahl (ist 1.0 für schwarze Körper).

Bei welcher Wellenlänge liegt das Strahlungsmaximum? Wie heiss müsste die Glühlampe werden, um ein Strahlungsmaximum im grünen Bereich (ca. 500nm) zu haben (wie die Sonne)?

Lösungen

L1. Die im Glühwendel gespeicherte Wärmemenge $Q = mcT$ ist linear von der Temperatur T , der Masse des Wendels m und von der Wärmekapazität c abhängig. Die Energiezufuhr erfolgt durch den elektrischen Strom I . Die zugeführte Leistung $P = UI = U^2/R$ ist von der elektrischen Spannung U und dem ohmschen Widerstand R abhängig. Der Widerstand $R = \rho l / A$ wiederum hängt von der Länge l und der Querschnittsfläche A des Glühwendels ab. Zudem spielt der spezifische elektrische Widerstand $\rho = \rho(T)$ eine wichtige Rolle: Dieser ist Temperaturabhängig. Für Wolfram sind die Werte in Fig.3 gezeigt.

*Wärmemenge
im
Glühwendels*

*spezifischer
elektrischer
Widerstand*

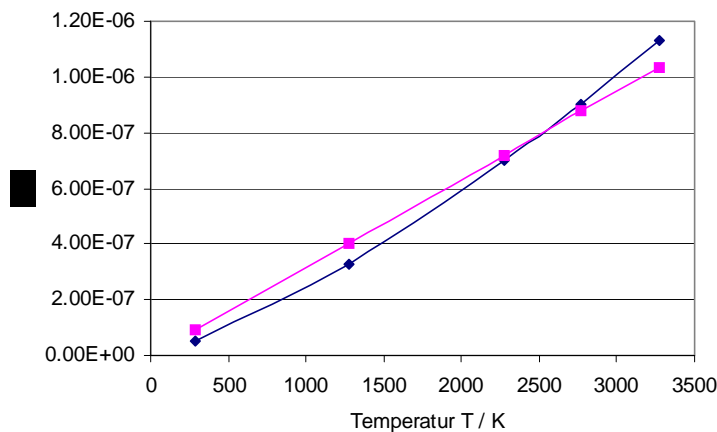


Fig.3. Spezifischer Widerstand ρ als Funktion der Temperatur T : Die Kurve kann durch ein lineares Gesetz approximiert werden (hier $\rho(T) = 3.16 \cdot 10^{-10} (\Omega\text{m/K}) \cdot T$ (Daten aus Formeln & Tafeln⁴).

In erster Näherung kann für $\rho(T)$ ein linearer Ansatz verwendet werden: $\rho(T) = \mu T$ (Die Verwendung eines exponentiellen Ansatzes wäre genauer, ändert aber die Simulation wenig). Für die Temperatur⁵ lässt sich nun schreiben (ohne Berücksichtigung der Abstrahlung):

⁴ DPK, DMK: Formeln und Tafeln, Orell Füssli Verlag AG (1977), 9. Auflage (2001), S.177

⁵ Aus Systemdynamischer Sicht wäre hier die Gleichung für die Wärmemenge als Speichergrosse und die Leistung (Energiefluss) als Flussgrösse sinnvoll. Das hier die intensive Grösse Temperatur verwendet wird, liegt zum einen am Zugang über die Differentialgleichung, welche für die Temperatur eine analoge Form zu Eq.20 hat, andererseits ist die Temperatur über den Begriff der Licht- bzw. Farbtemperatur im Experiment direkt zugänglich.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{U^2 A}{l \cdot m \cdot c \cdot \mu T} \quad (\text{Eq.4})$$

Die Gleichung Eq.4 ist von der Form $\dot{T} = \alpha T^{-1}$ und besitzt die Lösung $T(t) = \sqrt{2\alpha t + T_0^2}$ mit $\alpha = U^2 A / (lmc\mu)$. Es handelt sich um eine Art gedämpftes Wachstum, allerdings ohne ein Gleichgewicht zu erreichen, was den Einsatz von Glühlampen als Lichtquellen verunmöglichen würde. Wird nun noch die Abstrahlung des Glühwendels berücksichtigt, so muss in Eq.36 noch der Term $\varepsilon\sigma S T^4 / mc$ abgezogen werden:

*Abstrahlung
des
Glühwendels*

$$\frac{dT}{dt} = \frac{U^2 A}{l \cdot m \cdot c \cdot \mu T} - \frac{\varepsilon\sigma \cdot S}{mc} \cdot T^4 \quad (\text{Eq.5})$$

Dabei ist $\sigma = 5.670 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ die Stefan-Boltzmann-Konstante und ε die Emissionszahl (für schwarzen Körper ist $\varepsilon = 1.0$). Die abstrahlende Oberfläche S und die Masse m des Glühwendels lassen sich auf die Querschnittsfläche A und die Wendellänge l zurück-führen: $S = 2l \cdot \sqrt{\pi A}$ und $m = \rho_W \cdot V = \rho_W \cdot lA$ mit der Dichte von Wolfram $\rho_W = 19.3 \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3}$. Somit ergibt sich für die Temperatur folgende DGL:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{U^2}{l^2 \cdot \rho_W \cdot c \cdot \mu} \cdot \frac{1}{T} - \frac{\varepsilon\sigma \cdot 2\sqrt{\pi}}{\rho_W c \sqrt{A}} \cdot T^4 \quad (\text{Eq.6})$$

Die Computersimulation des Systems zeigt deutlich den Verlauf der Temperatur beim Einschalten der Lampe (Fig.4). Je nach Dimensionierung des Wendels und Höhe der elektrischen Spannung, welche an der Lampe anliegt, werden verschiedene Gleichgewichtstemperaturen erreicht. Die Erhöhung der Spannung führt zu einer höheren Temperatur, was sich in einer höheren Licht- bzw. Farbtemperatur und somit einem weisseren Licht äussert. Zudem nimmt die emittierte Lichtmenge zu. Leider ist die Wendeltemperatur durch den Schmelzpunkt von Wolfram (3380°C bzw. 3653 K) begrenzt. Mehr und weisseres Licht können nur Entladungslampen liefern.

*Farb-
temperatur*

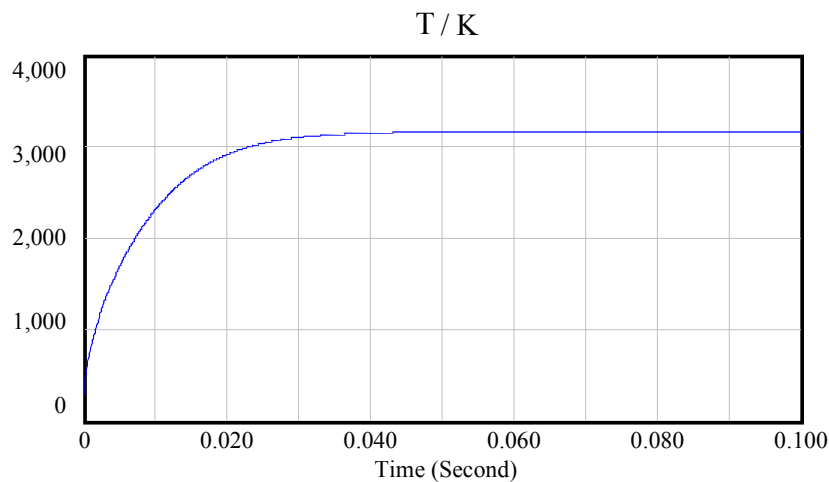


Fig.4. Temperaturverlauf beim Einschalten einer Niedervolt-Halogen-glüh-lampe: Mit einer Querschnittsfläche von $5 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2$ und einer Wendellänge von $2.5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ sowie $\varepsilon = 0.8$ ergibt sich eine Gleichgewichtstemperatur von ca. 3170 K bei einer Leistung von 30 W. Die Simulation erfolgte mit Ven-sim (Numerik: Runge-Kutta-Verfahren, $\Delta t = 10^{-4} \text{ s}$).

In Eq.6 sind die Wärmeverluste durch Wärmeleitung sowie die Iso-lation durch den Glaskolben (und die Reflektion der Strahlung⁶) nicht berücksichtigt. Zudem wird der zeitliche Verlauf auch durch die Trägheit des Transformators (Spannungsquelle, siehe Abschnitt 841) mitbestimmt.

Wellenlänge bei Strahlungsmaximum bei 3400 K:

$$\lambda_{\max} = 852 \text{ nm} \rightarrow \text{Infrarot}$$

Temperatur für Strahlungsmaximum bei 500 nm: $T = 5796 \text{ K}$

⁶ Osram entwickelte Niedervolt-Halogenglühlampen (*IRC-Lampen*), bei denen eine Infrarot-reflektierende Beschichtung des Glaskolbens zu einer höheren Wendeltemperatur führt, ohne dass mehr elektrische Leistung zugeführt werden muss. Dies führt zu einem Energiespareffekt.

800 Elektrodynamik

In diesem Kapitel wird näher auf die Erscheinungen und Phänomene der Elektrizität und des Magnetismus eingegangen. Solange sich elektrische Ladungen nicht bewegen, scheinen elektrische und magnetische Felder zwei voneinander unabhängigen Naturphänomene zu sein. Sobald sich aber elektrische Ladungen bewegen, kann auf diese eine magnetische Kraft wirken. Dies, weil bewegte Ladungen magnetische Felder erzeugen können. Deshalb wird auch von Elektromagnetismus gesprochen.

Für dieses Kapitel werden die Abschnitte 212 und 322 voraus gesetzt.

Die Lernziele sind:

1. Definitionen der wichtigsten elektrodynamischen Grössen anwenden können
2. die elektromagnetische Induktion mit der Lorentzkraft erklären können
3. das Verhalten von Kondensatoren und Spulen im Wechselstromkreis qualitativ und quantitativ erklären können und deren technische Anwendungen kennen
4. einfache Schaltungen berechnen und simulieren

Inhalt

Lernziele

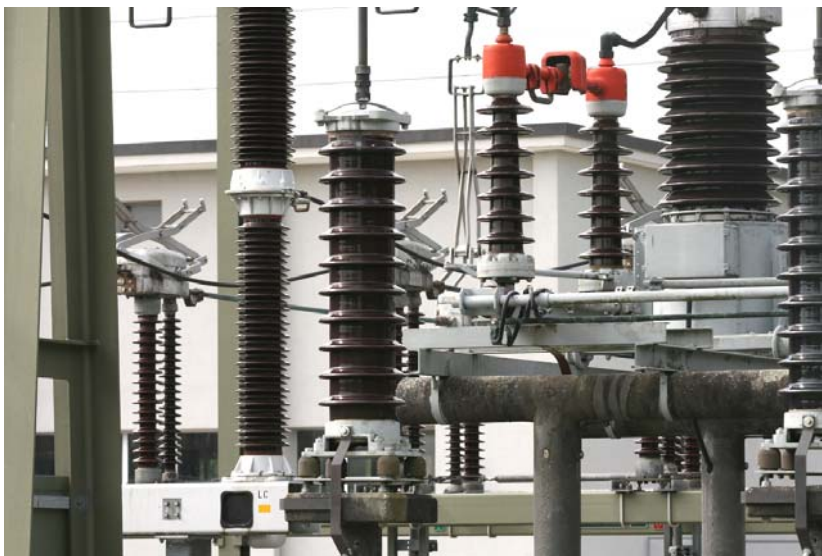


Fig.1. Überspannungsableiter, Stromwandler und Spannungstrenner im 50-kV-Netz

810 Materie im elektrischen Feld

811 elektrische Grundgrössen

Theorie

Zu den Grundgrössen Zeit, Länge und Masse kommt in der Elektrodynamik die elektrische Ladung q hinzu. Zwischen Ladungen wirken elektrische Kräfte (Abschnitt 212). Für viele Betrachtungen wird dabei analog zu den Punktmassen in der Mechanik von Punktladungen ausgegangen. Für Elektronen stimmt das hinreichend genau. Für geladene Körper kann jedoch auch eine Ladungsdichte ρ definiert werden. Für die Gesamtladung Q gilt:

*elektrische
Ladung*

Ladungsdichte

$$Q = \int_V \rho(\vec{r}) \cdot d^3r \quad (\text{Eq.1})$$

Werden Ladungen bewegt, so lässt sich auch eine Stromdichte \vec{j} definieren: $\vec{j} = nq\vec{v}$. Dabei ist \vec{v} die Geschwindigkeit der Ladungen und $n = N/V$ ist die Anzahl geladene Teilchen pro Volumen, also die Teilchendichte. Die Stromdichte ist eine vektorielle Grösse. Sie stellt die Anzahl geladene Teilchen dar, welche pro Zeiteinheit senkrecht durch ein Flächenelement $d\vec{a}$ fliesst. Folglich lässt sich die elektrische Stromstärke I daraus ableiten als:

Stromdichte

Stromstärke

$$I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{a} \quad (\text{Eq.2})$$

Zu beachten ist, dass das Flächenelement $d\vec{a}$ ein Vektor mit Richtung der Flächennormale ist. Das Skalarprodukt wird maximal, wenn Stromdichte und Flächennormale in die gleiche Richtung schauen.

Für Ladungsdichte und Stromdichte lässt sich wegen der Erhaltung von Ladungen eine Kontinuitätsgleichung aufstellen. Dabei wird die zeitliche Änderung der Ladungsdichte mit der Divergenz der Stromdichte verglichen. Die Divergenz ist dabei folgendermassen definiert:

Divergenz

$$\text{div}(\vec{j}) = \nabla \cdot \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \quad (\text{Eq.3})$$

Ändert sich die Ladungsdichte im Raum dahingehend, dass Ladungen von einem Punkt weg fließen, so entsteht dadurch eine Stromdichte. Die zeitliche Änderung der Ladungsdichte entspricht gerade der Divergenz der Stromdichte. Für die Kontinuitätsgleichung folgt:

*Kontinuitäts-
Gleichung*

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (\text{Eq.4})$$

das elektrische Feld wurde bereits im Abschnitt 322 definiert. Eine et-was exaktere Definition sei hier noch einmal gegeben. Wird eine möglichst kleine Testladung in ein elektrisches Feld gebracht, so wirkt auf diese die Kraft \vec{F}_E . Das elektrische Feld \vec{E} definiert sich dann durch:

*elektrisches
Feld*

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{F}_E}{q} \right) \quad (\text{Eq.5})$$

Das elektrische Feld geht von Ladungen aus. Spezielle Felder sind das Coulomb-Feld und das homogene Feld (Abschnitt 212, 322), welche eine besonders einfache mathematische Form aufweisen. Für mehrere, im Raum verteilte Punktladungen q_i können die Coulomb-Felder aufsummiert werden. Das resultierende elektrische Feld ist dann gegeben durch:

*Superposition
von Feldern*

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n \left[q_i \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \right] \quad (\text{Eq.6})$$

Auch für kontinuierliche Ladungsverteilungen $\rho(\vec{r})$ lässt sich das elektrische Feld theoretisch berechnen. Der Beitrag $d\vec{E}$ zum gesamten elektrischen Feld durch die Teilladung $dq = \rho \cdot d^3r$ ist gegeben durch:

*kontinuierliche
Ladungs-
verteilung*

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}|^3} \cdot dq \quad (\text{Eq.7})$$

Daraus folgt für das elektrische Feld am Ort \vec{r} :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int \rho(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}' \quad (\text{Eq.8})$$

Die Berechnungen von Eq.8 können schnell sehr mühsam werden. Die Berechnung mit einem Computer über Eq.6 ist eine mögliche Alternative. Ebenfalls einfacher ist das Arbeiten mit Potentialen. Diese wurden im Abschnitt 322 eingeführt. Analog zum Abschnitt 323 (Rechnen mit Potentialen) kann ein Zusammenhang von elektrischen Feld und Potential über eine räumliche Ableitung gefunden werden. Dies soll hier anhand des Coulomb-Potentials gezeigt werden. Wir bilden folgende Ableitung:

Potentiale

$$\nabla\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right] \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right] \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right] \end{array} \right) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\begin{array}{c} \frac{x}{r^3} \\ \frac{y}{r^3} \\ \frac{z}{r^3} \end{array} \right) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (\text{Eq.9})$$

In Eq.9 wurde komponentenweise abgeleitet:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right] = -\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot [x^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}}$$

Somit kann nun geschrieben werden:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) \quad (\text{Eq.10})$$

Dies steht in völliger Analogie zu Eq.31 in Abschnitt 323.

Aufgaben

A1. Ein elektrisches Dipol besteht aus zwei Ladungen $+q$ und $-q$, welche sich im Abstand l zueinander befinden. Das Dipolmoment wird definiert als:

$$\vec{p} = q\vec{l} \quad (\text{Eq.11})$$

Berechnen Sie für ein Dipol das Potential und das elektrische Feld. Nehmen Sie die negative Ladung im Ursprung des Koordinatensystems an.

A2. Ein dünner, geladener Draht trage pro Längeneinheit die Ladung ρ . Das elektrische Feld um den Draht herum nimmt mit dem Abstand r zum Draht ab:

$$E(r) = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \quad (\text{Eq.12})$$

Berechnen Sie das elektrische Potential.

A3. Stellen Sie die Kontinuitätsgleichung (Eq.4) für ein eindimensionales Problem (e.g. langer, sehr dünner Draht) auf.

Wie lässt sich für dieses Problem die Kontinuitätsgleichung sinnvoll interpretieren?

A4. gegeben sei ein (radiales) Potential $\varphi(r) = a \cdot \ln|r|$. Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(r)$.

Lösungen

L1.

Potential:
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{-q}{r} + \frac{q}{|\vec{r} - \vec{l}|} \right)$$

Elektrisches Feld:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{-q}{r^3} \cdot \vec{r} + \frac{q}{|\vec{r} - \vec{l}|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{l}) \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{l}|^3} - \frac{1}{r^3} \right) \cdot \vec{r} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{l}|^3} \cdot \vec{l} \right] \end{aligned}$$

L2.

$$\varphi(r) = -\frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \cdot \int \frac{1}{r} \cdot dr = -\frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln r + const.$$

L3. Für einen unendlich dünnen Draht wäre die Stromdichte unendlich. Mit der Beziehung $I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{a} \approx A \cdot j$ würde aber eine endliche Stromstärke

$I = dq/dt$ resultieren.

$$\begin{aligned} A \cdot \frac{d\rho}{dt} + A \cdot \frac{dj}{dx} = 0 &= A \cdot \frac{d\rho}{dt} + \frac{d}{dx} \left[\frac{dq}{dt} \right] = A \cdot \frac{d\rho}{dt} + \frac{d}{dt} \left[\frac{dq}{dx} \right] \\ \Rightarrow A \cdot \frac{d\rho}{dt} &= -\frac{d}{dt} \left[\frac{dq}{dx} \right] \end{aligned}$$

Die Grösse dq/dx ist quasi die Ladung pro Länge, also auch eine Ladungsdichte. Die obige Beziehung kann folgendermassen interpretiert werden: Die zeitliche Änderung der Ladungsdichte ist gleich der pro Zeiteinheit ab- oder zufließenden Ladungsdichte.

L4.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\varphi = -a \cdot \left(\partial/\partial x \left[\ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right], \partial/\partial y \left[\ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right], \partial/\partial x [\dots] \right) \\ &= -a \cdot \vec{r}/r^2 \end{aligned}$$

812 Das Dielektrikum

Theorie

Durchdringt ein elektrisches Feld \vec{E} ein Medium, so kann dieses auf das Feld reagieren, wenn in diesem Material Ladungen verschoben werden. In diesem Zusammenhang wird von der Polarisation des Mediums gesprochen. Die verschobenen Ladungen produzieren ihrerseits ein Polarisationsfeld \vec{P} . Dieses beschreibt das Dipolmoment \vec{p} pro Volumen (hier also Verschiebungslänge \vec{l} mal verschobene Ladung $\vec{p} = \vec{l} \cdot Q$). Wie stark sich dieses Polarisationsfeld ausbildet, hängt vom Material ab. Die dielektrische Suszeptibilität χ beschreibt die Stärke dieses Feldes:

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E} \quad (\text{Eq.13})$$

Die relative Dielektrizitätskonstante ϵ_r lässt sich daraus ableiten:

$$\epsilon_r = 1 + \chi \quad (\text{Eq.14})$$

Für Vakuum ist $\epsilon_r = 1$ und somit $\chi = 0$. Im NaCl – Kristall sind verschiebbare Ladungen vorhanden, aber in einem Kristallgitter fixiert, die Dielektrizitätskonstante ϵ_r beträgt 5.6. In Wasser hin-gegen erreicht sie $\epsilon_r = 81$. Noch höhere Werte werden mit gewissen TiO₂ - enthaltenden Keramiken erreicht (bis zu $\epsilon_r = 5000$).

Wird eine Punktladung oder eine geladene Kugel in ein Dielektrikum gebracht, so hat das auch Konsequenzen bezüglich der auf eine Ladung wirkenden elektrischen Kraft. Für das Potential im Feld einer Punktladung gilt:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r} \quad (\text{Eq.15})$$

mit $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \epsilon$. Auch die Kapazität C eines Kondensators wird durch das Material der Isolierschicht stark beeinflusst. Für einen Zylinderkondensator mit Länge l , Innenradius r_i und Aussenradius r_a gilt zum Beispiel:

*Polarisation**dielektrische Suszeptibilität**relative Dielektrizitätskonstante**Potential im Dielektrikum**Beeinflussung der Kapazität**Zylinder-Kondensator*

$$C = \frac{2\pi\epsilon \cdot l}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \quad (\text{Eq.16})$$

und für den Plattenkondensator mit der Plattenfläche A und dem Plattenabstand d :

*Platten-
Kondensator*

$$C = \epsilon \cdot \frac{A}{d} \quad (\text{Eq.17})$$

Die Energiedichte des elektrischen Feldes ist nun gegeben durch:

*Energiedichte
des
elektrischen
Feldes*

$$w_E = \frac{1}{2} \epsilon \cdot E^2 \quad (\text{Eq.18})$$

Aufgaben

A1. Zwei metallische, parallele Platten mit einem Abstand von 1 cm werden bei einer Spannung von 8 kV aufgeladen. Danach wird die Spannungsquelle abgehängt (Experiment).

Wie gross ist die Spannung, wenn anschliessend eine 1 cm dicke Platte aus PVC dazwischen geschoben wird?

A2. Ein 80 cm langer Zylinder aus Plexiglas (PMMA) mit einer Wanddicke von 5 mm und einem Innendurchmesser von 10 cm werde aussen und innen mit einer Alufolie beklebt.

Wie gross ist die Kapazität?

A3. Auf einer metallischen Kugel mit einem Radius $r = 5\text{cm}$ befinde sich die Ladung $Q = 12\mu\text{C}$. Die Kugel sei mit einer 2 cm dicken Isolierschicht aus PMMA ummantelt.

Welche elektrische Spannung herrscht zwischen Ober- und Unterseite der PMMA - Schicht?

Lösungen

L1.

$$U = \frac{Q}{C} \rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{\epsilon_r^{(1)}}{\epsilon_r^{(2)}} \rightarrow U_2 = U_1 \cdot \frac{\epsilon_r^{(1)}}{\epsilon_r^{(2)}}$$

$$U_2 = \frac{1}{6.1} \cdot 8kV = \underline{1.3kV}$$

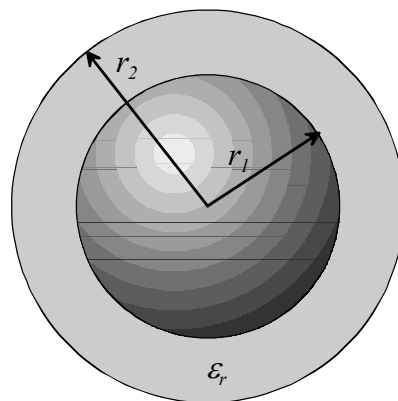
L2.

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r \cdot l}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} = 3.1 \cdot 10^{-9} F = \underline{1.56pF}$$

L3.

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E(r) \cdot dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \left[\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2}$$

$$= \underline{180kV}$$



820 Schaltungen im Gleichstromkreis

821 Serie- und Parallelschaltungen von Kondensatoren

Theorie

Bei einer Serieschaltung von Kondensatoren (Fig.2) werden diese im elektrischen Stromkreis hintereinander angeordnet.

*Serie-
Schaltung*

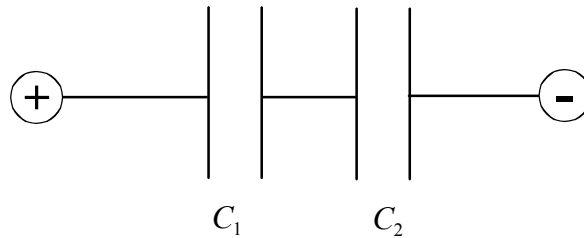


Fig.2. Serieschaltung von zwei Kondensatoren

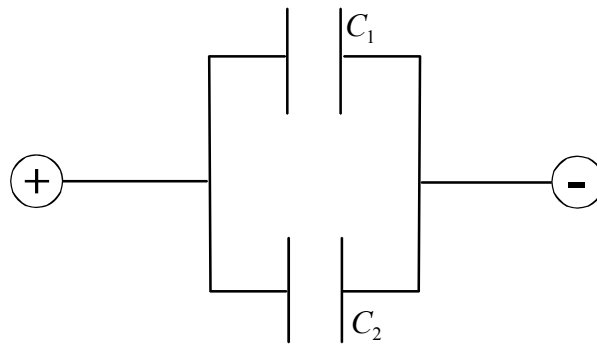
Die resultierende Kapazität für eine Serieschaltung von zwei Plattenkondensatoren mit der gleichen Plattenfläche A und den Plattenabständen d_1 bzw. d_2 kann wie folgt gefunden werden:

$$C = \varepsilon \cdot \frac{A}{d} = \varepsilon \cdot \frac{A}{d_1 + d_2} = \left(\frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \right) \quad (\text{Eq.19})$$

Allgemein gilt für alle Arten von Kondensatoren:

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i} \quad (\text{Eq.20})$$

Bei einer Parallelschaltung von Kondensatoren werden diese im elektrischen Stromkreis hintereinander angeordnet (Fig.3).



*Parallel-
Schaltung*

Fig.3. Parallelschaltung von zwei Kondensatoren

Für zwei parallel geschaltete Plattenkondensatoren mit dem gleichen Plattenabstand d und den Plattenflächen A_1 bzw. A_2 ergibt sich eine gesamte Kapazität von:

$$C = \varepsilon \frac{A}{d} = \varepsilon \cdot \frac{A_1 + A_2}{d} = C_1 + C_2 \quad (\text{Eq.21})$$

Allgemein gilt wieder für beliebige Kondensatoren:

$$C = \sum_i C_i \quad (\text{Eq.22})$$

Durch Ein- und Ausschalten der anliegenden Gleichspannung können Kondensatoren geladen und entladen werden. Der Entladeprozess kann folgendermassen modelliert werden: Wird ein geschlossener Stromkreis mit einem Kondensator der Kapazität C und einem Widerstand R (Serienschaltung von R und C) betrachtet, so ist die Summe der Spannungen null (Energieerhaltung bzw. Spannungen über eine Masche \rightarrow Maschenregel 822): $U_C + U_R = 0$. Die Spannung über dem Kondensator ist gegeben durch die Kapazität C und die Ladung Q , also $U_C = Q/C$ und die Spannung über dem Widerstand ist durch das Ohmsche Gesetz gegeben: $U = RI$. Somit resultiert: $Q/C + RI = Q/C + R \cdot dQ/dt = 0$

*Entladen eines
Kondensators*

Maschenregel

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q \quad (\text{Eq.23})$$

Aufgaben

A1. Die totale Kapazität einer Serieschaltung von zwei Kondensatoren beträgt 22 nF. Die Kapazität des einen Kondensators ist bekannt: $C_1 = 30$ nF.

Wie gross ist die Kapazität des anderen Kondensators?

A2. Welches sind die maximale und die minimale Kapazität, welche sich mit den drei einzelnen Kondensatoren $C_1 = 700 \mu\text{F}$, $C_2 = 200 \mu\text{F}$ und $C_3 = 150 \mu\text{F}$ realisieren lassen?

A3. Zwei parallel geschaltete Kondensatoren mit gleicher Kapazität C_1 werden bei der Spannung U_0 geladen. Danach werden sie über einen Widerstand R entladen (Experiment, Fig.4). Nach der Zeit $T_{1/2}$ ist die Spannung auf die Hälfte von U_0 abgefallen.

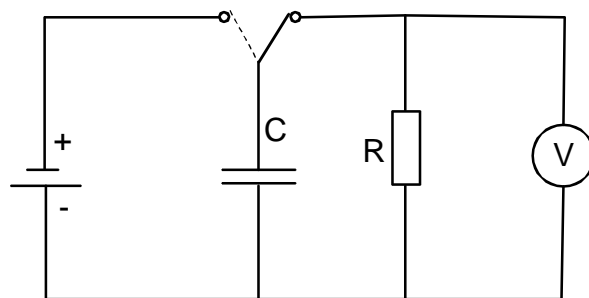


Fig.4. Experimentaufbau für die Kondensatorentladung mit der Kapazität (Kondensator) C und dem Entladewiderstand R .

- Wie lässt sich die Kapazität C aus einer Entladung bestimmen?
- Wie ändert sich $T_{1/2}$, wenn die Kondensatoren in Serie geschaltet werden?
- Wie lässt sich der Entladungsprozess mit dem Computer simulieren?

A4. Ein geladener Kondensator werde an einen ungeladenen Kondensator angeschlossen: Was geschieht? Beantworten Sie diese Frage mittels einer Computersimulation.

Lösungen:

L1.

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C} - \frac{1}{C_1} \rightarrow C_2 = \frac{1}{\frac{1}{C} - \frac{1}{C_1}} = \underline{82.5nF}$$

L2.

Maximale Kapazität wird bei einer reinen Parallelschaltung erreicht:

$$C = 1050\mu F$$

Die minimale Kapazität wird bei einer reinen Serieschaltung erreicht:

$$C = 76.36\mu F$$

L3. Die in einem Kondensator gespeicherte elektrische Ladung Q ist durch die Kapazität C (für Aufgabe 3 also $C = 2C_1$) das Ohmsche Gesetz: $U(t) = R \cdot I(t)$, wobei die Spannung U und der Strom I von der Zeit t abhängen⁷. Durch Division von Eq.23 mit der Kapazität C erhält man:

*Entladung
eines
Kondensators*

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{RC}U \quad (\text{Eq.24})$$

Die Differentialgleichung besitzt die analytische Lösung:

$$U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (\text{Eq.25})$$

mit der Anfangsspannung U_0 .

⁷ Im Rahmen einer systemdynamischen Betrachtung von Speichergrosse und Flüssen wäre hier die Verwendung der elektrischen Ladung als Speichergrosse und der Strom als Ladungsfluss sinnvoll. Experimentell besser zugänglich ist aber die elektrische Spannung, weshalb hier direkt mit der DGL für $U(t)$ gearbeitet wird.

Die Halbwertszeit kann berechnet werden durch:

$$T_{1/2} = RC \cdot \ln(2) \quad (\text{Eq.26})$$

Halbwertszeit

Wird an Stelle einer Parallelschaltung eine Serieschaltung gewählt, reduziert sich die Kapazität um den Faktor vier. Entsprechend verkürzt sich die Halbwertszeit ebenfalls um einen Faktor vier.

Der exponentielle Abfall der Spannung lässt sich auch graphisch interpretieren. Dabei kann das Produkt $R \cdot C$ mittels Eq.26 aus dem Spannungsdiagramm ermittelt werden. Der Königsweg ist hier quasi die logarithmische Darstellung der Daten. Durch Logarithmieren von Eq.25 erhält man eine Geradengleichung für $\ln[U]$:

*Logarithmieren
der Daten*

$$\ln[U(t)] = -\frac{1}{RC}t + \ln[U_0] \quad (\text{Eq.27})$$

Aus Eq.27 wird ersichtlich, dass die Steigung dieser Gerade der reziproke Wert von $R \cdot C$ ist.

Für die Darstellung der Daten kann anstelle des natürlichen Logarithmus ist es häufig günstiger, den dekadischen Logarithmus zu verwenden. Mit dem Basiswechsel von e zu 10 resultiert aus Eq.27:

*Dekadisch-
logarithmische
Darstellung*

$$\log[U(t)] = -\frac{1}{\ln(10) \cdot RC}t + \log[U_0] \quad (\text{Eq.28})$$

Um aus dem Steigungswert $\Delta U/\Delta t$ im Diagramm das Produkt $R \cdot C$ zu berechnen, muss also noch mit der Faktor $\ln(10)$ berücksichtigt werden. Es gilt dann:

$$R \cdot C = \left[\ln(10) \cdot \frac{\Delta U}{\Delta t} \right]^{-1} \quad (\text{Eq.29})$$

Logarithmische Darstellungen erfüllen i. a. zwei Zwecke. Ersten zeigen sie, ob ein Zusammenhang exponentiell ist. Dies, weil die Entscheidung, ob eine Gerade wirklich gerade ist, von Auge einfacher zu treffen ist, als wenn beurteilt werden muss, ob eine Kurve exponentiell verläuft. Zweitens können damit grosse Datenbereiche erfasst und zur Darstellung gebracht werden.

Nutzen der logarithmischen Darstellung

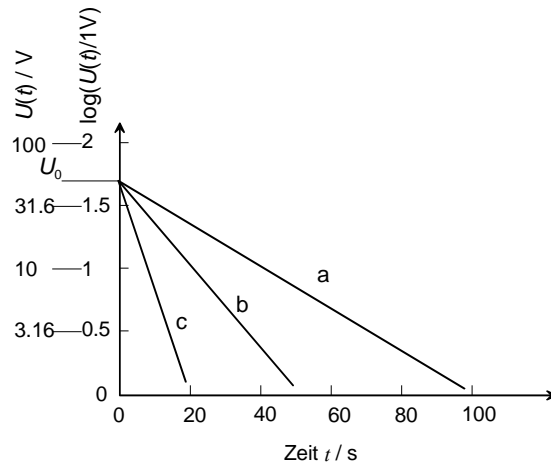


Fig.5. Logarithmische Darstellung des Spannungsabfalls bei einer Kondensatorentladung: Anfangsspannung $U_0 = 50 \text{ V}$, (a) $R \cdot C = 25.57 \text{ }\Omega\text{F}$; (b) $R \cdot C = 12.79 \text{ }\Omega\text{F}$; (c) $R \cdot C = 5.12 \text{ }\Omega\text{F}$.

Die Umsetzung von Eq.24 in einen graphischen Modelleditor ist in Fig.6 illustriert.

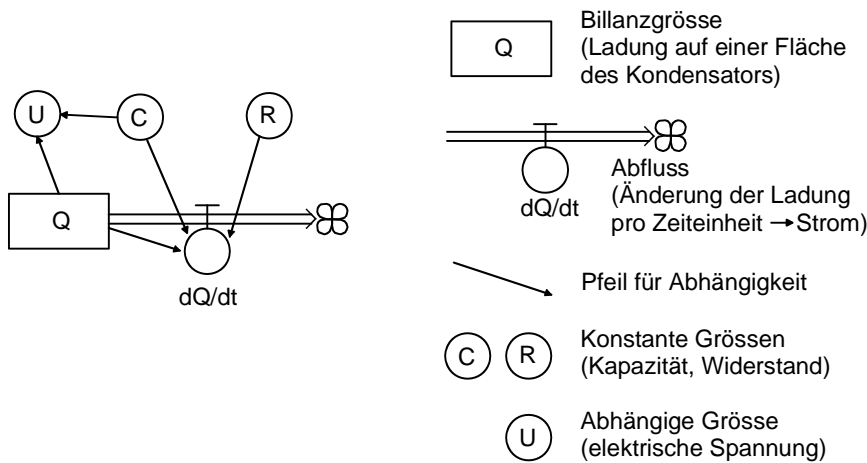
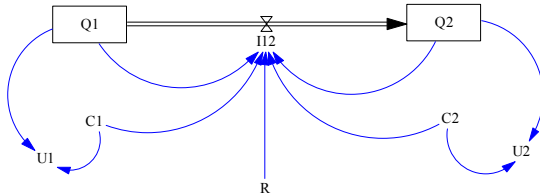


Fig.6. Graphische Darstellung der Kondensatorentladung mit Legende für die verschiedenen Funktionen.

L4.

Folgendes Flussdiagramm repräsentiert das System:



Systemgleichungen

$$\frac{dQ_1}{dt} = -I_{12} + I_{21} = -\frac{Q_1}{RC_1} + \frac{Q_2}{RC_2} = -\frac{U_1}{R} + \frac{U_2}{R} = \frac{U_2 - U_1}{R}$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = -I_{21} + I_{12} = -\frac{Q_2}{RC_2} + \frac{Q_1}{RC_1} = -\frac{U_2}{R} + \frac{U_1}{R} = \frac{U_1 - U_2}{R}$$

Das System zeigt das gleiche Verhalten wie die Entleerung eines Tanks im Abschnitt 624, Aufgabe 1. Hier wird ein Gleichgewichtsniveau bei der elektrischen Spannung erreicht. Dieses lässt sich durch Nullsetzen von \dot{Q}_1 bzw. \dot{Q}_2 und mit der Ladungsbilanz $Q_{1eq} + Q_{2eq} = Q_1(0)$ berechnen. Für die Ladungen gilt im Gleichgewicht:

$$Q_{1eq} = Q_1(0) \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

822 Serie- und Parallelschaltungen von Widerständen

Theorie

Werden zwei Drahtwiderstände mit der Drahtlänge l_1 bzw. l_2 mit dem spezifische elektrischen Widerstand ρ in Serie geschaltet, so resultiert ein Gesamtwiderstand R :

Serie-Schaltung

$$R = \rho \cdot \frac{l_1 + l_2}{A_{fil}} = \rho \cdot \frac{l_1}{A_{fil}} + \rho \cdot \frac{l_2}{A_{fil}} = R_1 + R_2 \quad (\text{Eq.30})$$

Dabei ist A_{fil} die Querschnittsfläche des Drahtes. Allgemein gilt:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots = \sum_i R_i \quad (\text{Eq.31})$$

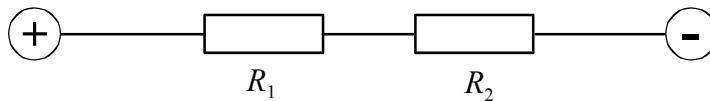


Fig.7. Darstellung einer Serieschaltung von Ohmschen Widerständen.

Für eine Parallelschaltung von zwei Widerständen mit der gleichen Drahtlänge l und den Querschnittsflächen A_1 bzw. A_2 ist der Gesamtwiderstand gegeben durch

Parallel-Schaltung

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A_1 + A_2} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad (\text{Eq.32})$$

Es gilt allgemein:

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i} \quad (\text{Eq.33})$$

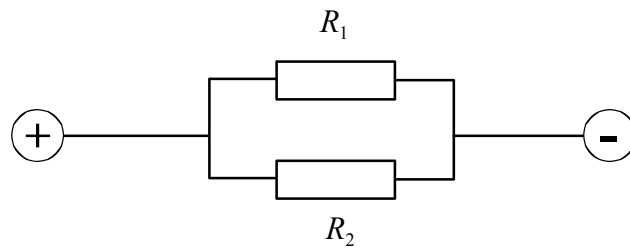


Fig.8. Darstellung einer Parallelschaltung von Widerständen.

Wird an eine Schaltung von mehreren Widerständen eine Spannung angelegt, so ergeben sich entsprechend der Teilspannungen über den Widerständen Stromflüsse durch die einzelnen Widerstände. Es gilt das Ohmsche Gesetz $U = RI$. Für das Berechnen von Teilspannungen und Teilströme gibt es nützliche Regeln – die Kirchhoffschen Gesetze.

Die Knotenregel besagt, dass an eine Knoten im Stromkreis die Summe aller Ströme null sein muss. Dafür muss den Strömen ein Vorzeichen zugeordnet werden:

*Kirch-
hoffsche
Gesetze
Knoten-
Regel*

$$\sum_k I_k = 0 \quad (\text{Eq.34})$$

Ladungen die pro Zeiteinheit zufließen, müssen auch wieder abfließen, wenn die Schaltung nur aus leitenden Drähten und Widerständen besteht.

Die Maschenregel betrachtet die Teilspannungen in einer Masche eines Stromkreises. Geht man in einem Stromkreis einmal rund herum, bis wieder der gleiche Punkt erreicht wird, so muss die Spannungsdifferenz null sein:

*Maschen-
Regel*

$$\sum_k U_k = 0 \quad (\text{Eq.35})$$

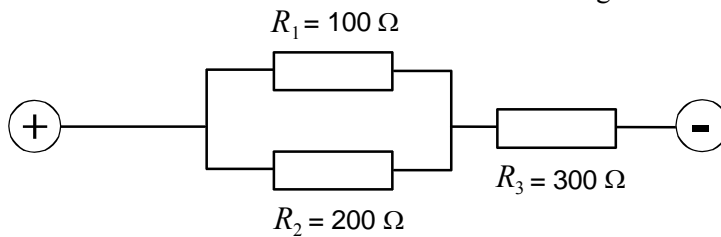
Wäre dies nicht so, würde der Energieerhaltungssatz verletzt. Eine Ladung könnte sich immer in der gleichen Richtung im Stromkreis bewegen und würde dabei ein immer höheres Potential erreichen.

Aufgaben

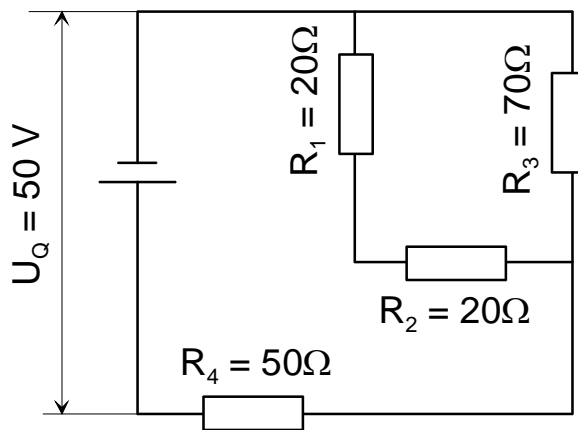
A1. Welches sind der maximale und der minimale Widerstand, welche sich mit den drei einzelnen Widerständen $R_1 = 50 \Omega$, $R_2 = 200 \Omega$ und $R_3 = 500 \Omega$ realisieren lässt?

A2. In einer Schaltung wird ein Widerstand mit $1.4 \text{ k}\Omega$ benötigt. Zur Verfügung stehen aber nur drei Widerstände mit 500Ω , $1 \text{ k}\Omega$ und $2 \text{ k}\Omega$. Suchen Sie eine Schaltung, mit welcher man den benötigten Widerstand möglichst gut (angenähert) erreichen kann.

A3. Berechnen Sie den Gesamtwiderstand der nachfolgenden Schaltung:



A4. Bestimmen Sie in der nachfolgenden Schaltung alle Ströme und Spannungen.



Lösungen

L1. Max.: reine Serie mit $R = 750\Omega$;
 Min.: reine Parallelschaltung mit $R = 37\Omega$

L2. $1\text{ k}\Omega$ in Serie mit Parallelschaltung von $500\ \Omega$ plus $2\text{ k}\Omega$

L3.

$$R = R^* + R_3$$

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R = \left(\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \right) + R_3$$

$$= \left(\frac{1}{\frac{1}{100\Omega} + \frac{1}{200\Omega}} \right) + 300\Omega = \underline{\underline{366.6\Omega}}$$

L4. Hinweis: Schaltung umzeichnen!

$$R_{total} = 25.45\Omega + 50\Omega = \underline{\underline{75.45\Omega}}$$

$$I_{total} = \frac{U_Q}{R_{total}} = \underline{\underline{0.663A}}$$

$$U_4 = R_4 \cdot I_{total} = \underline{\underline{33.15V}} \rightarrow U_3 = 50V - U_4 = \underline{\underline{16.85V}}$$

$$U_1 = U_2 = \frac{U_3}{2} = \underline{\underline{8.43V}}$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \underline{\underline{0.24A}} \rightarrow I_1 = I_2 = \underline{\underline{0.42A}}$$

830 geladene Teilchen im Magnetfeld

831 Die Lorentz-Kraft

Experiment

Wird ein stromdurchflossener Leiter einem Magnetfeld \vec{B} ausgesetzt (Fig.9), so lässt sich eine Kraft \vec{F} beobachten. Diese ist maximal, wenn die Flussrichtung des Stromes senkrecht zu den Magnetfeldlinien steht und verschwindet, wenn die Flussrichtung des Stromes parallel zu den Magnetfeldlinien ist.

Linear-Motor

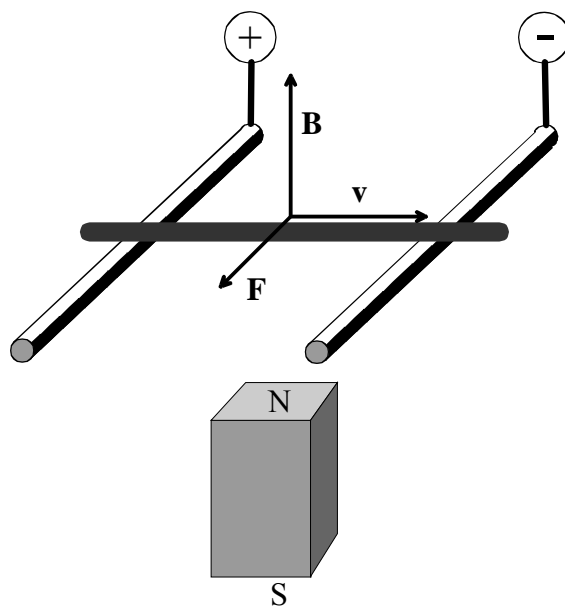


Fig.9. Schematische Darstellung eines Linearmotors: Wirkt auf bewegte, positive Ladungen (mit der Geschwindigkeit \vec{v}) ein Magnetfeld \vec{B} , so entsteht senkrecht dazu eine Kraft \vec{F} .

Die Richtungen deuten auf eine Verknüpfung über ein Vektorprodukt hin. Die Kraft wird Lorentz-Kraft genannt. Sie wird für zunehmende Geschwindigkeiten stärker und hängt von der elektrischen Ladung und der Magnetfeldstärke ab:

Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_B = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{Eq.36})$$

Über Eq.36 kann auch die Einheit des B-Feldes abgeleitet werden: Diese ist $N \cdot s / (C \cdot m) = T$ (Tesla, benannt nach Nicolai TESLA).

Theorie

Die Kraft, welche auf ein bewegtes, geladenes Teilchen in einem elektrischen Feld \vec{E} und in einem magnetischen Feld \vec{B} wirkt, ist gegeben durch:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{Eq.37})$$

Kraft auf bewegte Ladung

Die Lorentz-Kraft kann auch für eine Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ definiert werden:

$$\vec{F} = \int (\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})) \cdot d^3r \quad (\text{Eq.38})$$

Formulierung für Stromdichte

Eine Begründung dieser Kraftwirkung wird in Abschnitt 832 gegeben.

Aufgaben

A1. Gegeben sei ein elektrisches Feld $\mathbf{E}^T = (0, 0, 1000)$ V/m und ein magnetisches Feld $\mathbf{B}^T = (0.1, 0, 0)$ T. Eine Ladung $q = 1$ C durchfliegt diese Felder mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}^T = (0, 1, 0)$ m/s. Berechnen Sie den elektrischen und den magnetischen Anteil des Kraftvektors, welcher auf diese Ladung wirkt! Was fällt auf, wenn Sie die beiden Kräfte vergleichen?

A2. In einem Protonen - Zyklotron werden Protonen mit einem elektrischen Feld beschleunigt und durch ein magnetisches Feld auf eine Kreisbahn gezwungen. Zeigen Sie, dass der Radius der Kreisbahnen proportional zur Geschwindigkeit der Protonen ist.

A3. In einem Zyklotron können Protonen auf einem Kreis mit 4.5 m Durchmesser bis auf eine Energie von $32 \cdot 10^{-19}$ J beschleunigt werden.

- a) Welche Endgeschwindigkeit erreichen die Teilchen?
- b) Welche Stärke hat das Magnetfeld?

A4. Die Sonne schleudert ständig geladene Teilchen in den Weltraum hinaus. Wenn diese Teilchen in das Magnetfeld der Erde eintauchen, bewegen sie sich meist auf Schraubenlinien weiter. In Polnähe, wo das Erdmagnetfeld besonders stark ist, kann dies zu spektakulären Lichterscheinungen führen. Erklären Sie, warum ein geladenes Teilchen, welches unter dem Winkel ($0 < \varphi < \pi$) zu den Feldlinien eintritt, sich auf einer Schraubenlinie bewegt. Berechnen Sie formal den Radius der Schraubenlinie für den Fall eines homogenen Magnetfeldes.

A5. Ein geladenes Teilchen (Elektron) mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}(0) = (0, v_y, 0)$ werde in einen Raum (Speicherring) eingeschossen. In diesem Speicherring herrsche ein statisches Magnetfeld mit der Stärke $\vec{B} = (0, 0, B_z)$. Zudem soll ein elektrisches Feld in der x -Richtung zugeschaltet werden können.

a) Wie sehen die Bewegungsgleichungen aus, welche das System beschreiben?

b) Modellieren Sie das System mittels graphischem Modelleditor: Überprüfen Sie die Computersimulation anhand einer Handrechnung für den zu erwartenden Bahnradius.

Lösungen

L1. $F_E = 10^3 \text{ N}$; $F_B = 0.1 \text{ N}$

L2. Ansatz: Lorentz-Kraft = Zentripetalkraft, mit B-Feld senkrecht zur Bewegungsrichtung ergibt sich: $q(\vec{v} \times \vec{B}) = qvB$

$$eBv = \frac{m_p v^2}{r} \rightarrow r = \frac{m_p v}{eB}$$

L3.

(a) $v = \sqrt{\frac{2E}{m_p}} = \underline{6.2 \cdot 10^4 \text{ m/s}}$

(b) $B = \frac{m_p v}{re} = \underline{0.29 \text{ mT}}$

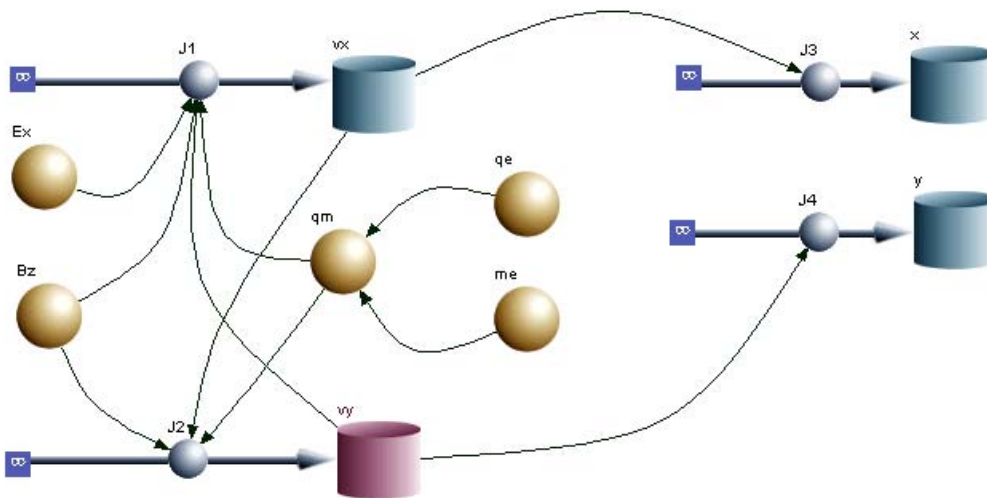
L4.

$$qvB \sin \varphi = \frac{mv^2 \cdot \sin^2 \varphi}{r} \rightarrow r = \frac{mv \sin \varphi}{qB}$$

L5. Systemgleichungen:

<pre> {Top model} {Reservoirs} d/dt (vx) = + J1 INIT vx = 0 d/dt (vy) = + J2 INIT vy = 100 d/dt (x) = + J3 INIT x = 0 d/dt (y) = + J4 INIT y = 0 {Flows} J1 = -qm*Ex-qm*vy*Bz J2 = qm*vx*Bz J3 = vx J4 = vy </pre>	<pre> {Functions} Bz = 0.0000001 qe = 1.6*10^(-19) me = 9.1*10^(-31) qm = qe/me Ex = 0 {Globals} {End Globals} </pre>
--	---

Flussdiagramm des Modells



832 Ströme und Magnetfelder

Experiment

Fließt durch einen Leiter Strom, so lässt sich ein zirkuläres Magnetfeld um den Stromleiter herum beobachten. Fließt Strom durch eine Spule, so entsteht ein Dipol-Feld (Fig.10).

*magnetisches
Dipol*

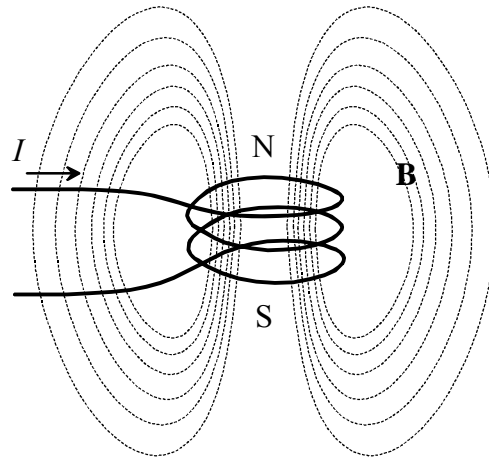
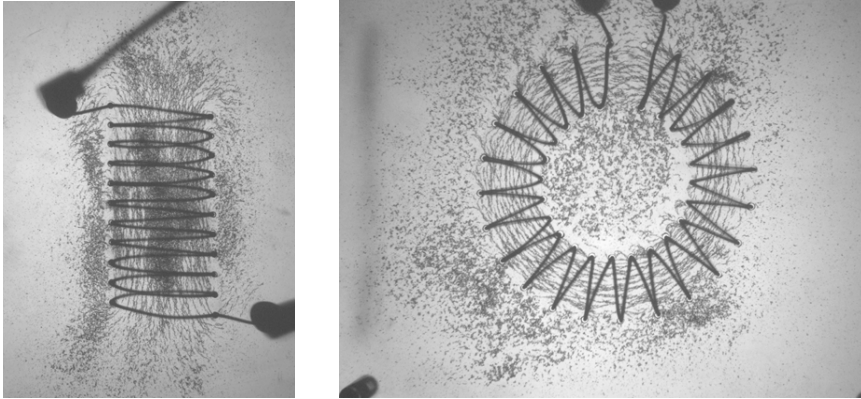


Fig.10. Dipolfeld um eine stromdurchflossene Spule herum: Oben Experiment mit Eisenspänen, unten schematische Drahtsellung

Diese Beobachtung liefert eine Erklärung für die Lorentz-Kraft. Bewegte Ladungen erzeugen Magnetfelder. Über dieses können die bewegten Ladungen mit einem äusseren Magnetfeld in Wechselwirkung treten. Zwei stromdurchflossene, parallele Drähte können sich deswegen gegenseitig anziehen oder abstossen, je nach Flussrichtung der Ströme (Biot-Savart-Kraft).

Biot-Savart-Kraft

Theorie

Der von einem Leiterelement $d\vec{l}$ erzeugte Beitrag zum Magnetfeld ist gegeben durch:

Magnetfeld um Stromleiter

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (\text{Eq.39})$$

Die Stromstärke durch das Leiterelement ist I und \vec{r} stellt der Vektor vom Leiterelement zum Aufpunkt dar.

Die Formel Eq.39 erklärt die sogenannte Rechte-Hand-Regel: Wenn der Daumen die Stromrichtung kennzeichnet, so zeigen die anderen Finger den Drehsinn des Magnetfeldes um den Leiter herum an.

Rechte-Hand-Regel

Wird in eine Spule ein Eisenkern eingefügt, so scheint sich das Magnetfeld im Eisenkern zu bündeln. In diesem Zusammenhang wird von *magnetischer Permeabilität* (Durchlässigkeit) gesprochen. Der Effekt der magnetischen Permeabilität beruht auf einem Ausrichten der magnetischen Momente der Atome im Medium. Je nach chemischer Zusammensetzung und Kristallgitter regiert also das Medium auf ein äusseres Magnetfeld. Dieses Verhalten wird durch die Permeabilitätszahl μ_r berücksichtigt. Die Änderung der Feldstärke kann berechnet werden mit:

magnetische Permeabilität

$$B = \mu_r B_0 \quad (\text{Eq.40})$$

Die magnetische Feldstärke in einer langen (Länge l), mit nur einem Medium ausgefüllten Spule mit N Windungen kann durch die Stromstärke des elektrischen Stroms, welcher diese Spule durchfliesst berechnet werden:

Magnetfeld in einer Spule

$$B \approx \mu_r \mu_0 \frac{NI}{l} \quad (\text{Eq.41})$$

mit $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/(Am)}$.

Es wird zwischen ferromagnetischen Stoffen ($\mu_r \gg 1$), paramagnetischen Stoffen ($\mu_r > 1$) und diamagnetischen Stoffen ($\mu_r < 1$) unterschieden. Für einige Materialien sind die Werte in Tab.1 gegeben.

Tab.1. Permeabilitätszahlen für einige Materialien

<i>Ferromagnetika</i>	μ_r
Eisen Nickel	bis 5000 bis 1000
<i>Paramagnetika</i>	
Luft Aluminium	≈ 1 1.00002
<i>Diamagnetika</i>	
Wasser Kupfer	0.99999 0.9999

Aufgaben

A1. Skizzieren Sie qualitativ unter Verwendung von Eq.39 die Feldlinien um die folgenden Leiterquerschnitte (Fließrichtung des Stroms aus dem Blatt heraus).



A2. Begründen Sie die Formel Eq.41: Warum sinkt die Feldstärke mit zunehmender Spulenlänge l ? Warum spielt die Fläche der Windungen keine Rolle?

A3. Im Feld einer Spule (Länge $l = 0.5\text{m}$) mit Kern und mit 500 Windungen wird bei einer Stromstärke von 1.2 A eine Feldstärke von 0.75 T gemessen.

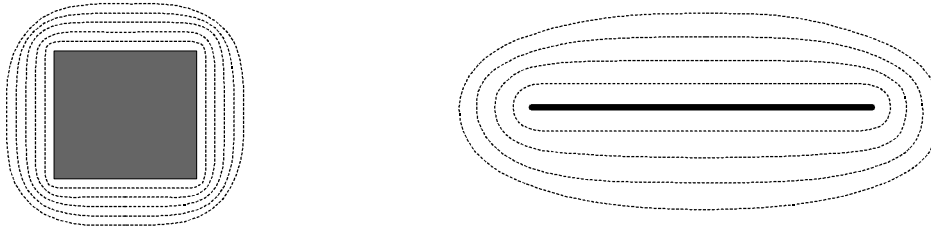
Um welches Material könnte es sich handeln?

A4. An der Stirnfläche eines quadratischen Eisenkerns (mit einer Querschnittsfläche von $A_L = 100\text{ cm}^2$) einer Spule (Länge $l = 0.3\text{ m}$) soll eine magnetische Feldstärke von 2 Tesla erreicht werden. Der Spulendraht (Kupfer) habe eine Querschnittsfläche von $A_{fil} = 1\text{ mm}^2$. An der Spule liege eine Spannung von 12 V an.

Wie viele Windungen braucht es?

Lösungen

L1.



L2. Je weiter die Windungen auseinander liegen, desto weniger überlagern sich die einzelnen Feldanteile der Windungen. Die Querschnittsfläche spielt keine Rolle, da es sich bei dem B-Feld um einen magnetischen Fluss pro Fläche handelt. Es handelt sich damit um eine lokale Feldstärke (differentielle Grösse).

L3.

$$\mu_r = \frac{B \cdot l}{\mu_0 \cdot NI} = 497.4 \quad \text{Nickel oder Eisen wären möglich}$$

L4.

$$N = \frac{B \cdot l}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot I} = \frac{B \cdot l}{\mu_r \mu_0} \cdot \frac{R}{U} = \frac{B \cdot l}{\mu_r \mu_0} \cdot \frac{\rho \cdot l_{fil}}{U \cdot A_{fil}}$$

$$= \frac{B \cdot l \cdot \rho \cdot 4\sqrt{A_L}}{\mu_r \mu_0 \cdot U \cdot A_{fil}} \cdot N \Rightarrow 1 = \frac{4Bl\rho\sqrt{A_L}}{\mu_r \mu_0 \cdot U \cdot A_{fil}}$$

Die Windungszahl spielt keine Rolle, da sowohl Feldstärke als auch der Ohmsche Widerstand der Spule linear von N abhängen. Allerdings muss angemerkt werden, dass Eq.41 nur für lange Spulen gilt ($l \gg \sqrt{A_L}$). Wird die Windungszahl bei gegebener Länge stark variiert, kann nicht mehr von der Geometrie einer langen Spule ausgegangen werden.

833 elektromagnetische Induktion

Theorie

Das Experiment des Linearmotors (Fig.9) lässt sich auch umkehren. Wird anstelle einer Spannungsquelle ein Spannungsmessgerät angeschlossen, so kann beim hin- und herbewegen der Querstange eine elektrische Spannung gemessen werden. Auch dieses Phänomen lässt sich auf die Lorentz-Kraft zurück führen. Durch sie werden Ladungen in Richtung der Querstange verschoben. Diese Verschiebung führt zu einem elektrischen Feld E . Die Spannung ist gegeben durch $U = E \cdot l$, wobei l die Länge der Querstange ist (genau genommen ist es der Abstand der beiden parallelen Stangen, auf denen die Querstange aufliegt). Das elektrische Feld wird aufgebaut, weil die Lorentz-Kraft wirkt: $qE = -q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = -qvB \cdot \sin \phi$ ⁸. Ist der Winkel ϕ zwischen \vec{v} und \vec{B} 90° , so resultiert für das elektrische Feld: $E = v \cdot B$, und entsprechend für die elektrische Spannung $U = E \cdot l = -vl \cdot B$. Die Geschwindigkeit $v = ds/dt$ mit der Länge l multipliziert ergibt die pro Zeiteinheit dt von der Querstange überstrichene Fläche dA_\perp , also eine Flächenänderung pro Zeit:

$$U = -\frac{l \cdot ds}{dt} \cdot B = -B \cdot \frac{dA_\perp}{dt} \quad (\text{Eq.42})$$

Wichtig ist, dass die B-Feldlinien senkrecht auf der Fläche A_\perp stehen.

Es wird auch eine Spannung gemessen, wenn bei einer Leiterschleife mit konstanter Fläche A_\perp die Magnetfeldstärke verändert wird. Es gilt:

$$U = -A_\perp \cdot \frac{dB}{dt} \quad (\text{Eq.43})$$

Die Beziehungen Eq.42 und Eq.43 können zusammengefasst werden. Für die induzierte Spannung U_{ind} gilt bei Flächen- und Magnetfeldänderung:

$$U_{ind} = -\frac{d}{dt}[A(t) \cdot B(t)] = -\left(B \cdot \frac{dA_\perp}{dt} + A_\perp \cdot \frac{dB}{dt}\right) \quad (\text{Eq.44})$$

Auf die Bedeutung des negativen Vorzeichens wird in Abschnitt 841 eingegangen. In diesem Zusammenhang kann der magnetische Fluss definiert werden. Der magnetische Fluss ϕ durch eine Leiterschleife ist definiert als

*Umkehrung
des
Linearmotors*

*induzierte
Spannung*

*zeitliche
Änderung des
Magnetfeldes*

*magnetischer
Fluss*

⁸ Im Kräftegleichgewicht gilt $0 = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$

das Produkt zwischen der Fläche A senkrecht zu den magnetischen Feldlinien und der Stärke des Magnetfeldes B :

$$\Phi_m = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (\text{Eq.45})$$

Für ein Leiterschleife mit einer zu den Feldlinien senkrechten Fläche $A = A_{\perp}$ ergibt sich $\Phi_m = A_{\perp} \cdot B$.

Als einfaches Beispiel kann eine drehende Leiterschleife mit der Länge l und der Breite b (Fläche $A = l \cdot b$) betrachtet werden (Fig.11).

*rotierende
Leiter-
Schleife*

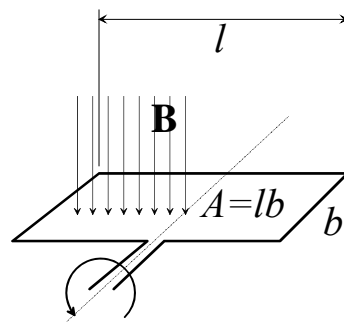


Fig.11. Rotierende Leiterschleife im Magnetfeld.

Wird nun die Leiterschleife um den Winkel α gedreht, so reduziert sich die Fläche, welche senkrecht zum Magnetfeld steht. In Richtung Magnetfeld verkürzt sich die Länge (projizierte Länge) $l_p = l \cdot \cos(\alpha)$ (Fig.12), während b konstant bleibt.

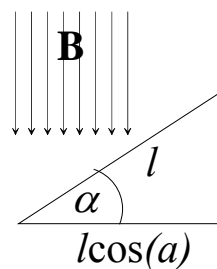


Fig.12. Projektion der Länge l in Richtung Magnetfeld \mathbf{B} .

Die senkrechte Fläche $A_{\perp} = A_{\perp}(t)$ ist somit gegeben durch $A_{\perp} = bl \cdot \cos(\alpha)$. Der Drehwinkel α ergibt sich aus der Winkelgeschwindigkeit ω und der Zeit t : $\alpha = \omega t$. Unter Verwendung von Ausdruck (Eq.42) kann für eine rotierende Spule mit N Windungen im Magnetfeld (Fig. 12) die induzierte Spannung $U_{\text{ind}} = U_{\text{ind}}(t)$ berechnet werden:

$$U_{\text{ind}} = -NB \frac{dA}{dt} = NB \cdot bl \omega \sin(\omega \cdot t) \quad (\text{Eq.46})$$

*Wechsel-
Spannung*

Die induzierte Spannung stellt somit einen Wechselspannung dar, welche mit der Frequenz $\nu = \omega/(2\pi)$ schwingt.

Für die Berechnung der Leistung, welche ein Generator an einen Ohmschen Verbraucher liefert, ist die Einführung eines sogenannten Effektivwerts günstig. Die Leistung als Funktion der Zeit ist für einen ohmschen Verbraucher gegeben durch $p(t) = \hat{u} \hat{i} \cdot \sin^2(\omega t)$. Mit Hilfe der trigonometrischen Beziehung $2 \sin^2(\omega t) = 1 + \cos(2\omega t)$ lässt sich diese umformen zu:

*Effektiv-
Werte*

$$\begin{aligned} p(t) &= \hat{u} \hat{i} \cdot \sin^2(\omega t) = \hat{u} \hat{i} \cdot \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} \\ &= \frac{\hat{u} \hat{i}}{2} + \frac{\hat{u} \hat{i}}{2} \cos(2\omega t) \end{aligned} \quad (\text{Eq.47})$$

Diese Funktion oszilliert also um den Mittelwert

Leistung

$$P = \frac{\hat{u} \hat{i}}{2} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} = UI.$$

Der Effektivwert der Spannung ist deshalb definiert als:

$$U_{\text{eff}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} = \frac{NB \cdot bl \omega}{\sqrt{2}} \quad (\text{Eq.48})$$

Analog gilt für die Stromstärke:

$$I_{\text{eff}} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \quad (\text{Eq.49})$$

Aufgaben

A1. Eine Spule mit 300 Windungen (Wdg) und einer Querschnittsfläche von 40 cm^2 werde in ein homogenes Magnetfeld mit der Flussdichte $B = 0.2 \text{ T}$ gestellt. Nun werde das Feld ausgeschaltet. Die Flussdichte sinke innerhalb von 10 ms auf Null ab.

Welche elektrische Spannung wird in der Spule induziert?

A2. Ein Generator verfüge über eine Spule (mit Eisenkern) mit 500 Windungen und einer Fläche von 100 cm^2 (Stator). Der Rotor des Generator bestehe aus einem Permanentmagneten und drehe sich mit einer Frequenz von 50 Hz. Die maximale Magnetfeldstärke in den Spulen betrage 0.3 T.

- a) Welche maximale Spannung wird über den Enden einer Spule erreicht?
- b) Wie gross ist der Effektivwert der Spannung über den Spulendenen?

A3. Ein Drehstrom-Generator verfüge über drei Spulen (mit Eisenkern) mit je 1500 Windungen und einer Fläche von je 140 cm^2 (Stator), welche in einer Ebene mit einem Winkel von 120° zu einander angeordnet sind. Der Rotor des Generator bestehe aus einem Permanentmagneten und drehe sich mit einer Frequenz von 50 Hz. Die maximale Magnetfeldstärke in den Spulen betrage 0.7 T.

- a) Welche maximale Spannung wird über den Enden einer Spule erreicht?
- b) Wie gross ist der Effektivwert der Spannung bei einer Sternschaltung zwischen Neutralleiter und einer Phase?
- c) Wie gross ist der Effektivwert der Spannung bei einer Sternschaltung zwischen zwei Phasen?

Lösungen

L1.

$$U_{ind} = -NA \cdot \frac{dB}{dt} = -NA \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

$$= -300 \cdot 40 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot (-) \frac{0.2 \text{ T}}{10^{-2} \text{ s}} = \underline{24 \text{ V}}$$

L2.

(a)

$$\hat{u} = NA \cdot \hat{B} \cdot \omega$$

$$= 500 \cdot 0.01 \text{ m}^2 \cdot 0.3 \text{ T} \cdot 50 \cdot 2\pi \text{ s}^{-1} = \underline{471.2 \text{ V}}$$

(b)

$$U_{eff} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} = \underline{333.2 \text{ V}}$$

L3.

(a)

$$\hat{u} = NA\hat{B} \cdot \omega = \underline{4616 \text{ V}}$$

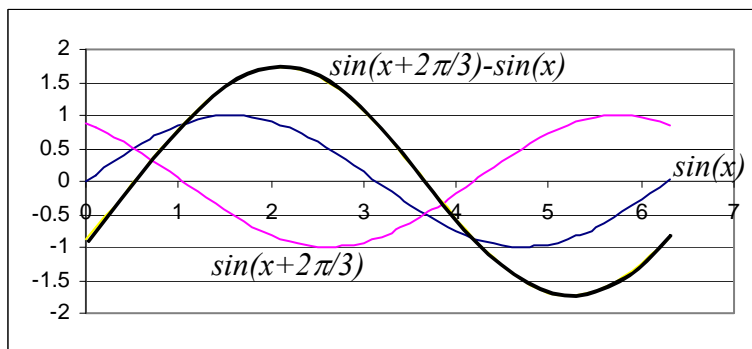
(b)

$$U_N = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} = \underline{3264 \text{ V}}$$

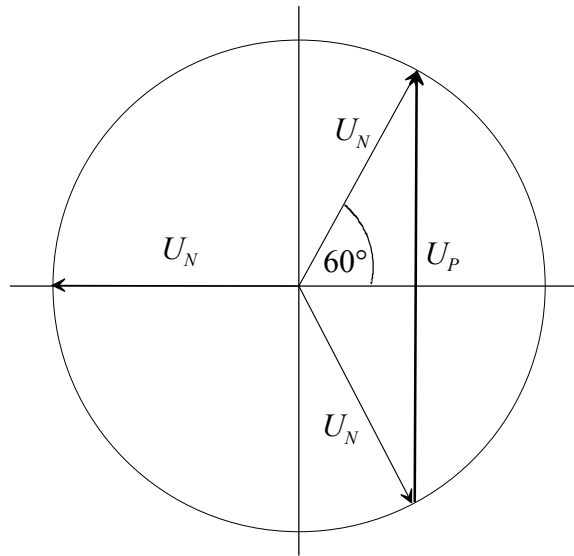
(c)

$$U_P = \sqrt{3} \cdot U_N = \underline{5653 \text{ V}}$$

Der Faktor $\sqrt{3}$ ergibt sich durch die Phasenverschiebung der Spannungssignale um 120° bzw. $2\pi/3$:



Der Faktor $\sqrt{3}$ lässt sich graphisch mit einem Phasendiagramm sehr schön darstellen:



Phasen-Diagramm

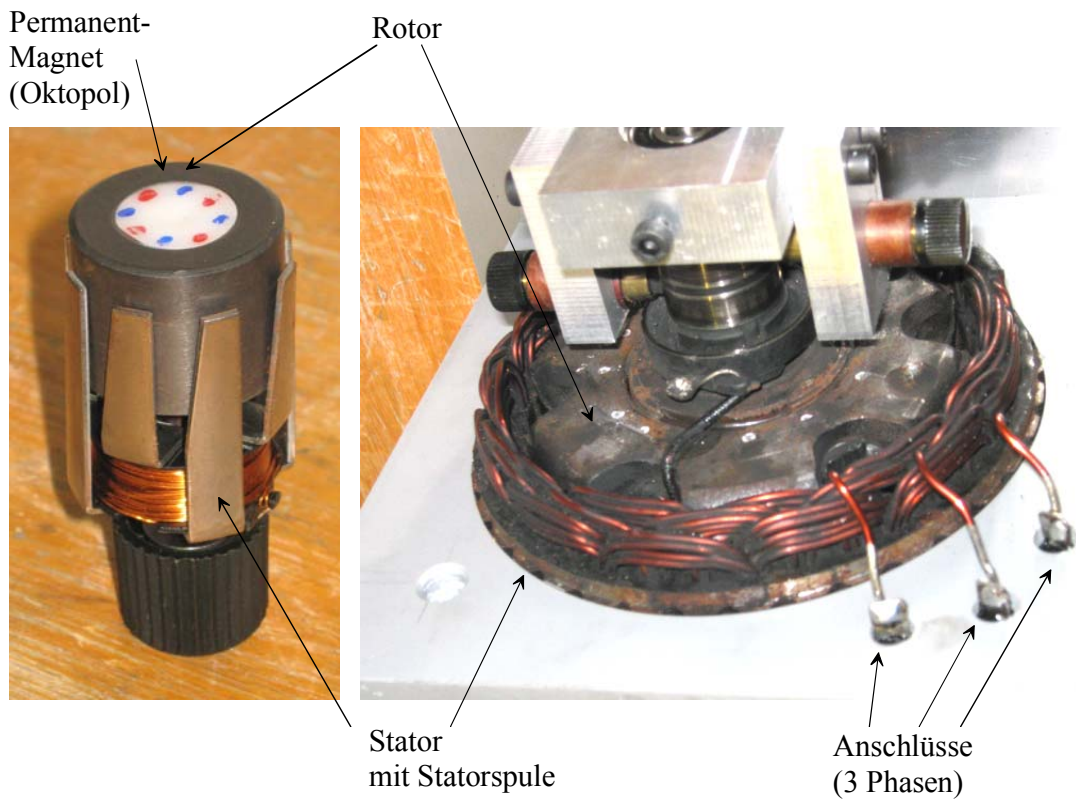


Fig.A. Innenleben von Fahrrad-Dynamo (1-Phasen-Generator) und Alternator (3-Phasen-Generator): Beim Dynamo besteht der Rotor aus einem Permanentmagneten, beim Alternator aus einem Elektromagneten.

840 Induktivitäten und Kapazitäten im Wechselstromkreis

841 Induktivität von Spulen

Experiment

Wird an eine Spule Wechselspannung angelegt und der Strom gemessen (Fig.13), so kann festgestellt werden, dass das Verhältnis von Spannung zu Strom grösser ist, als das Ohmsche Gesetz vorhersagt. Der Effekt wird noch stärker, wenn in die Spule ein Eisenkern ein-gefügt wird. Da der Eisenkern einer Spule den Ohmschen Widerstand einer Spule nicht beeinflusst, muss dieser für Wechselströme typische Widerstand eine andere Ursache haben.

*Spannung
und Strom*

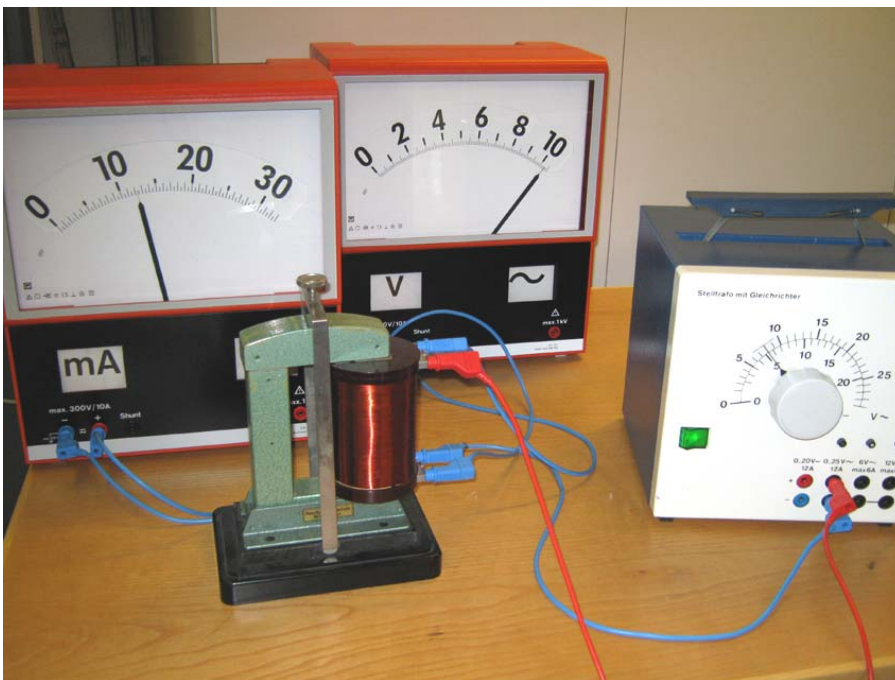


Fig.13. Messung des Widerstandes an einer Spule: Bei einer Wechselspannung (50 Hz) von 10 V (Effektivwert) stellt sich ein Strom von 12 mA ein. Daraus ergibt sich ein Widerstand von 833Ω , viel mehr als der Ohmsche Widerstand des Kupferdrahtes.

Die Erklärung liefert die Selbstinduktion in einer Spule. Ändert sich der Stromfluss in einer Leiterschleife der Spule, so ändert sich auch das magnetische Feld um die Spule herum. Dies führt zu einer Änderung des magnetischen Flusses bei benachbarten Windungen (Fig.14). Spulen können somit zur induktiven Strombegrenzung benutzt werden (Drossel). Diese werden u.a. bei Entladungslampen angewendet.

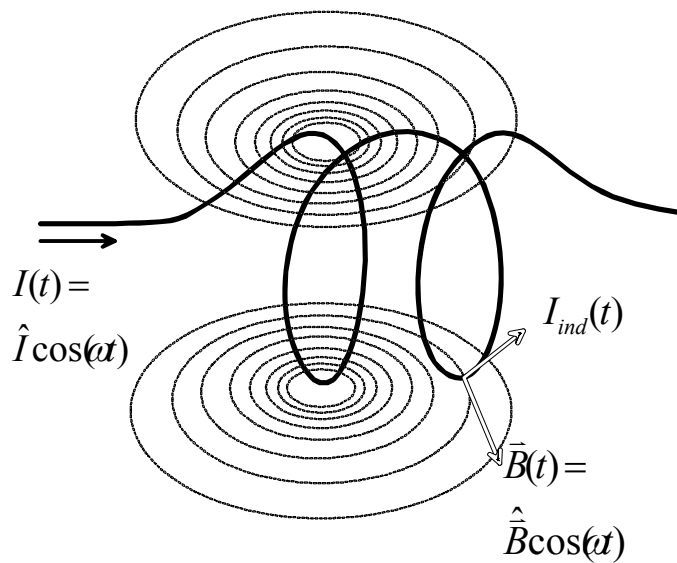


Fig.14. Selbstinduktion in einer Spule

Aus Fig.14 ist zu erkennen, dass der induzierte Strom der ursprünglichen Stromrichtung entgegen gesetzt ist. Dies entspricht einem Grundprinzip: Der induzierte Effekt ist dem induzierenden Prozess entgegen gesetzt. Wäre dies nicht so, hätten wir ein Perpetuum mobile, der Energiesatz wäre verletzt.

Lenz'sche Regel

Theorie

Das Induktionsgesetz kann einerseits über die Änderung des magnetischen Flusses durch eine Spule formuliert werden. Wird an Stelle eines Permanentmagnetes ein Elektromagnet in Form einer stromdurchflossenen Spule verwendet, so ist aber auch eine Formulierung über die Änderung der elektrischen Stromstärke möglich. Die Grösse, welche den Zusammenhang vermittelt, ist die Induktivität L .

$$L = NA \cdot \frac{\dot{B}}{\dot{I}} = NA \cdot \frac{dB}{dI}$$

Ändert sich der Stromfluss durch eine Spule, so ändert sich auch der magnetische Fluss durch diese Spule und es kommt in der Spule zu einer induzierten Spannung U_L (Selbstinduktion):

Selbst-Induktion

$$U_L = -L \frac{dI}{dt} \quad (\text{Eq.50})$$

Das negative Vorzeichen widerspiegelt den Umstand, dass der induzierte Effekt dem induzierenden Prozess entgegen gesetzt ist. Dadurch besitzt eine Spule einen Widerstand für Wechselströme mit der Kreisfrequenz ω , welcher auch als Impedanz Z bezeichnet wird:

Impedanz

$$Z = \frac{U}{I} = \omega L \quad (\text{Eq.51})$$

Die Einheit von Z ist $[Z] = \Omega$, die Induktivität besitzt die Einheit $[L] = \text{H}$ (Henry).

Die in einer Spule mit der Induktivität L gespeicherte Energie E_m ist abhängig von der Stromstärke I , welche die Spule durchfließt:

Energie einer strom-durchflossenen Spule

$$E_m = \frac{1}{2} LI^2 \quad (\text{Eq.52})$$

Wird eine Spule von einem Wechselstrom durchflossen, so baut sich das Magnetfeld mit der Frequenz des Stromes auf und wieder ab. Dies führt zu einer Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung. Die Berechnung dieser Phasenverschiebung kann über das Kirchhoffsche Gesetz für Maschen (Maschenregel) erfolgen. Dabei soll eine Spannungsquelle betrachtet werden, welche die Wechselspannung $U(t)$ liefert. Wenn Spule und Drähte (Leiter) einen vernachlässigbaren Widerstand haben, muss im Weiteren nur die Spannung U_L über Spule berücksichtigt werden. Gemäss der Maschenregel gilt: $U(t) + U_L = 0$. Mit dem Induktionsgesetz Eq.50 ergibt sich:

$$\hat{u} \cdot \sin(\omega t) = -U_L = +L \cdot \frac{dI}{dt} \quad (\text{Eq.53})$$

somit gilt:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\hat{u}}{L} \cdot \sin(\omega t) \quad (\text{Eq.54})$$

Die Gleichung Eq.54 lässt sich leicht integrieren:

$$\begin{aligned}
 I(t) &= \int dI = \frac{\hat{u}}{L} \int \sin(\omega t) \cdot dt \\
 &= -\frac{\hat{u}}{\omega L} \cdot \cos(\omega t) = \hat{i} \cdot \cos(\omega t)
 \end{aligned}
 \tag{Eq.55}$$

Strom und Spannung sind $\pi/2$ phasenverschoben. Allgemein gilt für $U(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_1)$ und $I(t) = \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi_2)$ die Relation

$$\varphi_1 - \varphi_2 = +\frac{\pi}{2}.$$

*Phasen-
Verschiebung*

Die Induktivitäten für Spulen hängen von Geometrie, Windungszahl und Material des Spulenkerns ab. Für lange Spulen gilt:

$$L = \frac{\mu_r \mu_0 \cdot N^2 A_L}{l} \tag{Eq.56}$$

*Formeln für
Induktivi-
täten*

Für andere Geometrien sind in der Fachliteratur entsprechende Formeln angegeben.

Werden zwei Spulen um ein Eisenjoch angeordnet, so entsteht ein Spannungswandler oder auch Transformator genannt. Wird durch eine Spule ein Wechselstrom gelassen, so erzeugt diese einen zeitlich ändernden magnetischen Fluss, welcher in der zweiten Spule eine Wechselspannung induziert. Bei verlustfreier Übertragung ist die magnetische Feldstärke durch beide Spulen gleich: $B_1 = B_2$. Dies gilt auch für die zeitliche Änderung: $\dot{B}_1 = \dot{B}_2$. Wenn beide Spulen die gleiche Querschnittsfläche A_L haben, jedoch die eine Spule (Primärspule) N_1 Windungen und die zweite Spule (Sekundärspule) N_2 Windungen, so gilt gemäss Induktionsgesetz für die Spannungen über den Spulen:

*Trans-
formatoren*

$$U_1 = -N_1 \cdot A_L \cdot \frac{dB}{dt}$$

und

$$U_2 = -N_2 \cdot A_L \cdot \frac{dB}{dt}$$

Durch Division der beiden Gleichungen erhält man die Transformatorgleichung:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (\text{Eq.56})$$

Ein- und Ausschaltprozesse bei einem Transformator (und bei Spulen generell) lassen sich gut mit dem Computer simulieren. Dazu soll die Schaltung in Fig.16 betrachtet werden. Es gilt

$U_Q + U_R + U_1 = 0 = U_Q - I_1 R_1 - L_1 \dot{I}_1$. Daraus ergibt sich die Differentialgleichung $L_1 \dot{I}_1 = U_Q - I_1 R_1$. Somit gilt für die Stromstärke im Primärkreis:

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{U_Q}{L_1} - \frac{R_1}{L_1} I_1 \quad (\text{Eq.57})$$

Und für die Sekundärspannung:

$$U_2 = \frac{L_1 N_2}{N_1} \cdot \frac{dI_1}{dt} \quad (\text{Eq.58})$$

Ein- und Ausschaltprozesse



Fig.15. Hochspannungstransformator

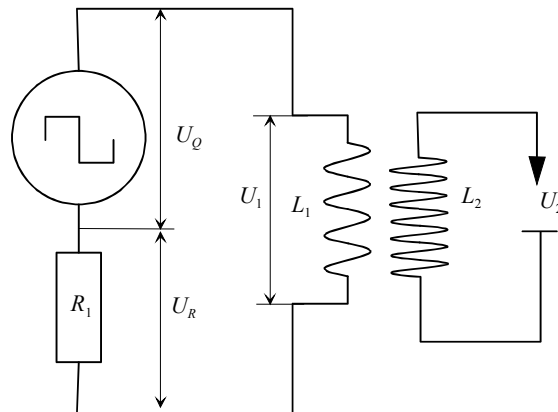


Fig.16. Schaltschema eines durch eine Spannungsquelle angesteuerten Transformators: Wird eine Gleichspannungsquelle mit einem selbstunterbrechenden Relais verwendet, entspricht dies einem Funkeninduktor. Allerdings wird dann nicht die Spannung, sondern der Strom geschaltet: Dies führt zu massiv höheren Primär- und Sekundärspannungen, da sich mit Öffnen des Relais der Widerstand R_1 ändert!

Aufgaben

A1. Zeigen Sie, dass die Einheit Henry $H = \text{Vs} / \text{A}$ ist.

A2. Eine lange, hohle Spule mit 200 Wdg., einer Länge von 40 cm und einer Querschnittsfläche von 10 cm^2 werde von einem Gleichstrom mit der Stärke von 0.5 A durchflossen.

- Welche Energie wird in der Spule gespeichert?
- Welche Spannung wird induziert, wenn der Strom innerhalb von 5 ms abgeschaltet würde?
- Wie gross wäre die Impedanz für einen Wechselstrom mit einer Frequenz von 1 kHz?

A3. Eine Wechselspannung ($\nu = 50 \text{ Hz}$) von 220 V soll auf eine Wechselspannung von 12 kV transformiert werden. Die Primärspule habe 600 Wdg. und die Spulenlänge betrage 0.1 m. Der Transformator habe einen Eisenkern mit $\mu_r = 400$ und einer Querschnittsfläche $A_L = 10^{-3} \text{ m}^2$. (Für die folgenden Teilaufgaben lange Spule annehmen!)

- Welche Windungszahl muss die Sekundärspule haben?
- Welche Windungszahl müssten Primär- und Sekundärspule haben, wenn eine Stromstärke von 1.5 A auf der Primärseite nicht überschritten werden soll?

A4. Die Primärspule eines Transformators bestehe aus 1200 Windungen. Auf der Sekundärseite werde eine Sekundärspannung von 8 kV gemessen, wenn auf der Primärseite eine Wechselspannung von 220 V anliegt (bei $\nu = 50$ Hz).

- a) Wie viele Windungen besitzt die Sekundärseite?
- b) Welche Windungszahl müsste die Primärspule haben, wenn bei gleicher Impedanz die Frequenz von 50 Hz auf 200 Hz erhöht wird? (Annahme: lange Spule)

A5. An der Primärseite eines Transformators liegt eine Spannung von 220 V an. Die Primärspule des Trafos besteht aus 1400 Windungen, die Sekundärspule hat 70 Windungen.

- a) Welche Spannung wird auf der Sekundärseite des Transformators gemessen?
- b) Wie gross müsste die Anzahl Windungen auf der Sekundärseite sein, damit die Spannung 2 V betragen würde?

A6. Durch eine Spule mit einer Induktivität von 0.4 H fliesse ein Gleichstrom von 10 A. Nun werde der Strom ausgeschaltet, wobei die Stromstärke innerhalb von 1 ms auf 0 A zurückgeht.

- a) Welche Energie wird vor dem Abschalten in der Spule gespeichert?
- b) Wie gross ist die induzierte Spannung beim Ausschalten des Stromes?
- c) Die Spule werde von einer zweiten Spule mit einer Induktivität von 10 H umgeben. Welche Spannung kann beim Ausschalten des Stromes erwartet werden.
- d) Programmieren Sie eine Computersimulation für Teilaufgabe c, allerdings für das Schalten der Primärspannung. Was stellen Sie im Vergleich zu Teilaufgabe (c) fest?
- e) Wie verhält sich die Spule, wenn Sinus-, Rechteck- und Sägezahnförmige Spannungen an die Spule angelegt werden?

Lösungen

L1. $V = H \cdot A / s \rightarrow H = Vs / A$

L2.

(a) $E_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{\mu_0 \cdot N^2 A}{2l} \cdot I^2 = \underline{15.7 \cdot 10^{-6} J}$

(b) $U = L \frac{dI}{dt} = 125.7 \cdot 10^{-6} H \cdot \frac{0.5 A}{5 \cdot 10^{-3} s} = \underline{12.6 mV}$

(c) $Z = \omega L = 2\pi \cdot 10^3 Hz \cdot 0.1257 \cdot 10^{-3} H = \underline{0.79 \Omega}$

L3.

(a) $N_2 = N_1 \cdot \frac{U_2}{U_1} = 32727 Wdg.$

(b)

$$U = ZI = \omega L \cdot I = \omega \cdot \frac{\mu_r \mu_0 \cdot N_1^2 A}{l} \cdot I$$

$$N_2 = 16364 Wdg.$$

$$N_1 = \sqrt{\frac{U \cdot l}{\mu_r \mu_0 A \cdot I \cdot \omega}} \approx 300 Wdg.$$

L4. (a) $N_2 = 43636 Wdg.$ (b) $N_{12} = N_{11} \cdot \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} = 600 Wdg.$

L5.

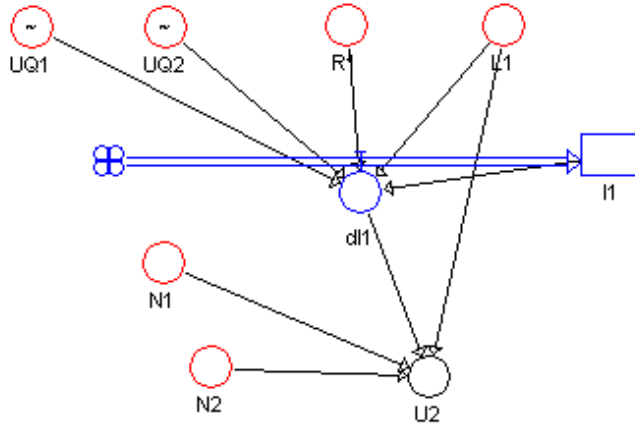
(a) $\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} \rightarrow U_2 = U_1 \frac{N_2}{N_1} = \underline{11 V}$ (b) $N_2 = N_1 \frac{U_2}{U_1} = \underline{12.7 Wdg.}$

L6.

(a) $E_m = \frac{1}{2} LI^2 = \underline{20 J}$ (b) $U_{ind} = U_L = L \frac{dI}{dt} = L \frac{\Delta I}{\Delta t} = \underline{4000 V}$

(c) $U_2 = U_1 \cdot \frac{N_2}{N_1} = U_1 \cdot \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = 2 \cdot 10^5 V = \underline{20 kV}$

L6d) Folgendes Flussdiagramm repräsentiert das System:



Zustandsgleichungen

$$I1.\text{neu} \leftarrow I1.\text{alt} + dt \cdot (dI1)$$

Startwert $I1 = 0$

Zustandsänderungen

$$dI1 = (UQ1 + UQ2) / L1 - (R1 / L1) \cdot I1$$

Konstanten

$$R1 = 5$$

$$L1 = 0,005$$

$$N1 = 100$$

$$N2 = 10000$$

Zwischenwerte

$$UQ2 = \text{Tabelle}(\text{Zeit})$$

$$((0.02; 0.00)(0.02; 0.00)(0.02; 10.80)(0.02; 10.80)(0.02; 10.80)$$

$$(0.03; 10.80)(0.03; 10.80)(0.03; 10.85)(0.03; 10.80)(0.03; 0.00)$$

$$(0.03; 0.00))$$

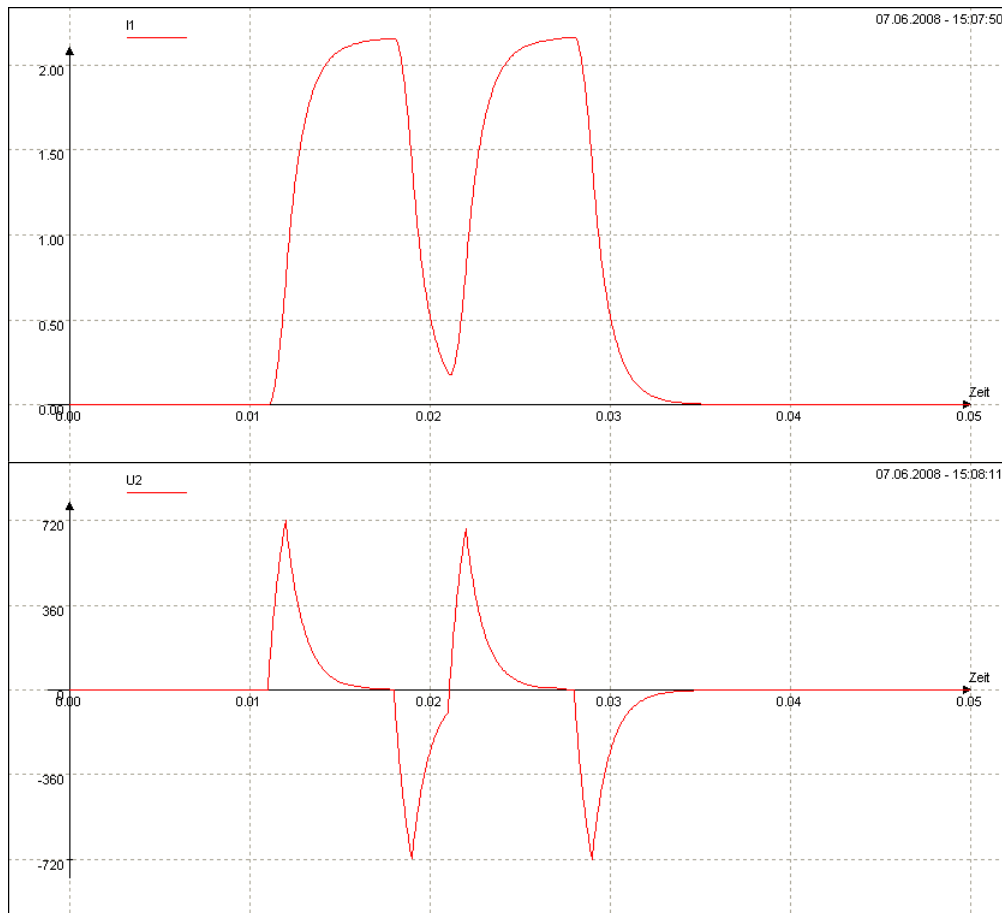
$$UQ1 = \text{Tabelle}(\text{Zeit})$$

$$((0.01; 0.00)(0.01; 0.00)(0.01; 10.80)(0.01; 10.80)(0.01; 10.80)$$

$$(0.02; 10.76)(0.02; 10.80)(0.02; 10.80)(0.02; 10.80)(0.02; 0.00)$$

$$(0.02; 0.00))$$

$$U2 = (L1 \cdot N2 / N1) \cdot dI1$$



Die Gleichung Eq.57 kann durch Substitution gelöst werden:

$$J(t) = \frac{U_0}{L_1} - \frac{R_1}{L_1} \cdot I_1(t)$$

und

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{R_1}{L_1} \cdot \frac{dI_1}{dt}$$

Es resultiert damit folgende Differentialgleichung:

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{R_1}{L_1} \cdot J$$

mit der Lösung

$$J(t) = J_0 \cdot e^{-\frac{R_1}{L_1} t}$$

Durch Rücksubstitution ergibt sich:

$$I(t) = \frac{U_Q}{R_1} - \left(\frac{U_Q}{R_1} - I_1(0) \right) \cdot e^{-\frac{R_1}{L_1} t}$$

Für den Einschaltprozess kann $I_1(0) = 0$ gesetzt werden, es resultiert

$$I_1(t) = \frac{U_Q}{R_1} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R_1}{L_1} t} \right)$$

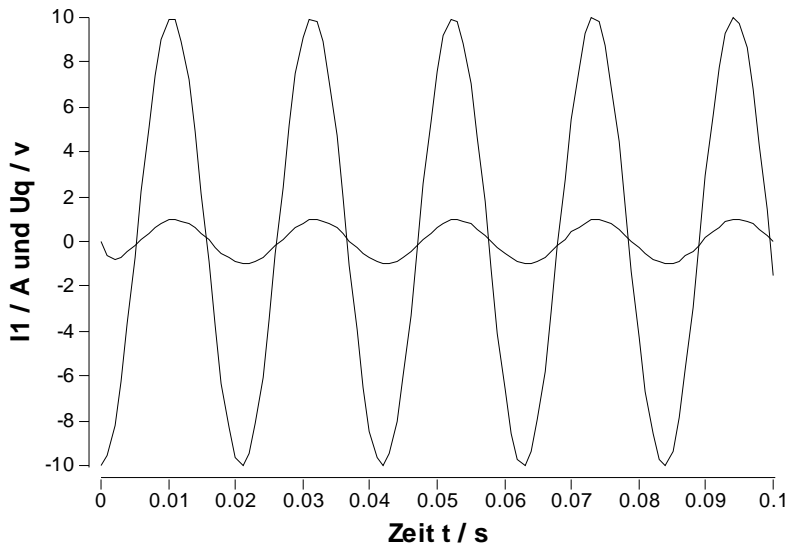
Beim Ausschalten hingegen ist $U_Q = 0$, also gilt:

$$I_1(t) = I_1(0) \cdot e^{-\frac{R_1}{L_1} t}$$

Dies entspricht einem exponentiellen Abfall der Stromstärke. Es zeigt sich somit eine Analogie zum Laden und Entladen eines Kondensators. Während bei der Spule die Speichergrösse die Stromstärke ist, werden beim Kondensator Ladungen gespeichert. Die mathematische Struktur bleibt erhalten, wenn die elektrische Ladung durch die Stromstärke und die Stromstärke durch die zeitliche Änderung des Stroms ersetzt wird.

Die Simulation erlaubt das Testen von diversen Signalen. Für eine sinusförmige Quellenspannung lässt sich die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung in Abhängigkeit der Last untersuchen. Für eine kleine Last (= grosser Widerstand) sind Spannung und Strom praktisch in Phase (Fig.A), während für eine zunehmende Last die Phasendifferenz grösser wird (Fig.B). Sehr schön lässt sich dieser Effekt auch im Phasendiagramm zeigen (Fig.C & D).

Werden Sägezahn- oder Rechteckförmige Spannungen angelegt, so lässt sich bei zunehmender Induktivität eine Filterwirkung bezüglich den hohen Frequenzen beobachten: Die Trägheit der Spule lässt dies also zum Tiefpassfilter werden (Fig.E-H).



*Last-abhängige
Phasen-
verschiebung*

Fig.A. Spannungs- und Stromkurven bei kleiner Last ($R = 10 \Omega$): Strom und Spannung sind praktisch in Phase, das Verhältnis von Spannungs- und Stromamplitude ist durch den Ohmschen Widerstand bestimmt; $L = 5 \text{ mH}$, $\omega = 300 \text{ s}^{-1}$.

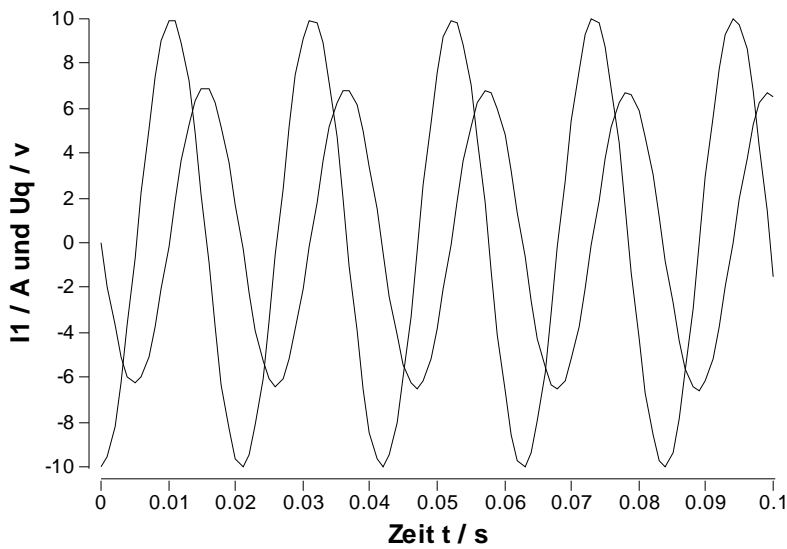


Fig.B. Spannungs- und Stromkurven bei grosser Last ($R = 0.1 \Omega$): Strom und Spannung sind praktisch in Phase, das Verhältnis von Spannungs- und Stromamplitude ist nun nicht mehr alleine durch den Ohmschen Widerstand bestimmt; $L = 5 \text{ mH}$, $\omega = 300 \text{ s}^{-1}$.

*Phasen-
diagramme*

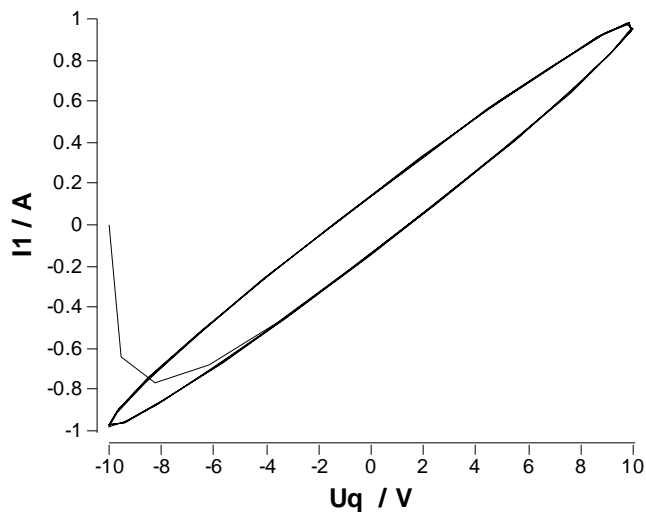


Fig.C. Phasendiagramm bei kleiner Last ($R = 10 \Omega$): Strom und Spannung sind praktisch in Phase, das Verhältnis von Spannungs- und Stromamplitude ist durch den Ohmschen Widerstand bestimmt, welches hier einer gerade mit Steigung $1/R$ entsprechen würde; $L = 5 \text{ mH}$, $\omega = 300 \text{ s}^{-1}$.

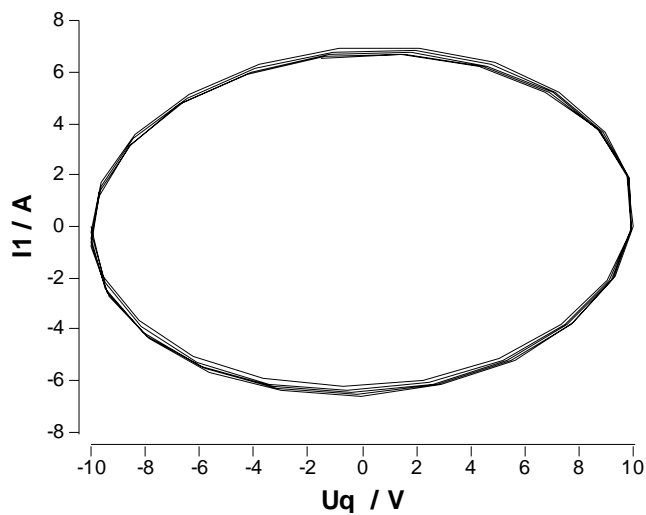
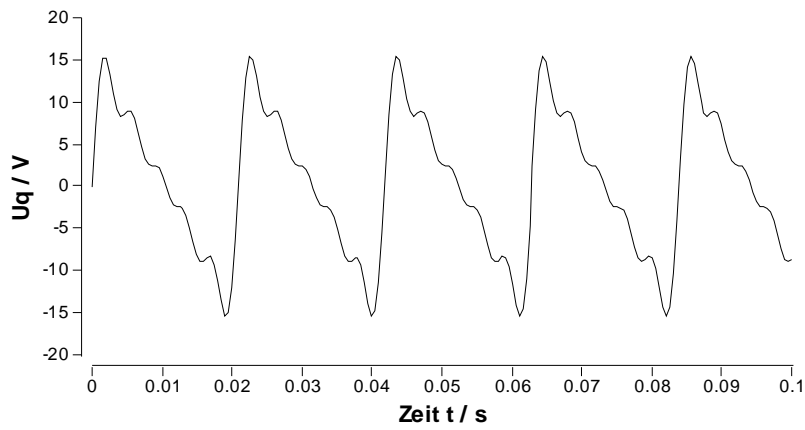


Fig.D. Phasendiagramm bei grosser Last ($R = 0.1 \Omega$): Die Phasenverschiebung macht sich als kreisförmige Bahn bemerkbar (die leichten Ecken sind durch die grossen Zeitschritte, also die Numerik bestimmt); $L = 5 \text{ mH}$, $\omega = 300 \text{ s}^{-1}$.



*Sägezahn-
förmige
Quellen-
spannung*

Fig.E. Sägezahn-förmige Quellenspannung.

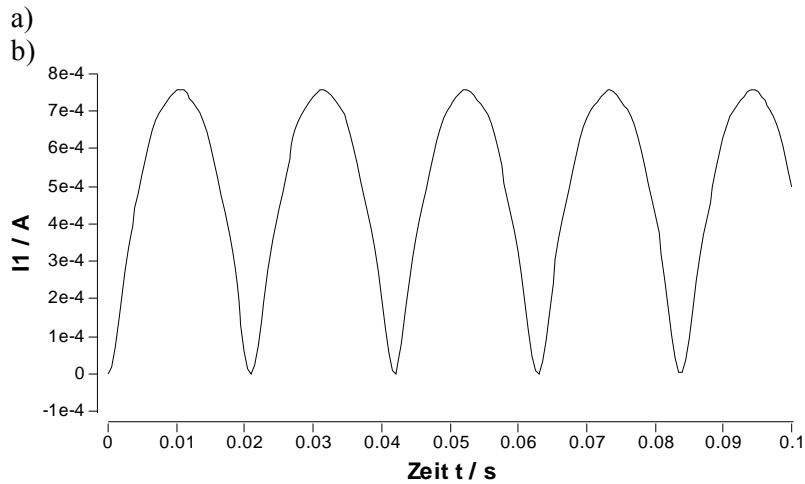
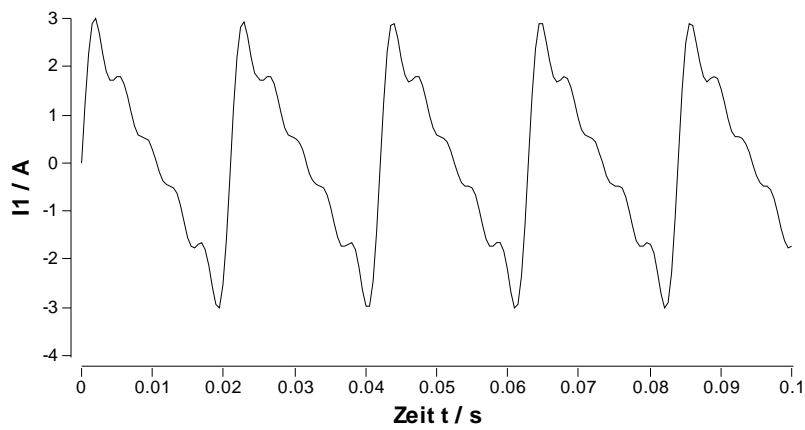
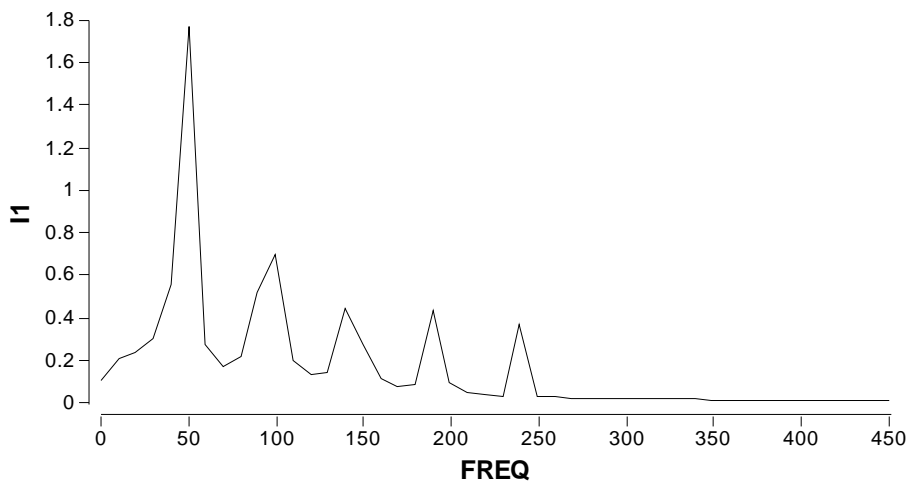


Fig.F. Strom als Funktion der Zeit: Der Filtereffekt ist deutlich zu erkennen beim Diagramm (b); $R = 5 \Omega$, (a) $L = 1 \text{ mH}$, (b) $L = 100 \text{ H}$.



*Filterwirkung
bei Sägezahn-
Kurve*

Fig.G. Spektrum von Diagramm Fig.Fa: Die Beiträge der einzelnen Sinus-Schwingungen sind deutlich zu erkennen.

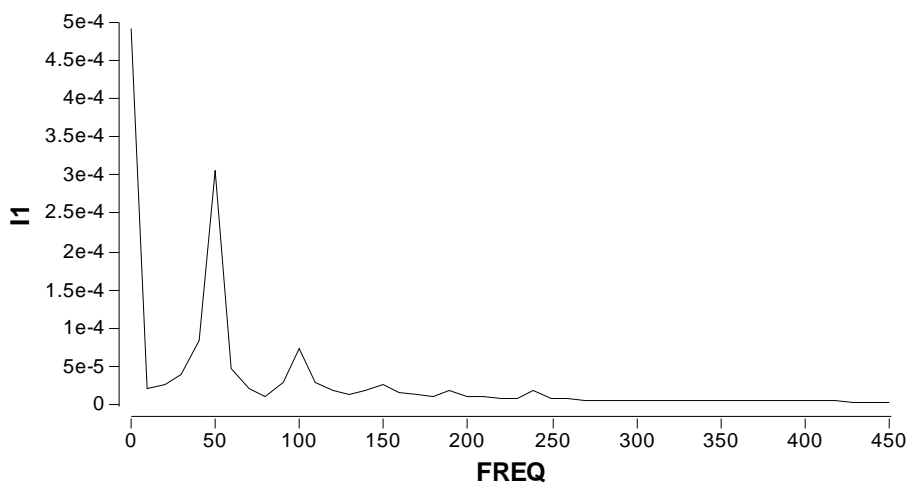


Fig.H. Spektrum von Diagramm Fig.Fb: Die hohen Frequenzen sind im Verhältnis zu den Grundfrequenzen deutlich gedämpft.

Achtung - Die Wirkung eines Filters auf Strom und Spannung ist unterschiedlich: Bei Induktivitäten führt eine Frequenzerhöhung zu tieferen Strömen, bei Kapazitäten (nächster Abschnitt) führt eine Frequenzerhöhung zu höheren Strömen, jedoch tieferen Spannungen über der Kapazität.

Die Frequenzabhängigkeit der Dämpfung bzw. der Impedanz kann sehr schön mit folgendem Signal gezeigt werden:

*Frequenz-
Abhängigkeit
der Impedanz*

$$U_Q = U_0 \cdot \sin(\omega t^2)$$

Hier steigt die Frequenz linear mit der Zeit an, was zu einer entsprechenden Dämpfung führt (Fig.I & K).

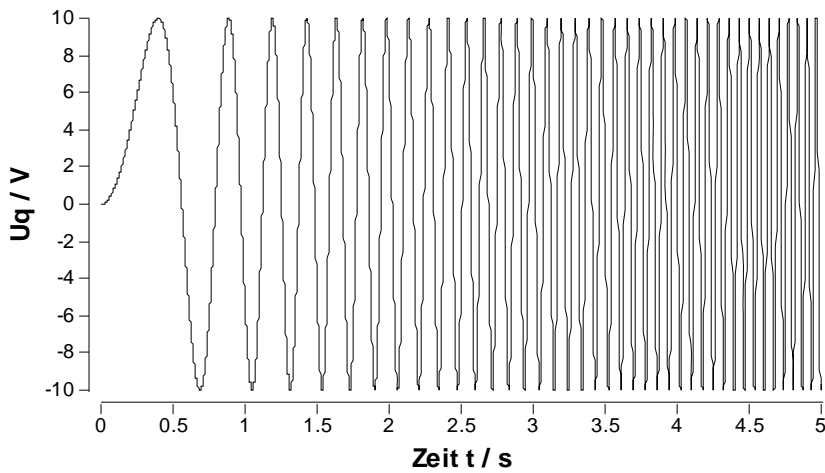


Fig.I.

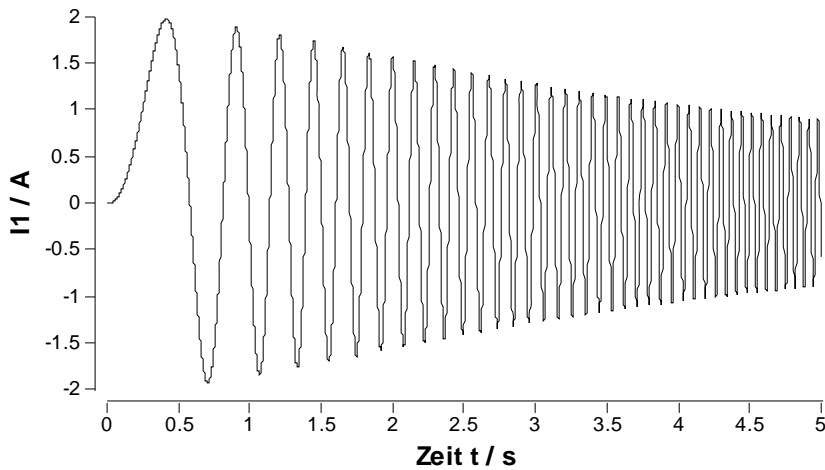


Fig. K.

Experiment

Ein interessantes Experiment im Zusammenhang mit Induktivitäten ist der Funkeninduktor (Fig.16). Dabei wird nicht die Spannung, sondern der Strom geschaltet. Die Simulation liefert bei Schaltung der Spannung einen symmetrischen Ausschlag der über Primär- und Sekundärspule anliegenden Spannung. Wird hingegen die Schaltung des Stromes durch einen zeitlich veränderlichen Widerstand $R = R(t)$ simuliert, kann auch in der Simulation die Spannungüberhöhung beim Ausschalten beobachtet werden (Fig.17).

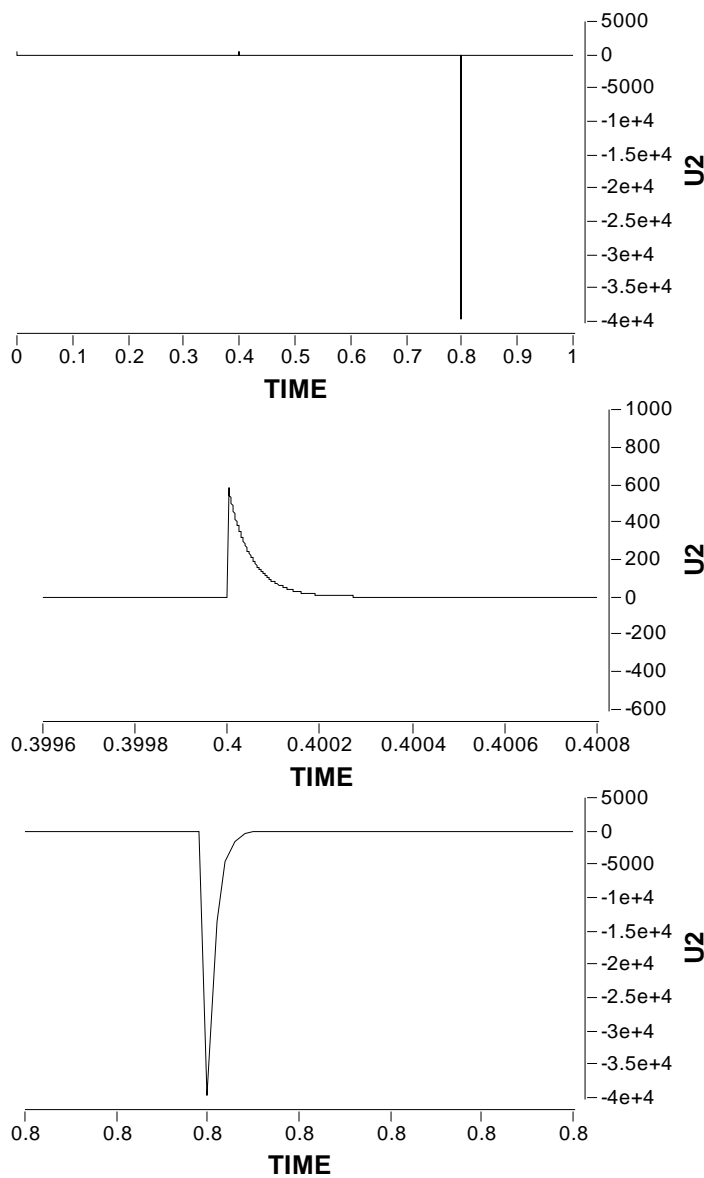


Fig.17. Ausschalt-Spannungspuls bei 0.8 s und der deutlich kleinere Einschalt-Puls bei 0.4 s, unten: vergrößerte Ausschnitte.

842 Impedanz von Kondensatoren

Theorie

Für Gleichströme ist ein Kondensator ein unüberwindbares Hindernis, der elektrische Widerstand ist quasi unendlich gross. Dies gilt für Wechselströme nicht mehr. Wird an einen Kondensator eine Wechselspannung mit der Kreisfrequenz ω angelegt, so werden auf beiden Seiten durch den Influenzeffekt Ladungen verschoben – es fliesst somit ein Strom. Einem Kondensator kann deshalb ein Wechselstromwiderstand Z (Impedanz) zugeschrieben werden, welcher mit zunehmender Frequenz abnimmt:

$$Z = \frac{1}{\omega C} \quad (\text{Eq.59})$$

Dabei ist C die Kapazität des Kondensators. Auch hier gilt für die Impedanz:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} \quad (\text{Eq.60})$$

wobei U und I die Effektivwerte von Spannung und Stromstärke darstellen.

Auch bei einem Kondensator sind Strom und Spannung phasenverschoben. Diese Verschiebung kann wieder mittels Maschenregel berechnet werden. Im Stromkreis gilt: $U(t) + U_C = 0$. Dabei ist $U(t) = \hat{u} \sin(\omega t)$ die von der Spannungsquelle gelieferte elektrische Spannung. Mit $U_C = -Q/C$ resultiert:

$$\hat{u} \sin(\omega t) = \frac{Q(t)}{C} \quad (\text{Eq.61})$$

Durch Ableiten lässt sich die Stromstärke berechnen:

$$\begin{aligned} I &= \frac{d}{dt} [C\hat{u} \cdot \sin(\omega t)] = C\hat{u}\omega \cdot \cos(\omega t) \\ &= \hat{i} \cdot \cos(\omega t) = \hat{i} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{Eq.62})$$

Offensichtlich gilt: $\hat{i} = C\omega \cdot \hat{u}$, was mit Eq.59 übereinstimmt. Die Phasendifferenz zwischen Spannung und Strom ist nun $\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$.

*Widerstand
eines
Kondensators*

Impedanz

*Phasen-
Verschiebung*

Aufgaben

A1. An zwei parallele Metallplatten mit je einer Fläche von 20 cm^2 und einen Abstand von 2 mm werde eine Wechselspannung von 400 V (Effektivwert) angelegt.

- a) Welcher Strom fließt bei einer Frequenz von 50 Hz ?
- b) Welcher Strom fließt bei einer Frequenz von 200 Hz ?
- c) Bei welcher Frequenz würde der Effektivwert für die Stromstärke von 1 A überschritten?

A2. Ein Zylinder aus Teflon ($\mu_r = 2$) mit der Länge l und mit einer Wanddicke von 3 mm und einem Innendurchmesser von 12 cm werde aussen und innen mit einer Alufolie beklebt.

Wie gross muss die Länge l sein, damit bei einer Frequenz von 2 kHz eine Impedanz von 10Ω erreicht wird?

A3. An einem Kondensator mit einer Kapazität von 2 mF liegt eine Wechselspannung von 20 V an. Die Frequenz betrage 60 Hz .

- a) Welcher Strom fließt durch den Kondensator?
- b) Wie ändert sich der Strom, wenn die Frequenz auf 100 Hz erhöht wird?
- c) Angenommen, der Kondensator soll durch zwei Platten mit je einer Fläche von 400 cm^2 realisiert werden, welche durch eine PVC-Folie getrennt sind: Wie dick muss die Folie sein?

A4. Die Wirkung eines Kondensators im Wechselstromkreis soll mittels Computer (Berkeley Madonna, Vensim o.ä.) simuliert werden. Dabei soll ein Kondensator an einer Spannungsquelle angeschlossen werden. Ohmscher Innen- und Aussenwiderstand sollen durch einen Widerstand in Serie zum Kondensator berücksichtigt werden.

Wie Verhält sich die Phasenverschiebung in Abhängigkeit von Kapazität und Ohmschen Widerstand?

Lösungen

L1.

(a)

$$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \rightarrow I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\frac{1}{\omega C}} = U \omega \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

$$= 400V \cdot 314s^{-1} \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-3} m^2}{2 \cdot 10^{-3} m} = \underline{1.11 \mu A}$$

(b)

$$I(200Hz) = 4 \cdot I(50Hz) = \underline{4.44 \mu A}$$

(c)

$$I(v) = n \cdot I(50Hz) = 1A \rightarrow n = \frac{1}{1.11} \cdot 10^6 = 0.9 \cdot 10^6$$

$$v = n \cdot 50Hz = \underline{45 \cdot 10^6 Hz} = \underline{45 MHz}$$

L2.

$$Z = \frac{1}{\omega C} = \frac{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}{\omega \cdot 2\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 l} \rightarrow l = \frac{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}{2\pi \omega \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot Z} = \frac{\ln\left(\frac{6.3}{6}\right)}{16\pi^2 \cdot 8.85} \cdot 10^8 m = \underline{3491.2 m}$$

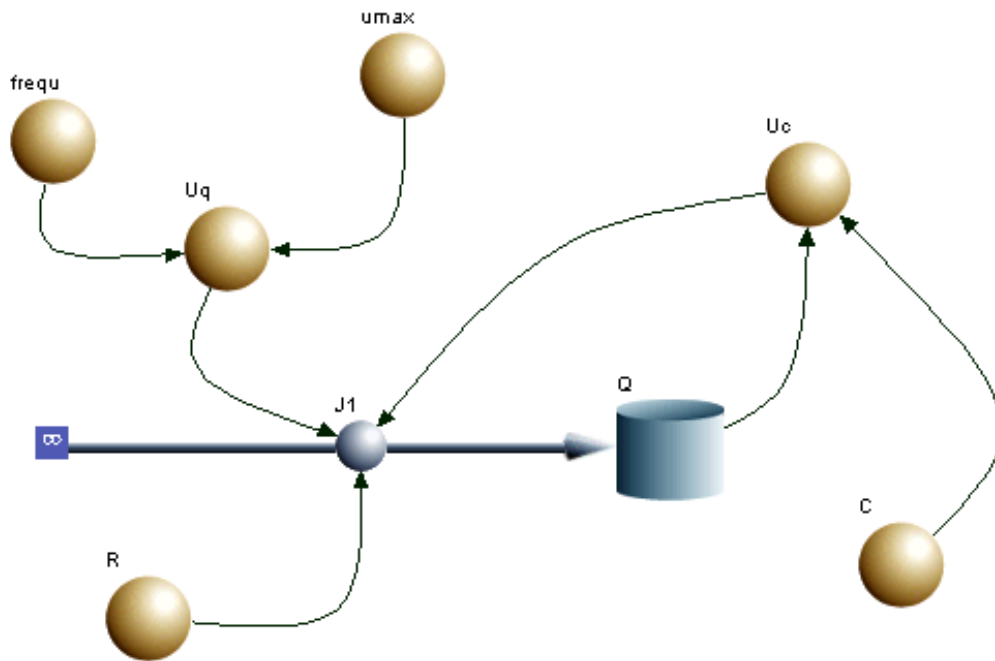
L3.

$$(a) Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C} \rightarrow I = \omega C U = \underline{15.1 A}$$

$$(b) I = \omega C U = \underline{25.1 A}$$

$$(c) C = \varepsilon \frac{A}{d} \rightarrow d = \varepsilon \frac{A}{C} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{C} = \underline{10^{-9} m} = \underline{1 nm}$$

L4. Berkeley-Madonna Flowchart:



Gleichungen:

<pre>{Top model} {Reservoirs} d/dt (Q) = + J1 INIT Q = 0 {Flows} J1 = (Uq-Uc)/R</pre>	<pre>{Functions} Uq = umax*cos(frequ*time) frequ = 315 umax = 1 R = 1 C = 1 Uc = Q/C {Globals} {End Globals}</pre>
---	--

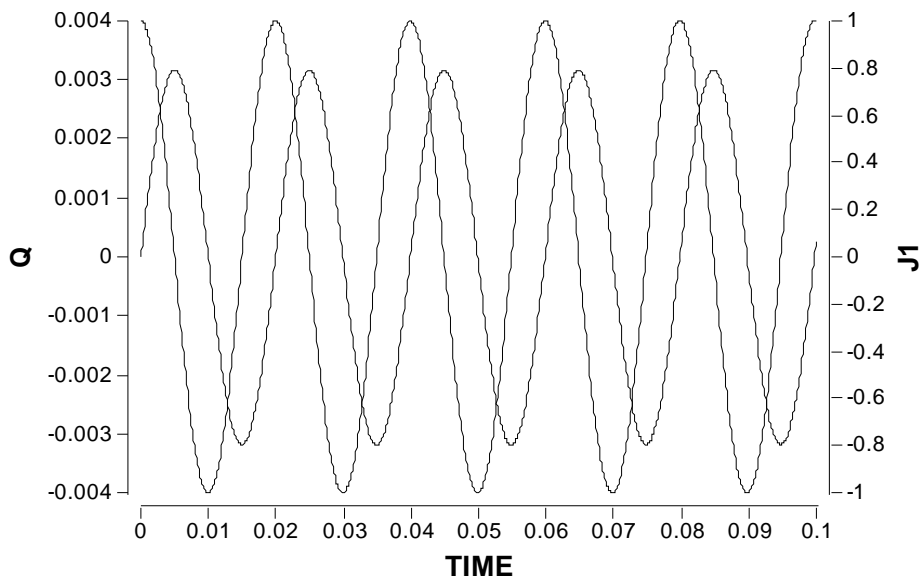


Fig.A. Gespeicherte Ladung und Strom als Funktion der Zeit ($C = 1 \text{ F}$, $R = 1 \Omega$)

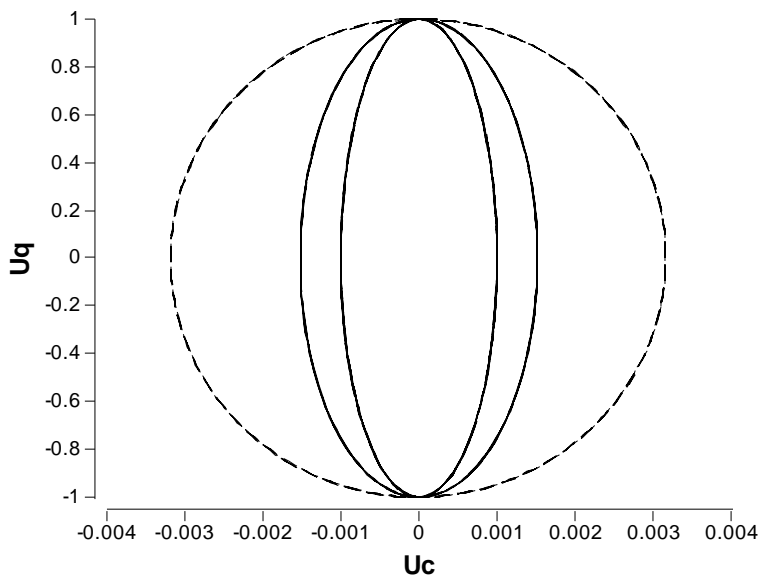


Fig. B. Phasendiagramm für verschiedene Frequenzen ($\omega = 315 \text{ s}^{-1}$, 658 s^{-1} , 1000 s^{-1})

843 Schwingkreis

Theorie

Schwingkreise spielen in der Technik eine wichtige Rolle. Dabei handelt es sich um eine Art elektrisches Pendel.

Für die folgende Schaltung (Fig.15) sollen die Spannungen und Ströme betrachtet werden.

*Betrachtung
der Teil-
Spannungen*

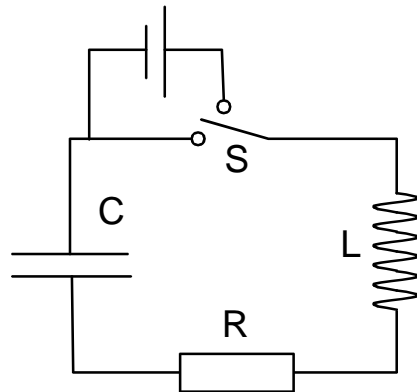


Fig.15. Induktivität und Kapazität in einem Stromkreis

Über einen Schalter kann mit einem Gleichspannungsnetzgerät der Kondensator aufgeladen werden (über den Widerstand R und die Induktivität L). Wird der Schalter (S) geschlossen, entlädt sich der Kondensator (C) über die Spule (L) und den Widerstand (R). Nun soll die Bewegung der elektrischen Ladung im Stromkreis berechnet werden. Mit der 2. Regel des Kirchhoffschen Gesetzes (Maschenregel, Abschnitt 513) ergibt sich:

Maschenregel

$$\sum_k I_k R_k = \sum_k U_k = U_C + U_R + U_L = 0 \quad (\text{Eq.63})$$

Die Summe der Spannungen über dem Kondensator (U_C), Widerstand (U_R) und der Spule (U_L) ist null, da der Schalter geschlossen ist! Mit $Q = CU$, dem Ohmschen Gesetz $U = RI$ und dem Induktionsgesetz resultiert:

$$\frac{Q}{C} + RI + L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (\text{Eq.64})$$

Die Ladung $Q = Q(t)$ ist eine zeitabhängige Funktion. Genau genommen handelt es sich um die Ladung auf einer Seite des Kondensators. Der Zusammenhang zum Stromfluss ergibt sich durch $I = dQ/dt$. Durch Ersetzen von allen Strömen in Eq.64 ergibt sich folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{Q}{LC} - \frac{R}{L} \cdot \frac{dQ}{dt} \quad (\text{Eq.65})$$

Wird der Widerstand $R = 0$ gesetzt, resultiert eine aus dem Kapitel 400 bekannte Gleichung:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC} \cdot Q \quad (\text{Eq.66})$$

Gemäss Abschnitt 412 lässt sich die Ladung als Funktion der Zeit durch folgende Funktion beschreiben: $Q(t) = \hat{Q} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$. Durch Einsetzen kann gezeigt werden, dass es sich um die Lösung von Eq.66 handelt. Die Ladung pendelt also mit der Kreisfrequenz ω hin und her - es handelt sich um eine Art elektrisches Pendel, Schwingkreis oder Oszillator genannt. Analog zu Abschnitt 412 gilt für die Kreisfrequenz:

Oszillation

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{Eq.67})$$

Wird zusätzlich noch ein Widerstand berücksichtigt, so resultiert für die Spannung $U(t) = Q(t)/C$ eine gedämpfte Schwingung, analog zu Abschnitt 413 und 625:

gedämpfte
Schwingung

$$U(t) = \hat{u} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \sin(\omega t) \quad (\text{Eq.68})$$

Gemäss Abschnitt 413 gilt $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 = 1/(LC) - (R/(2L))^2$. Von einer RCL-Serieschaltung kann auch die Impedanz berechnet werden. Phasenverschiebung und Impedanz können graphisch veranschaulicht werden. Dafür eignet sich ein Phasendiagramm (Fig.16).

*Impedanz
einer RCL-
Serie*

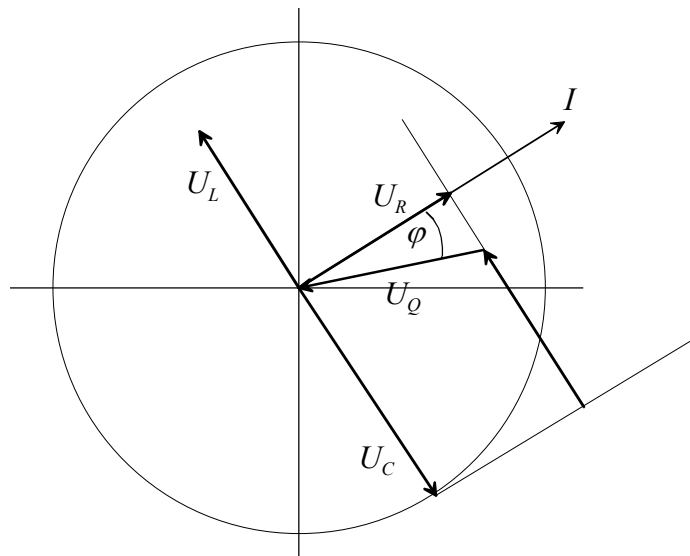


Fig.16. Phasendiagramm für RCL-Serie

Das Konzept des Phasendiagramms für elektrische Schaltungen beruht auf der Darstellung komplexer Ströme und Spannungen im komplexen Zahlenraum⁹. Konkret kann man sich vorstellen, dass die Strom- und Spannungszeiger im Gegenuhrzeigersinn rotieren. Die Projektion auf die horizontale Achse (Realteil) entspricht einer cos- oder sin-Funktion (je nach Anfangsposition). Die Phasenunterschiede entsprechen den Winkeln zwischen den Zeigern. Für Parallelschaltungen werden die Ströme dargestellt (es gilt die Knotenregel). Für Serieschaltungen kommen die Teilspannungen zur Darstellung (Maschenregel). Liegt eine externe Spannung U_Q (Quellenspannung) an, so gilt für die Serieschaltung:

$$U_Q = U_R + U_C + U_L \quad (\text{Eq.69})$$

Die Addition im Phasendiagramm entspricht einer Art Vektoraddition. Zu beachten ist, dass die Teilspannungen in Eq.69 zeitabhängige Größen sind, welche zueinander noch eine Phasenverschiebung besitzen. Für die Maximalspannungen gilt deshalb der Pythagoras.

*Phasen-
Diagramm*

*Addition
komplexer
Größen*

⁹ Im Prinzip kommt die Formel von Euler zur Anwendung: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ mit $i^2 = -1$

Aus dem Phasendiagramm Fig.16 lässt sich für die Spannungsamplituden folgende Relation für die *RCL*-Serie ablesen:

$$\hat{u}_Q^2 = \hat{u}_R^2 + (\hat{u}_L - \hat{u}_C)^2 \quad (\text{Eq.70})$$

*Bedingung
für
Spannungs-
Amplituden*

Wird nun Eq.70 durch die Stromamplitude \hat{i} dividiert, so resultiert die Impedanz:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\hat{u}_Q}{\hat{i}} = \frac{\sqrt{\hat{u}_R^2 + (\hat{u}_L - \hat{u}_C)^2}}{\hat{i}} \\ &= \sqrt{\frac{\hat{u}_R^2}{\hat{i}^2} + \left(\frac{\hat{u}_L}{\hat{i}} - \frac{\hat{u}_C}{\hat{i}}\right)^2} \\ &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \end{aligned} \quad (\text{Eq.71})$$

Auch die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung lässt sich aus dem Phasendiagramm Fig.16 elegant bestimmen:

*Phasen-
Winkel*

$$\tan \varphi = \frac{\hat{u}_L - \hat{u}_C}{\hat{u}_R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (\text{Eq.72})$$

Die Darstellung im Phasendiagramm veranschaulicht die Verschiebung von Strom und Spannung. Ein alternativer Ansatz ist das Aufstellen einer Bilanz für Ladungen (Eq.65), was zu Differentialgleichungen führt. Diese können für komplexe Schaltungen numerisch gelöst werden.

*numerische
Simulation*

Experiment

Der Tesla-Transformator ist eine spezielle Variante eines Hochfrequenz-Transformators. Er dient der Erzeugung hoher Spannungen oder Ströme im Hochfrequenzbereich. Es werden elektrische Spannungen im Bereich von einigen 100 kV bis mehreren MV erreicht. Benannt wurde er nach seinem Erfinder, Nikola Tesla. Zur Anwendung gelangt er in der Technik und Medizin. Typische technische Anwendungen sind Hochspannungstest für Isolatoren. Auch wurde er als Spannungsquelle für Beschleuniger und Röntgengeneratoren in Betracht gezogen. In der Medizin wird er zur Erzeugung Joulescher Wärme genutzt. Die dafür benötigten Wechselströme mit hoher Frequenz (typischerweise 50 - 500 kHz) bilden keine Ionen in den Zellen. Zellschäden durch Elektrolyse-Produkte bleiben deshalb aus. Des Weiteren beeinflussen diese Hochfrequenzströme kritische Gewebe, wie Muskeln, Herz und Nerven kaum.

Transformatoren sind Spannungswandler. Das Grundprinzip beruht auf der Erzeugung eines wechselnden magnetischen Feldes durch eine Primärspule, welches in einer Sekundärspule eine Spannung induziert. Das Verhältnis der Spannungen von Primär- zu Sekundärseite ist bei einer sinusförmigen Wechselspannung im Bereich von 50 Hz durch das Verhältnis der Windungen von Primär- und Sekundärspule gegeben. Werden hohe Spannungen auf der Sekundärseite angestrebt, so sind ein grosses Windungsverhältnis und eine möglichst hohe Spannung auf der Primärseite günstig. Dabei ergibt sich folgendes grundlegendes Problem: Die erreichbare Spannung hängt von der Frequenz der Wechselspannung und der Anzahl Windungen der Primärspule ab. Soll auf der Sekundärseite die Windungszahl nicht 10^5 übersteigen, muss auf der Primärseite mit wenigen Windungen und bei entsprechender Spannung mit hoher Leistung (hohen Strömen) gearbeitet werden, was direkt Auswirkungen auf die thermische Belastung und somit auch die Dimensionen des Transformators hat. Durch die Erhöhung der Frequenz kann der induktive Widerstand auf der Primärseite bei konstanter Windungszahl erhöht werden. Dies erlaubt das Erreichen höherer Spannungen mit kleineren Transformatoren. Die Höhe der Frequenz ist aber durch die Trägheit des Eisenkerns und Wirbelstromverluste limitiert. Deshalb wird bei Hochfrequenztransformatoren ein Kern aus Ferrit bevorzugt oder es werden Luftspulen verwendet.

Zentral für die Simulation des Tesla-Transformators ist die Übertragung der Schwingungen vom Primär- auf den Sekundärkreis und die Rückkopplung zwischen den beiden Stromkreisen. Im Prinzip handelt es sich um zwei gekoppelte Schwingkreise mit der Kopplungskonstante M / L_i . Zur Gleichung Eq.65 muss nun eine zweite Systemgleichung hinzugefügt werden, welche den zweiten Schwingkreis beschreibt:

Anwendungen

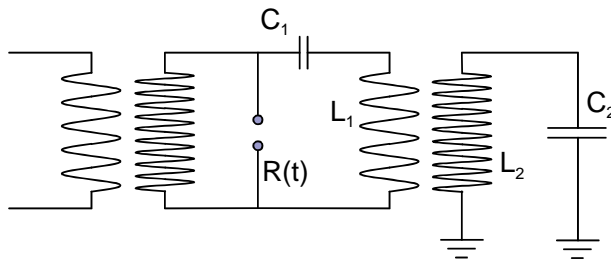
Wirkung von HF-Strömen

Hochfrequenz-Transformator

$$\frac{d^2 Q_1}{dt^2} = -\frac{1}{L_1 C_1} \cdot Q_1 - \frac{R_1}{L_1} \cdot \frac{dQ_1}{dt} - \frac{M}{L_1} \frac{d^2 Q_2}{dt^2}$$

*System-
Gleichungen*

$$\frac{d^2 Q_2}{dt^2} = -\frac{1}{L_2 C_2} \cdot Q_2 - \frac{R_2}{L_2} \cdot \frac{dQ_2}{dt} - \frac{M}{L_2} \frac{d^2 Q_1}{dt^2}$$



*Experimenteller
Aufbau*

Fig.17. Aufbau eines Teslatransformators: Die Primärspule ist durch die Induktivität L_1 und die Sekundärspule durch L_2 bezeichnet, C_1 ist die Kapazität des Kondensators im Primärkreis und $R = R(t)$ stellt den elektrischen Widerstand dar, welcher vor allem mit der Funkenstrecke assoziiert ist.

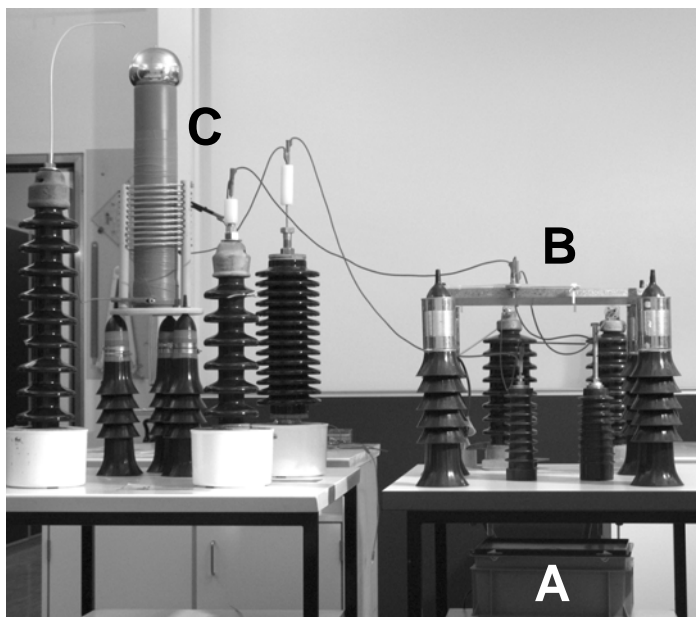
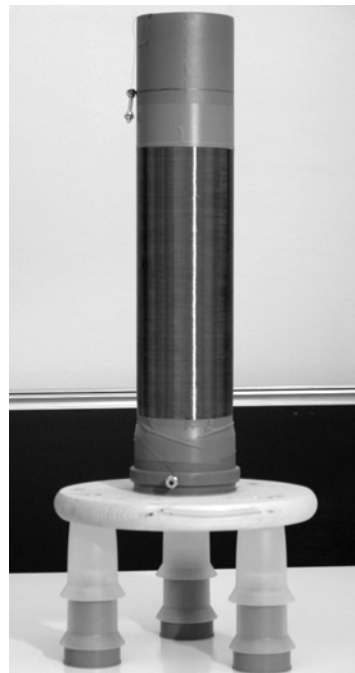
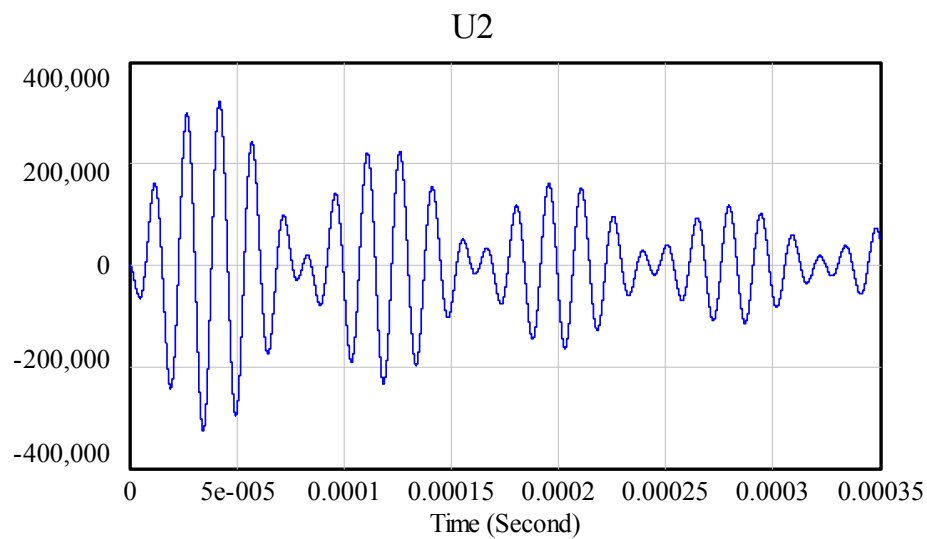


Fig.18. Aufbau der Experimentieranlage: Die Anlage besteht im Wesentlichen aus dem Netztransformator (A), der Kondensatoreinheit mit Funkenstrecke (B) und den ineinander liegenden Luftspulen mit terminaler Konduktorkugel (C).



*Primär- und
Sekundär-
Spulen*

Fig.19. Anordnung von Primär- und Sekundärspule (rechts), ebenfalls abgebildet ist die Sekundärfunkenstrecke, welche durch die terminal angebrachte Konduktorkugel und einen zuführenden Leiter (Aluminium-Rohr mit Messingstift am Ende) gebildet wird; links weitere Sekundärspule



*Zeitverhalten
der
Sekundär-
spannung*

Fig.8. Zeitlicher Verlauf der Sekundärspannung $U(t)$, Numerik: Runge-Kutta-Verfahren, $\Delta t = 1 \cdot 10^{-9}$ s

Aufgaben

A1. Ein Schwingkreis (LC-Glied) bestehe aus einem Plattenkondensator (Fläche A_C , Abstand d) und einer langen Spule (N Windungen, Länge l , Fläche A_L).

Berechnen Sie die Spulenlänge $l = l(\nu)$ als Funktion der Frequenz des Schwingkreises.

A2. Ein Schwingkreis soll bei einer Frequenz von 100 kHz maximal angeregt werden (Resonanz). Als Kondensator werde ein Zylinderkondensator mit einer Länge von 20 cm, mit einer Wanddicke von 4 mm (ausen und innen mit einer Alufolie) und einem Innendurchmesser von 5 cm verwendet. Die Spule soll durch Kupferlackdraht gebildet werden, welcher auf einen zylindrischen, hohlen Spulenkörper mit einer Länge von 0.1 m mit einem Durchmesser von 3 cm aufgewickelt wird.

Wie viele Windungen werden benötigt?

A3. Die Messung der Resonanzfrequenz eines L-C-Glieds ergibt 2.5 kHz. Die Kapazität des Kondensators beträgt 20 μF .

- a) Wie gross ist die Induktivität im Schwingkreis?
- b) Wie gross müsste die Induktivität sein, damit eine Frequenz von 10 kHz erreicht wird?

A4. Ein HF-Oszillator soll aus einem Kondensator und einer Spule gebildet werden. Der Kondensator bestehe aus einem 10 cm langen Hohl-Zylinder mit einer Wanddicke von 5 mm und einem Innerradius von 25 mm. Ausen und Innen ist der Zylinder mit einer Metallfolie beschichtet. Die Zylinderwand (zwischen den beiden Folien) bestehe aus PVC. Die Spule sei 10 cm lang und habe 10 Windungen mit je einer Fläche von 10 cm^2 .

- a) Wie gross ist die Frequenz des Oszillators?
- b) Wie ändert sich die Frequenz, wenn die Zahl der Windungen bei gleich bleibender Spulenlänge auf 9 reduziert wird?

A5. Bestimmen Sie für eine reine Parallelschaltung eines Widerstandes, eines Kondensator und einer Spule die Phasenverschiebung und die Impedanz. Zeichnen Sie zur Hilfe ein Phasendiagramm.

A6. Programmieren Sie mittels Vensim (oder ähnliches Programm) ein RCL-Schwingkreis. Verwenden Sie zur Hilfe die Theorie im Unterkapitel 410. Untersuchen Sie mittels Simulation das Verhalten des Schwingkreises.

Lösungen

L1.

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{C \cdot \frac{\mu_0 N^2 A}{l}}} \rightarrow l = 4\pi^2 \cdot C \cdot \mu_0 N^2 A \cdot \nu^2$$

L2.

$$LC = \frac{1}{4\pi^2 \cdot \nu^2} = C \cdot \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \rightarrow N = \sqrt{\frac{l \cdot \ln(r_a / r_i)}{8\pi^3 \cdot \nu^2 \cdot \mu_0 A \cdot \epsilon_0 \cdot l_C}}$$

$$\approx \underline{3000 \text{Wdg.}}$$

L3.

$$(a) \nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \rightarrow L = \frac{1}{C} \left(\frac{1}{2\pi\nu} \right)^2 = \underline{2.03 \cdot 10^{-4} \text{ H}}$$

$$(b) L = \frac{1}{C} \left(\frac{1}{2\pi\nu} \right)^2 = \underline{1.27 \cdot 10^{-5} \text{ H}}$$

L4.

$$(a) \nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{l_L \cdot \ln(r_a / r_i)}{\mu N^2 A \cdot 2\pi\epsilon l_C}} = \underline{1.47 \cdot 10^7 \text{ Hz}} = \underline{14.7 \text{ MHz}}$$

$$(b) \nu = \underline{1.64 \text{ MHz}}$$

L5.

Phasenverschiebung: $\tan \varphi = \frac{\hat{i}_L - \hat{i}_C}{\hat{i}_R}$

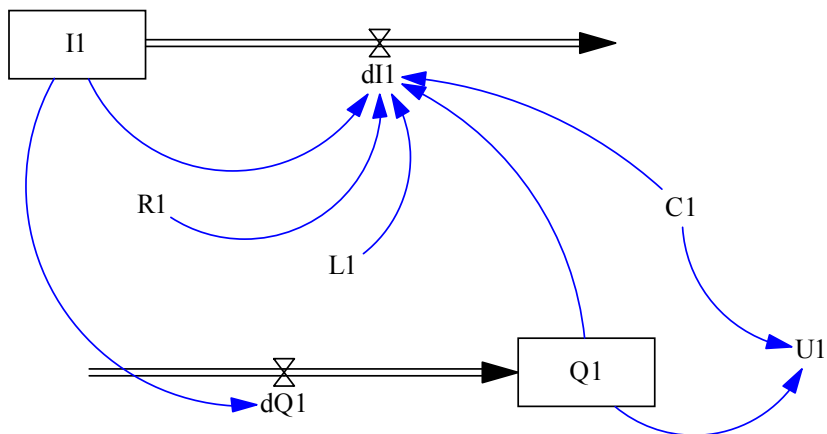
Impedanz:

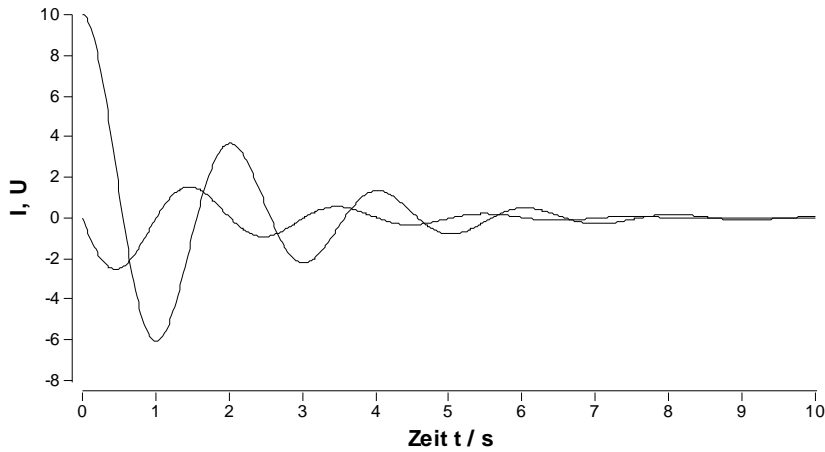
$$Z = \frac{\hat{u}}{\sqrt{\hat{i}_R^2 + (\hat{i}_L - \hat{i}_C)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}}$$

L6. Systemgleichungen:

$$\frac{dI_1}{dt} = -\frac{Q_1}{L_1 C_1} - \frac{R_1}{L_1} \cdot I_1$$

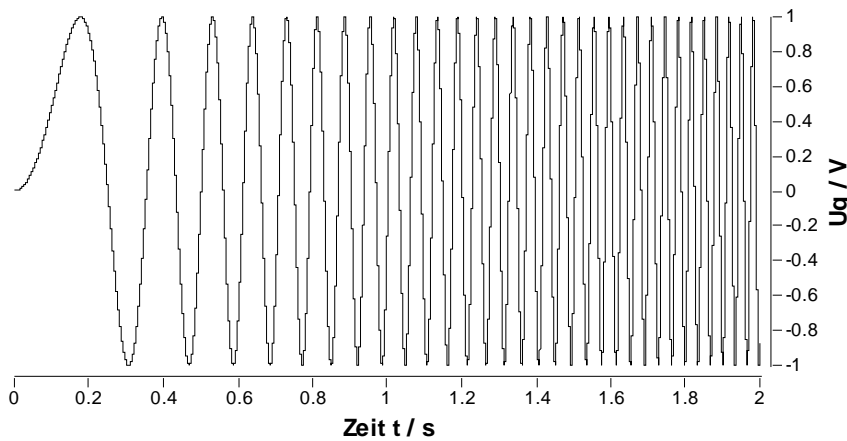
$$\frac{dQ_1}{dt} = I_1$$





*Gedämpfte
Schwingung
von
Spannung
und Strom*

Fig.A. Gedämpfte Schwingung bei Entladung des Kondensators über Spule: $R = 1 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, $C = 0.1 \text{ F}$.



*Resonanz-
Verhalten*

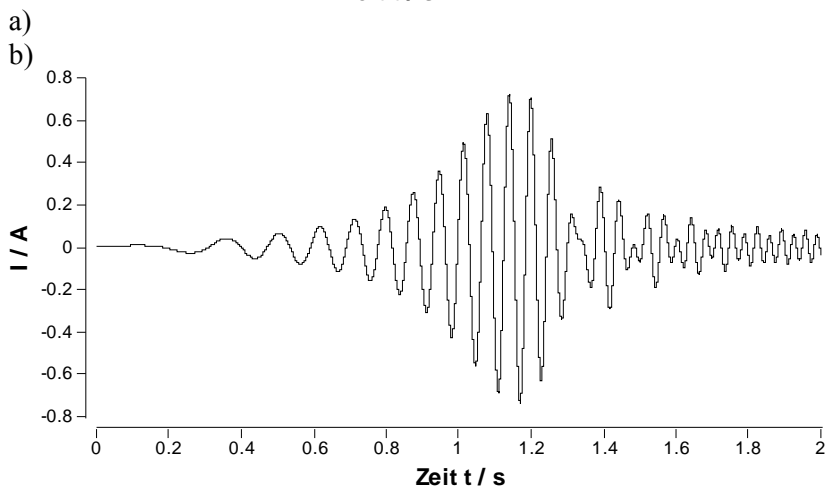


Fig.B. Resonanzverhalten des Schwingkreises bei zeitlich ändernder Quellenspannung: $R = 1 \Omega$, $L = 0.1 \text{ H}$, $C = 1 \text{ mF}$.

850 elektromagnetische Feldgleichungen

851 Maxwell-Gleichungen

Theorie

Die Maxwell-Gleichungen, formuliert vom schottischen Physiker James Clerk MAXWELL, verbinden das elektrische und magnetische Feld mit ihren Quellen, den elektrischen Ladungen und Stömen. Im Prinzip handelt es sich um Verallgemeinerungen und Zusammenfassung der Gesetze von Coulomb, Gauss, Biot-Savart, Lorentz, Ampère und Faraday.

Zuerst soll der Zusammenhang zwischen elektrischer Ladung Q und dem elektrischen Feld E näher betrachtet werden: Die Ladung Q ist die Quelle des elektrischen Feldes. Erfassen wir quasi das gesamte, von der Ladung Q ausgehende E -Feld, in dem über eine die Ladung umschliessende Fläche S aufintegriert wird, so muss dieses Integral proportional zur Ladung sein:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q \quad (\text{Eq.1})$$

Dabei ist der reziproke Wert der elektrischen Feldkonstante $1/\epsilon_0$ gerade die Proportionalitätskonstante. Da nur die zur Oberfläche senkrecht stehende Feldkomponente einen Beitrag liefern, ist das Skalarprodukt zwischen dem Feldvektor und dem Flächenelement $d\vec{A}$ (mit Richtung der Flächennormalen) zu nehmen. Wenn die Formel Eq.1 auf eine Punktladung und das umgebende Coulomb-Feld angewendet wird (Integration über eine Kugel mit Radius r und mit Zentrum bei der Ladung), so resultiert:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \oint_S E \cdot dA = \oint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot dA \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \oint_S dA = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q \end{aligned}$$

Eine analoge Betrachtung lässt sich auch für das magnetische Feld anstellen. Bereits im Unterkapitel 830 wurde darauf hingewiesen, dass magnetische Feldlinien immer geschlossen sind (es gibt keine magnetischen Monopole). Der Grund dafür liegt in der Ursache der Felder, den elektrischen Strömen:

*Felder und
Quellen*

*Gausscher
Durchflutungs-
satz für E-
Felder*

*Gausscher
Durchflutungs-
satz für B-
Felder*

Es gibt auch keine Punktströme. Wenn nun magnetische Feldlinien immer geschlossen sind, also keine eigentlichen Quellen existieren, so müssen Feldlinien, welche in ein geschlossenes Volumen eintreten, auch wieder aus diesem austreten. Etwas anders formuliert: In einem geschlossenen Volumen (mit Oberfläche S) entsteht oder verschwindet kein Anteil des magnetischen Flusses. Wird somit in einem B -Feld über eine geschlossene Oberfläche S integriert, muss somit immer gelten:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (\text{Eq.2})$$

Auch die zeitlichen Änderungen der E - und B -Felder lassen sich verknüpfen. Aus dem Induktionsgesetz ist bekannt, dass die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses durch eine Leiterschleife in dieser eine elektrische Spannung bzw. ein elektrisches Feld aufbaut (und wenn diese geschlossen ist, somit ein Strom fließt). Dieser Sachverhalt lässt sich mathematisch ebenfalls allgemein formulieren. Die elektrische Spannung U kann durch Integration entlang des Pfades C über die Leiterschleife ermittelt werden:

*Faradays
Induktions-
gesetz*

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \quad (\text{Eq.3})$$

Zu beachten ist, dass der Pfad C geschlossen sein muss, da sonst die vom Pfad umschlossene Fläche A nicht definiert ist. Aus der Gleichung Eq.3 resultiert das Induktionsgesetz in der bekannten Form, wenn von einem homogenen B -Feld (Stärke und Richtung konstant) ausgegangen wird, welches senkrecht auf der Fläche A steht:

$$- \int_A \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dA = -A \cdot \frac{dB}{dt} = U_{ind}$$

Das Gesetz Eq.3 verknüpft die zeitliche Änderung des magnetischen Feldes mit dem elektrischen Feld. Die Eigenschaften der Felder zeigen nun eine schöne Symmetrie: Die zeitliche Änderung der elektrischen Felder führt zu magnetischen Feldern. Magnetische Felder entstehen also nicht nur, wenn elektrische Ladungen fließen (also elektrische Ströme fließen), sondern auch, wenn sich die elektrische Feldstärke ändert:

*Gesetz von
Ampère*

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \int_A \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{A} + \mu_0 I \quad (\text{Eq.4})$$

Mit der Gleichung Eq.4 schliesst sich der Kreis wieder zu Eq.1: Das Integral entlang eines geschlossenen Pfades um einen stromführenden Leiter ist proportional zur Stromstärke. Die Proportionalitätskonstante ist μ_0 .

Es muss hier betont werden, dass die vier Maxwellgleichungen (Eq.1-4) nur im Vakuum gelten. Für das Medium sind sie anzupassen.

Aufgaben

A1. Gegeben sei ein Plattenkondensator mit den kreisrunden Fläche A . Der Kondensator werde nun geladen, wobei ein Strom von 1 A fliesse. Berechnen Sie für einen geschlossenen Pfad zwischen den Kondensatorplatten:

$$\frac{1}{\mu_0} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

wie ist das Resultat zu interpretieren?

A2. Gegeben sei ein homogenes Magnetfeld in Richtung parallel zur x -Achse. Wie gross ist

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

für einen Würfel mit Volumen $V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ im Feld?

A3. Ein zeitlich veränderliches Magnetfeld sei gegeben durch:

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \cdot x + kt \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die induzierte Spannung in der Leiterschleife mit Länge Δx auf der x -Achse und Breite Δy auf der y -Achse.

A4. gegeben sei ein zeitlich veränderliches Magnetfeld:

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 xt \\ B_z \end{pmatrix}$$

In diesem Feld befinde sich eine Leiterschleife: Die eine Seite liege auf der z -Achse und erstrecke sich von $-c/2$ bis $+c/2$. Der andere Teil sei parabelförmig: $x(z) = -az^2 + b$.

Berechnen Sie die in dieser Schleife induzierte elektrische Spannung.

A5. Stellen Sie die Feld-Gleichung Eq.4 für ein elektrisches Feld auf, welches sich nur in x -Richtung ändert und nur eine x -Komponente hat: Interpretieren Sie das Resultat.

L1. gem. Eq.4 zu Integration über die Fläche übergehen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \varepsilon_0 \int_A \frac{\partial E}{\partial t} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 \cdot \frac{d}{dt} (E \cdot A) = \varepsilon_0 \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{Q}{\varepsilon_0 A} \cdot A \right) \\ &= \frac{dQ}{dt} = 1A \end{aligned}$$

L2. das Integral wird für alle Flächen mit Flächennormalen senkrecht zur Feldrichtung null. Die Beiträge der restlichen beiden Flächen heben sich auf:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z - B_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z = 0$$

L3.

$$\begin{aligned} U_{ind} &= - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} = - \int_0^{\Delta y} \int_0^{\Delta x} \frac{\partial B_z}{\partial t} \cdot dx \cdot dy = - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\Delta y} \int_0^{\Delta x} (B_0 x + kt) \cdot dx \cdot dy \\ &= - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\Delta y} \left(\frac{B_0}{2} \Delta x^2 + kt \cdot \Delta x \right) \cdot dy = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B_0}{2} \Delta x^2 \cdot \Delta y + kt \cdot \Delta x \cdot \Delta y \right) \\ &= -k \cdot \Delta x \cdot \Delta y \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} U_{ind} &= - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} = - \int_0^{\Delta y} \int_0^{\Delta x} \frac{\partial B_z}{\partial t} \cdot dx \cdot dy = - \int_0^{\Delta y} \int_0^{\Delta x} k \cdot dx \cdot dy \\ &= - \int_0^{\Delta y} (k \cdot \Delta x) \cdot dy = -k \cdot \Delta x \cdot \Delta y \end{aligned}$$

L4.

$$\begin{aligned}
U_{ind} &= -\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \int_0^{x(z)} B_0 \cdot xt \cdot dx \cdot dz = \\
&= -B_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \left[\frac{1}{2} x^2 t \right]_0^{x(z)} \cdot dz = -B_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \left[\frac{1}{2} (az^2 + b)^2 t \right]_0^{x(z)} \cdot dz \\
&= -\frac{B_0}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} (a^2 z^4 + 2abz^2 + b^2)^2 \cdot t \cdot dz = -\frac{B_0}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{a^2}{5} z^5 + \frac{2}{3} abz^3 + b^2 z \right) \cdot t \right]_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \\
&= -\frac{B_0}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{a^2}{5} c^5 + \frac{2}{3} abc^3 + b^2 c \right) \cdot t \right] = -\frac{B_0}{2} \cdot \left(\frac{a^2}{5} c^5 + \frac{2}{3} abc^3 + b^2 c \right)
\end{aligned}$$

L5.

$$\begin{aligned}
\oint \vec{B} \bullet d\vec{s} &= \varepsilon_0 \mu_0 \cdot \frac{d}{dt} \int E(x) \cdot dA = \frac{d(E \cdot A)}{dt} \\
&= \oint_{\text{Kreis}} B_C(x) \cdot ds
\end{aligned}$$

Ändert sich die elektrische Feldstärke zeitlich, so entsteht in der Ebene mit gegebener x -Koordinate ein zirkuläres Magnetfeld. Das Integral entlang einer Kreisbahn C in dieser Ebene hat einen endlichen Wert.

852 Elektromagnetische Wellen

Theorie

Die in den Abschnitten 831-843 beschriebenen Phänomene lassen sich auf eine allgemeiner Theorie zurückführen. Das Kernstück der Elektrodynamik bzw. des Elektromagnetismus bilden die Maxwell-Gleichungen. Dabei handelt es sich um Feldgleichungen, welche die elektromagnetischen Felder beschreiben. In diesem Abschnitt werden die Maxwell-Gleichungen im Gegensatz zu Abschnitt 851 in differenzieller Form benutzt.

Für die Notation der Feldgleichungen sind die zeitlichen und räumlichen Ableitungen von Vektorfeldern wichtig. Deshalb soll zuerst ein allgemeines Vektorfeld $\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(x, y, z)$ betrachtet werden, welches jedem Ortsvektor \vec{r} einen Vektor \vec{u} zuordnet (stellvertretend für das magnetische oder elektrische Feld).

Bereits in Abschnitt 323 wurde der Nabla-Operator eingeführt. Dieser Differentialoperator lässt sich vektoriell darstellen:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{Eq.5})$$

Dieser Operator lässt sich sowohl auf skalare Felder als auch auf Vektorfelder anwenden. Während die Anwendung auf skalare Felder (e.g. Potentialfelder, Abschnitt 323) immer zu einem Gradientenfeld, also einem Vektorfeld führt, gibt es bei Vektorfeldern verschiedene Möglichkeiten. Da im Prinzip zwei Vektoren verknüpft werden, kommen als Verknüpfungsoptionen das Skalar- und das Vektorprodukt in Frage. In Abschnitt 811 und 731 wurde bereits die Variante mit Skalarprodukt eingeführt:

$$\nabla \bullet \vec{u} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \text{div}(\vec{u}) \quad (\text{Eq.6})$$

Sie führt auf den Begriff der Divergenz. Für die Divergenz gelten ähnliche Rechenregeln wie für die gewöhnliche Ableitung. So ist für einen konstanten Vektor \vec{c} die Divergenz 0. Für die Summe zweier Vektorfelder gilt $\text{div}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \text{div}(\vec{u}_1) + \text{div}(\vec{u}_2)$ und für die Multiplikation mit einer Konstanten $\text{div}(c\vec{u}) = c \cdot \text{div}(\vec{u})$. Das Produkt eines skalaren Feldes f mit einem Vektorfeldes \vec{u} führt zu einer Art Kettenregel:

*Elektromagnetismus**Nabla-Operator**Gradientenfeld**Divergenz**Rechenregeln für die Divergenz*

$$\operatorname{div}(f\vec{u}) = f \cdot \operatorname{div}(\vec{u}) + \vec{u} \cdot \operatorname{grad}(f).$$

Eine andere Art der Verknüpfung liefert das Vektor- oder Kreuzprodukt. Dies führt zur sogenannten Rotation eines Vektorfeldes:

Rotation

$$\nabla \times \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \operatorname{rot}(\vec{u}) \quad (\text{Eq.7})$$

Auch für die Rotation gelten ähnliche Rechenregeln. Für die Multiplikation mit einer Konstanten gilt $\operatorname{rot}(c\vec{u}) = c \cdot \operatorname{rot}(\vec{u})$ und für die Summe zweier Vektorfelder: $\operatorname{rot}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \operatorname{rot}(\vec{u}_1) + \operatorname{rot}(\vec{u}_2)$. Analog zur Divergenz gilt auch $\operatorname{rot}(f\vec{u}) = f \cdot \operatorname{rot}(\vec{u}) + \operatorname{grad}(f) \times \vec{u}$.

*Rechenregeln
für die
Rotation*

Interessant sind noch eine weitere Beziehungen, welche die Divergenz und die Rotation verknüpft. Dafür definieren wird den Laplace-Operator:

*Laplace-
Operator*

$$\Delta = (\nabla \cdot \nabla) = \nabla^2 \quad (\text{Eq.8})$$

Bei Anwendung auf ein Vektorfeld resultiert:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{u} = \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \Delta \vec{u} \quad (\text{Eq.9})$$

Dabei ist $\Delta \vec{u}$ gegeben durch:

$$\Delta \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} \quad (\text{Eq.10})$$

Die räumlichen Differentialoperatoren sind hier wichtig, weil räumliche Ableitungen die Änderungen der elektromagnetischen Felder im Raum beschreiben.

Zur Umwandlung der Maxwellgleichungen von der integralen Form (851) zur differentiellen Form werden zwei mathematische Integralsätze benötigt. Der erste ist der Gauss'sche Integralsatz. Dieser besagt, dass ein Integral eines Vektorfeldes über eine geschlossene Fläche S in ein Volumenintegral der Divergenz des Vektorfeldes umgewandelt werden kann. Angewendet auf die Feldgleichung Eq.1 in Abschnitt 851 für elektrische Felder ergibt sich:

Gauss'scher Integralsatz

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \text{div} \vec{E} \cdot d^3r = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q$$

Das Integral wird 0, wenn sich in dem von der Fläche S umschlossenen Volumen keine Ladung befindet ($Q = 0$), also:

$$\int_V \text{div} \vec{E} \cdot d^3r = 0$$

In diesem Fall ist das Vektorfeld quellenfrei und somit gilt gem. Abschnitt 741 auch: $\text{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = 0$. Es resultiert damit die differentielle Form dieser Feldgleichung.

Der zweite sehr nützliche Integralsatz ist der Stokes'sche Integral-satz. Er besagt, dass ein Integral eines Vektorfeldes über den geschlossenen Pfad C sich in ein Integral der Rotation des Vektorfeldes über eine vom Pfad C umschlossene Fläche A umwandeln lässt. Wiederum auf das elektrische Feld angewendet resultiert aus dem Induktionsgesetz Eq. 3 in Abschnitt 851:

Stokes'scher Integralsatz

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Somit gilt:

$$\int_A \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{A} = - \int_A \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{A}$$

Nun ist aber die größe der Fläche A nicht festgelegt, d.h. diese Beziehung gilt auch für ein infinitesimal kleines Flächenelement $d\vec{A}$, also gilt:

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt} = \nabla \times \vec{E}$$

Diese Integralsätze lassen sich auch auf die Feldgleichungen für magnetische Felder anwenden. Es resultieren zusammenfassend die folgenden Gleichungen in differenzieller Form:

*Maxwell-
Gleichungen*

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (\text{Eq.11})$$

und

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (\text{Eq.12})$$

Dabei besagt Eq.11 nur, dass keine Raumladung vorhanden sei. Es wird also angenommen, der hier betrachtete Raum sei ladungsfrei (es gibt keine Ladungen, welche als Quelle eines elektrischen Feldes dienen könnten). Andernfalls wäre die Divergenz nicht null. Dies korrespondiert zur Betrachtung der Stromdichte in Abschnitt 731.

Für die magnetischen Felder lassen sich ebenfalls zwei Gleichungen aufstellen:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Eq.13})$$

und

$$\nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \quad (\text{Eq.14})$$

Im Gegensatz zu Eq.11 gilt Eq.12 immer. Diese Beziehung bringt zum Ausdruck, dass keine magnetische Monopole existieren. Magnetische Feldlinien haben keinen Ursprung, sie sind stets geschlossen.

Die Gleichungen Eq.12 und Eq.14 verknüpfen magnetische und elektrische Felder. Sie beschreiben den Umstand, dass wenn sich Ladungen bewegen, magnetische Felder entstehen. Bewegen sich Ladungen in einem Leiter, so führt dies zu einer zeitlichen Änderung des elektrischen Feldes und somit zu einem zirkulären Magnetfeld um den Leiter herum (Rotation).

*Verknüpfung
von
elektrischen
und
magnetischen
Feldern*

Bemerkenswert ist bei Eq.12 und Eq.14 die Symmetrie. Die zeitliche Änderung des einen Feldes ist mit der räumlichen Änderung des anderen Feldes verknüpft. Dies führt zu Wellen, welche als elektromagnetische Wellen bekannt sind und in Form von Radiowellen und Licht auch unseren Alltag prägen.

Die Herleitung der Wellengleichung kann über die Maxwellgleichungen Eq.11-14 gemacht werden. Wird auf Eq.12 noch einmal der Rotationsoperator angewendet, so resultiert:

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \vec{E} &= \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} \\ &= -\nabla \times \frac{d\vec{B}}{dt}\end{aligned}\tag{Eq.15}$$

Dabei wurde die Beziehung Eq.9 verwendet. Da nun aber die Divergenz des elektrischen Feldes verschwindet (Eq.11), resultiert:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} = 0 &\Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = 0 \\ \Rightarrow \Delta \vec{E} &= \nabla \times \frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \vec{B}] \\ &= \frac{d}{dt} \left[\varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right] = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}\end{aligned}\tag{Eq.16}$$

Der gleiche Schritt kann für das magnetische Feld gemacht werden. Wird noch einmal der Rotationsoperator auf Eq.16 angewendet, so ergibt sich:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \nabla \times \left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right)\tag{Eq.17}$$

Wiederum kann die Divergenz wegen Eq.13 null gesetzt werden:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{B} = 0 &\Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) = 0 \\
\Rightarrow \Delta \vec{B} &= -\varepsilon_0 \mu_0 \nabla \times \frac{d\vec{E}}{dt} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} [\nabla \times \vec{E}] \\
&= -\varepsilon_0 \mu_0 \cdot \left[-\frac{d\vec{B}}{dt} \right] = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2}
\end{aligned}
\tag{Eq.18}$$

Auffällig an Eq.16 und Eq.18 ist die gleiche mathematische Form:

*Wellen-
gleichung*

$$\Delta \vec{u} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2}
\tag{Eq.19}$$

Es handelt sich dabei um die bereits aus dem Kapitel 600 bekannte Wellengleichung (hier allerdings in drei Dimensionen), wobei die Ausbreitungsgeschwindigkeit c gegeben ist durch:

*Wellen-
Geschwindigkeit*

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}
\tag{Eq.20}$$

Die Wellengeschwindigkeit im Vakuum ist somit gegeben durch die elektrische und die magnetische Feldkonstante. Dieser Umstand birgt ungeahnte Konsequenzen für die ganze Physik in sich: Da sich elektromagnetische Wellen im Gegensatz zu den mechanischen Wellen aus Kapitel 600 nicht über ein Medium ausbreiten, ist die Wellengeschwindigkeit c für alle Bezugssysteme gleich¹⁰. Unabhängig von der Bewegung durch den Raum wird immer $c = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ gemessen, c ist somit im Vakuum eine unveränderliche Naturkonstante. Dies führt allerdings zu Widersprüchen bezüglich der nicht-relativistischen Mechanik. So zum Beispiel würde die Besatzung eines Raumschiffs, welches einem Lichtimpuls nachfliegt, diesen mit der gleichen Geschwindigkeit von sich weg bewegen sehen wie ein ruhender Beobachter. Soll die Annahme vermieden werden, das Universum spalte sich auf, muss eine Transformation gesucht werden, welche Raum

*Licht-
Geschwindigkeit*

¹⁰ Das Experiment von Michelson & Morley 1887 konnte keinen Effekt des sogenannten Aetherwinds nachweisen.

und Zeit anders verknüpfen, als dies bei der Galilei-Transformation der Fall ist.

Wird von einem sich in z -Richtung bewegenden Koordinatensystem in ein ruhendes Koordinatensystem umgerechnet, so muss die folgende Galilei-Transformation angewendet werden: $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y$, $\tilde{z} = z + v_z t$ und $\tilde{t} = t$. Das dabei die Zeit unverändert bleibt, scheint logisch und entspricht unserer intuitiver Erfahrung. Allerdings stehen diese Transformationsregeln im Widerspruch zur konstanten Ausbreitungsgeschwindigkeit für elektromagnetische Wellen. Albert EINSTEIN hat 1905 in den Annalen der Physik den Artikel mit dem Titel *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* veröffentlicht, in welchem die Lösung des Dilemmas beschrieben wird. Das grundlegende Postulat, dass die Naturgesetze in allen Bezugssystemen gültig sein müssen, also auch die Maxwellgleichungen, führt zur Lorentz-Transformation. Der Wechsel von einem ruhenden in ein in z -Richtung bewegtes Koordinatensystem führt über die folgende Transformation: $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y$, $\tilde{z} = \gamma(z + v_z t)$ und $\tilde{t} = \gamma(t - (v_z / c^2) \cdot z)$ mit:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_z}{c}\right)^2}} \quad (\text{Eq.21})$$

Irritierend ist, dass nun die Zeit auch transformiert: Vergleicht man bewegte und ruhende Uhren miteinander, kann festgestellt werden, dass diese nicht gleich schnell gehen. Zudem kommt es zu Phänomenen, welche unserer Alltagserfahrung widersprechen. Nebst der Zeitdilatation erfolgt auch eine Längenkontraktion. Die Länge l eines Objektes, welche in einem Koordinatensystem gemessen wird, in welchem sich das Objekt in z -Richtung mit v_z bewegt, ist:

$$l = \frac{l_0}{\gamma} \quad (\text{Eq.22})$$

Wobei l_0 die Länge des Objekts ist, wenn dieses ruht. Als Fazit kann festgehalten werden, dass sich Raum und Zeit mit zunehmender Geschwindigkeit verkrümmen. Allerdings kann kein Teilchen mit einer endlichen Ruhemasse Lichtgeschwindigkeit erreichen. Für Geschwindigkeiten weit unterhalb der Lichtgeschwindigkeit c geht die Lorentz-Transformation in die Galilei-Transformation über.

*Konsequenzen
für die
klassische
Mechanik*

*Lorentz-
Transformation*

*Längen-
Kontraktion*

Aufgaben

A1. Zeigen Sie, dass gilt: $\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla \times \nabla \times \vec{u} = \Delta \vec{u}$

A2. In einem Magnetron (Mikrowellenquelle) fliegen Elektronen in Form eines modulierten Strahls an einer Kavität (Hohlraum mit elektrisch leitenden Wänden) vorbei. Die Elektronen sollen mit einer Spannung von 10 kV beschleunigt werden. Wie gross muss die Modulationsweite des Elektronenstrahls und die Länge der Kavität sein, damit elektrische Resonanzschwingungen in der Kavität bei einer Frequenz von 2 GHz auftreten können?

A3. Bei ebenen Wellen sind die Wellenfronten parallel zueinander. Für die Beschreibung der Wellenfelder reicht eine Raumrichtung: $\vec{u} = \vec{u}(x)$. Stellen Sie die Wellengleichung für ebene Wellen für die elektrische Feldstärke $E = E(x)$ auf, wobei \vec{E} senkrecht auf der x-Achse steht. Suchen Sie eine Funktion, welche diese Gleichung löst.

A4. Im optisch transparenten Medium ist die Lichtgeschwindigkeit gegeben durch:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}} \quad (\text{Eq.92})$$

Berechnen Sie die ϵ_r für:

- a) Quarzglas ($c = 2.05562 \cdot 10^8 \text{ m/s}$)
- b) Wasser ($c = 2.24900 \cdot 10^8 \text{ m/s}$)

Nehmen Sie für $\mu_r \approx 1$ an. Vergleichen Sie die errechneten Werte mit Tabellenwerten (z.B. DPK / DMK: Formeln und Tafeln, S.177): Was fällt auf? Interpretieren Sie das Resultat.

A5. Ein Stab mit einer Länge von einem Meter fliege der Geschwindigkeit v an ihnen vorbei. Welche Länge messen Sie als ruhender Beobachter, wenn der Stab:

- a) mit 100000 km/s
- b) mit $0.5 \cdot c$
- c) mit $0.9 \cdot c$

an Ihnen vorbei fliegt?

Lösungen

L1.

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla \times \nabla \times \vec{u} =$$

$$= \nabla(\partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z) - \nabla \times \begin{pmatrix} \partial_y u_z - \partial_z u_y \\ \partial_z u_x - \partial_x u_z \\ \partial_x u_y - \partial_y u_x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_x(\partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z) \\ \partial_y(\partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z) \\ \partial_z(\partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \partial_y(\partial_x u_y - \partial_y u_x) - \partial_z(\partial_z u_x - \partial_x u_z) \\ \partial_z(\partial_y u_z - \partial_z u_y) - \partial_x(\partial_x u_y - \partial_y u_x) \\ \partial_x(\partial_z u_x - \partial_x u_z) - \partial_y(\partial_y u_z - \partial_z u_y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_x^2 u_x + \partial_y^2 u_x + \partial_z^2 u_x \\ \partial_x^2 u_y + \partial_y^2 u_y + \partial_z^2 u_y \\ \partial_x^2 u_z + \partial_y^2 u_z + \partial_z^2 u_z \end{pmatrix}$$

L2. Die Geschwindigkeit des Elektronenstrahls v_e muss so sei, dass pro Periode T die Distanz zwischen zwei Strahlbäuchen (= Modulationsweite) d zurück gelegt wird: $v_e = d/T = d \cdot \nu$. Somit ist $d = v_e / \nu$. Aus der Beschleunigungsspannung lässt sich die Geschwindigkeit v_e ermitteln:

$$qU = eU = \frac{1}{2} m_e v_e^2 \rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$$

daraus folgt:

$$d = \frac{1}{\nu} \cdot \sqrt{\frac{2eU}{m_e}} = 2.97 \text{ cm}$$

Die Länge der Kavität muss auf die Wellenlänge der gewünschten Strahlung angepasst sein, damit Resonanz auftritt. Es wird sich dann in der Kavität eine stehende Welle ausbilden (vgl. dazu Abschnitt 613).

$$c = \lambda \nu \rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} = 15 \text{ cm};$$

Für eine beidseitig geschlossene Kavität wären 7.5 cm und für eine einseitig offene Kavität 3.75 cm ideal (vgl Abschnitt 626, Aufgabe A4).

L3.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{d^2 E}{dt^2} \rightarrow E(x, t) = \hat{E} \cdot \cos(kx \mp \omega t + \varphi)$$

mit $c = \lambda \nu$ ergibt sich

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ und } \omega = 2\pi \cdot \nu$$

L4.

$$\varepsilon_r = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 c^2}$$

Quarzglas: $\varepsilon_r = 2.1279$; statische Dielektrizitätszahl: $\varepsilon_r = 4$

Wasser: $\varepsilon_r = 1.7777$; statische Dielektrizitätszahl: $\varepsilon_r = 80$

Die Ursache für den Fehler kann nur bei ε_r liegen. Die in der Aufgabe angegebenen Werte sind die sogenannten statischen Dielektrizitätszahlen. Aus

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

ergeben sich jedoch für sichtbares Licht Frequenzen im Bereich von 10^{18} Hz. Bei diesen hohen Frequenzen reagiert das Medium träge, die Polarisierung fällt schwächer aus. Entsprechen sind die relativen Dielektrizitätszahlen kleiner als im statischen Fall, die Wellengeschwindigkeit somit höher.

L5.

(a) 0.94 m

(b) 0.87 m

(c) 0.44 m