

## 100 Kinematik: Wurfbewegungen

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Frage, wie sich Bahnkurven von Punktmassen mathematisch beschreiben lassen. Dabei stehen vor allem zwei mathematische Hilfsmittel im Vordergrund: Vektoren und Differentiale.

*Inhalt*

Die Lernziele sind:

*Lernziele*

1. Bewegungen in zwei- und dreidimensionalen Räumen mit Vektoren beschreiben können
2. Die Definitionen der kinematischen Grundgrößen auswendig kennen
3. Differentialkonzept anhand von Geschwindigkeit und Beschleunigung erklären können
4. Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung einer Bewegung als Funktion der Zeit skizzieren können
5. Wurfbewegungen ohne Luftwiderstand mit dem Computer simulieren können



*Beispiel*

Ausbruch des Stromboli (Oktober 2007): Zu sehen sind die parabel-förmigen Flugbahnen der glühenden Lavabomben (Pfeil).

## 110 Raum und Zeit

### 111 Ortsvektoren

#### *Theorie*

Im dreidimensionalen Raum können jedem Punkt drei Koordinaten zugeordnet werden. Dafür muss vorgängig ein Koordinatensystem definiert werden. Dieses wird als rechtshändiges System mit den Achsen für x-, y- und z-Koordinaten definiert. Die Koordinaten eines Punktes im Raum bilden einen Ortsvektor:

*Ortsvektor*

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (\text{Eq.1})$$

Die Strecke  $\vec{s}$  zwischen zwei Punkten mit den Ortsvektoren  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  kann als Differenzvektor  $\Delta\vec{r}$  geschrieben werden, wobei die Strecke ihre Richtung durch die Festlegung ZIEL minus START erhält:

*Strecke*

$$\vec{s} = \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (\text{Eq.2})$$

Die SI-Einheit<sup>1</sup> der Strecke (Länge) ist Meter (m).

*Meter*

#### *Beispiele*

B1. Der folgende Vektor beschreibt eine Kreisbahn in zwei Dimensionen:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \lambda \cos(\omega t) \\ \lambda \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Die Strecke zwischen zwei Punkten auf der Kreisbahn (Achtung, dies ist nicht die Strecke auf der Kreisbahn, s. Fig.1!) zwischen den Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  beträgt bei konstantem  $\omega$  (Kreisgeschwindigkeit)

---

<sup>1</sup> Die genauen Definition der Einheiten ist im Anhang gegeben.

$$\begin{aligned}
 s &= \Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \\
 &= \sqrt{\lambda^2 (\cos(\omega \cdot t_2) - \cos(\omega \cdot t_1))^2 + \lambda^2 (\sin(\omega \cdot t_2) - \sin(\omega \cdot t_1))^2} \\
 &= \lambda \sqrt{(\cos(\omega \cdot t_2) - \cos(\omega \cdot t_1))^2 + (\sin(\omega \cdot t_2) - \sin(\omega \cdot t_1))^2}
 \end{aligned}$$

*Kreisbewegung*

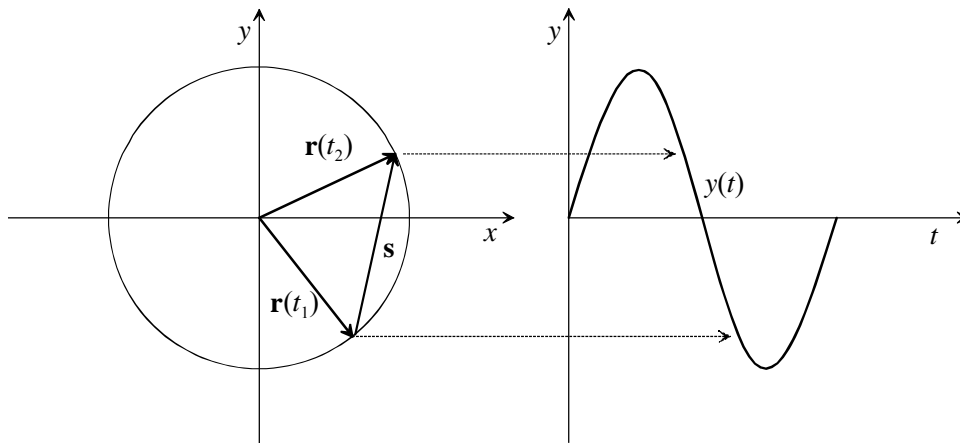


Fig.1. Strecke zwischen zwei Punkten auf einer Kreisbahn (mit Mittelpunkt gleich Ursprung des Koordinatensystems)

Die maximale Distanz für die zwei Punkte und den dazugehörigen Zeitpunkt können mittels folgender Überlegungen gefunden werden: Die Punkte liegen dann am weitesten auseinander, wenn die cos-Terme und oder sin-Terme eine möglichst grosse different ergeben. Dies ist z.B. der Fall, wenn  $\cos(\omega t_2) - \cos(\omega t_1) = 1 - (-1) = 2$  und folglich bei diesem gegebenen  $\omega t_2$  bzw.  $\omega t_1$   $\sin(\omega t_2) - \sin(\omega t_1) = 0 - 0 = 0$ . Die Strecke  $s$  wird dann zu  $\lambda \sqrt{2^2} = 2\lambda$  (also dem Kreisdurchmesser). Der Zeitpunkt  $t_2$  ergibt sich aus der Bedingung  $\cos(\omega t_2) = 1$ , also  $\omega t_2 = n \cdot 2\pi$  mit  $n = (0, 1, 2, 3, \dots)$  und somit  $t_2 = n \cdot 2\pi / \omega$ . Analog kann der Zeitpunkt  $t_1$  gefunden werden, dieser beträgt  $t_1 = (2n + 1) \cdot \pi / \omega$ . Die Zeitdifferenz  $\Delta t = t_2 - t_1$  ist dann folglich gegeben durch  $\Delta t = -\pi / \omega$  für gleiches  $n$ . Das Minuszeichen zeigt an, dass bei der Wahl für die Werte von  $\omega t$  ein negativer Drehsinn für die Bewegung von  $\vec{r}(t)$  resultiert.

B2. Für bestimmte Probleme oder Anwendungen empfiehlt sich die Verwendung angepasster Koordinatensysteme. Besonders günstig ist die an die Anpassung an die Symmetrie des Problems. Für Kreisbewegungen können

so z.B. Polarkoordinaten in Betracht gezogen werden, wobei die Ortsangabe durch einen Radius  $r$  und einen Winkel  $\varphi$  erfolgt.

*Polar-  
Koordinaten*

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Dabei hat jede Festlegung Vor- und Nachteile. In Fig.2. ist der gleiche Vektor einmal in karthesischen und einmal in Polarkoordinaten dargestellt. Wird nun die Differenz  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$  gebildet, ergeben sich Probleme bezüglich der Subtraktionsoperation. So ist die Differenz zwischen dem Vektor  $\vec{r}_2 = (0,1)$  und  $\vec{r}_1 = (1,0)$  in karthesischen Koordinaten  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (-1,1)$ , jedoch in Polarkoordinaten:

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3\pi/2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \pi/2 \end{pmatrix}$$

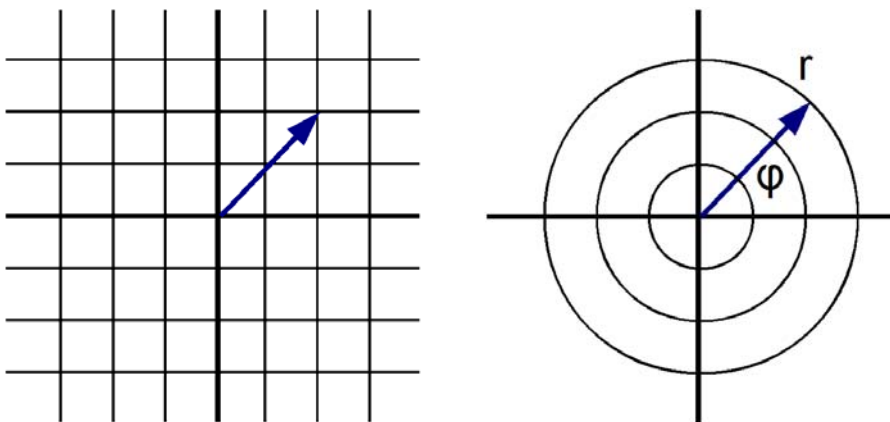


Fig.2. Karthesische Koordinaten und Polarkoordinaten

### Aufgaben

A1. Berechnen Sie den Betrag der Strecke zwischen den Punkten A(1m,3m,2m) und B(4m,-1m,2m).

A2. Gegeben sei der Ort als Funktion der Zeit  $t$ :

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} vt \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \text{ mit der Konstante } z.$$

- Berechnen Sie den Ortsvektor und die Distanz zum Ursprung des Koordinatensystems zur Zeit  $t = 4$  s.
- Welche Strecke wird zwischen  $t = 2$ s und  $t = 4$ s zurück gelegt, wenn  $v = 5$  m/s ist?

### Lösungen

L1. Der Betrag ist gegeben durch  $s = |\vec{s}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ , also  
 $s = \sqrt{(4m - 1m)^2 + (-1m - 3m)^2 + (2m - 2m)^2} = \underline{5m}$

L2.

$$\text{a) } \vec{r}(4s) = \begin{pmatrix} v \cdot 4s \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad \text{Distanz} = |\vec{r}| = r = \sqrt{v^2 \cdot 16s^2 + z^2}$$

$$\text{b) } \Delta \vec{r} = \vec{r}(4s) - \vec{r}(2s) = \begin{pmatrix} v \cdot 4s - v \cdot 2s \\ 0 \\ z - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cdot 2s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\Delta \vec{r}| = \Delta r = v \cdot 2s = 10m$$

## 112 Geschwindigkeit und Beschleunigung

*Theorie*

Nebst den drei Raumkoordinaten wird für die Beschreibung physikalischer Prozesse auch die Zeit benötigt. Angenommen, ein punktförmiges Objekt befinde sich zur Zeit  $t_1$  am Ort  $\vec{r}_1$  und zur Zeit  $t_2$  am Ort  $\vec{r}_2$ , so legt der Punkt während der Zeitdifferenz  $\Delta t = t_2 - t_1$  die Strecke  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  zurück. Für eine nicht beschleunigte Bewegung lässt sich die Geschwindigkeit schreiben als:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \Delta x / \Delta t \\ \Delta y / \Delta t \\ \Delta z / \Delta t \end{pmatrix} \quad (\text{Eq.3})$$

Für eine Bewegung nur in  $x$ -Richtung wird der Geschwindigkeitsvektor zu:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Eq.4})$$

Mit Geschwindigkeit kann sowohl der Geschwindigkeitsvektor als auch der Betrag der Geschwindigkeit gemeint sein. Streng genommen sollten aber diese beiden Grössen begrifflich getrennt werden, z.B. in dem mit Geschwindigkeit die vektorielle Grösse und mit Schnelligkeit der Betrag der Geschwindigkeit gemeint ist (analog zu den englischen Begriffen Velocity und Speed, s. Fig.3). Im Folgenden werden aber die Begriffe Geschwindigkeitsvektor und Geschwindigkeit im Sinn des Betrages des Geschwindigkeitsvektors begrifflich nicht explizit getrennt.

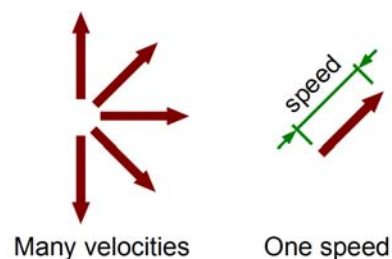


Fig.3. Geschwindigkeit und Schnelligkeit

*Zeit*

*Geschwindigkeitsvektor*

*Geschwindigkeit und Schnelligkeit*

Die Formel Eq.3 und Eq.4 gelten nur für Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit. Dies ist jedoch eine Ausnahme. Für sich zeitlich verändernde Geschwindigkeiten ist diese eine Funktion der Zeit, also:  $\vec{v} = \vec{v}(t)$ . Die Änderung einer Funktion wird durch die Steigung beschrieben. Dabei ist der Quotientenvektor  $\Delta\vec{r} / \Delta t$  nur ein Schätzwert, welcher immer besser wird für kleine Zeitschritte  $\Delta t$ . Im Folgenden soll nur die Bewegung in x-Richtung betrachtet werden.

*nicht konstante Geschwindigkeiten*

Mit Steigung wird in der Mathematik die Eigenschaft der Steilheit einer Kurve beschrieben. Für eine Gerade  $x(t) = v_x t + x_0$  ist die Steigung definiert durch:

*Steigung*

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (\text{Eq.5})$$

Sei nun  $x = x(t)$  eine reelle Funktion mit dem Definitionsbereich  $D$  ( $t \in D \subset \mathbb{R}$ ), so kann nun für die Punkte  $P(t, x) \in x(t)$  und  $Q(t + \Delta t, x + \Delta x) \in x(t)$  die Steigung der Verbindungsgerade mit (Eq.5) berechnet werden. Nun soll aber die Steigung der Kurve  $x(t)$  bei Punkt P genau bestimmt werden. Wenn sich der Punkt Q verschiebt, ändert sich auch die Steigung der Verbindungsgeraden  $\overline{PQ}$  (Fig.2).

*Steigung einer Tangenten*

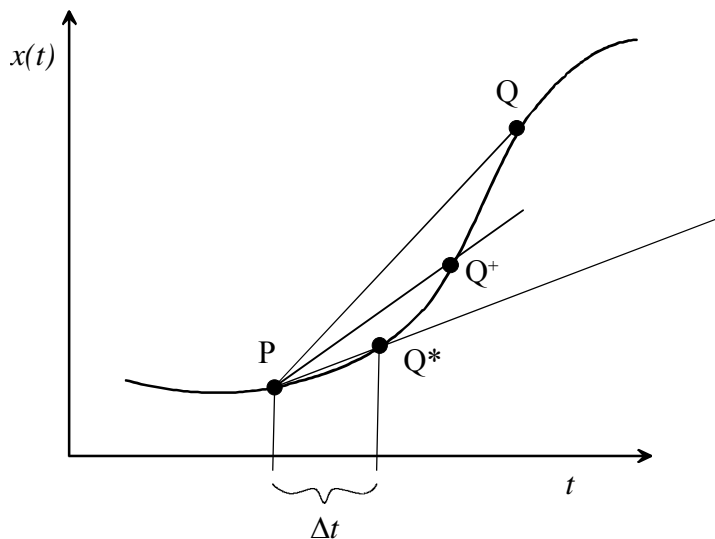


Fig.4. Steigung einer Kurve

In Fig.4. kann festgestellt werden, dass sich die Gerade  $\overline{PQ}$  mit kleiner werdendem  $\Delta t$  einer Tangente an die Kurve bei P annähert. Die Steigung  $v_x = v_x(t)$  der Tangente beim Punkt P lässt sich durch eine Grenzwertbildung ermitteln:

*Grenzwert-  
Bildung*

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right)$$

(Eq.6)

Im Gegensatz zu einer Geraden ändert sich aber bei der Funktion  $x(t)$  der Wert für die Steigung ständig. Die Steigung  $v_x = v_x(t)$  ist deshalb im Allgemeinen wieder eine Funktion, welche als Ableitung bezeichnet wird. Um nicht jedes Mal den ganzen Ausdruck für die Grenzwertbildung hinschreiben zu müssen, werden folgende abgekürzte Schreibweisen verwendet:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad (\text{Eq.7})$$

*Ableitung und  
Ableitungs-  
funktion*

Die SI-Einheit der Geschwindigkeit ist  $m/s$ . Im Kapitel 100 müssen meistens noch keine Ableitungen analytisch berechnet werden. Hingegen ist diese Betrachtung wichtig für die Computersimulation physikalischer Prozesse, welche in diesem Kapitel anhand von Wurfbewegungen eingeführt werden soll.

Die Geschwindigkeit  $v_x(t) = \dot{x}(t)$  ist also die zeitliche Ableitung der Ortsfunktion  $x(t)$ . Diese Definition kann problemlos auf den Geschwindigkeitsvektor (Eq.3) übertragen werden:

*Geschwindig-  
keitsvektor in  
differentieller  
Form*

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (\text{Eq.8})$$

Dabei wird der Operator der zeitlichen Ableitung geschrieben als:

$$\frac{d}{dt} [\dots] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta [\dots]}{\Delta t} \right] \quad (\text{Eq.9})$$



Die Geschwindigkeitsfunktion  $\vec{v}(t)$  ändert sich im Allgemeinen ebenfalls mit der Zeit. Die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit ist die Beschleunigung  $\vec{a} = \vec{a}(t)$ . Diese ist im Allgemeinen ebenfalls eine Funktion der Zeit, welche sich als Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion schreiben lässt:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (\text{Eq.10})$$

*Beschleunigung*

Da die Geschwindigkeit eine vektorielle Grösse darstellt, bildet auch die Ableitung davon, also die Beschleunigung, einen Vektor. Da die Geschwindigkeit ihrerseits bereits die zeitliche Ableitung der Ortsfunktion ist, kann die Beschleunigung auch als die zweite Ableitung der Ortsfunktion aufgefasst werden (mit der SI-Einheit  $m/s^2$ ):

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (\text{Eq.11})$$

*Ableitung und Ableitungsfunktion*

### Beispiele

B1. Sei  $x(t) = \frac{a_x}{2} \cdot t^2$ . Wie gross ist die Geschwindigkeit bei  $t = 2$  s für  $a_x = 1m/s^2$ ?

Näherungsweise ist die Geschwindigkeit

$$v \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{\frac{a_x}{2} \cdot (t + \Delta t)^2 - \frac{a_x}{2} \cdot t^2}{\Delta t}$$

Um ein möglichst genaues Resultat zu erhalten, sollte der Zeitschritt  $\Delta t$  so klein wie möglich gewählt werden:

$$\text{Für } \Delta t = 1 \text{ s ergibt sich: } v \approx \frac{\frac{1}{2} m/s^2 \cdot (2s + 1s)^2 - \frac{1}{2} m/s^2 \cdot (2s)^2}{1s} = 2.5 \text{ m/s}$$

$$\text{Für } \Delta t = 0.1 \text{ s ergibt sich: } v \approx \frac{\frac{1}{2} m/s^2 \cdot (2s + 0.1s)^2 - \frac{1}{2} m/s^2 \cdot (2s)^2}{0.1s} = 2.05 \text{ m/s}$$

Für  $\Delta t = 0.01$  s ergibt sich: 
$$v \approx \frac{\frac{1}{2} m/s^2 \cdot (2s + 0.01s)^2 - \frac{1}{2} m/s^2 \cdot (2s)^2}{0.01s} =$$
  
 $= 2.005$  m/s

Für  $\Delta t = 0.001$  s ergibt sich 2.0005 m/s. Für  $\Delta t \rightarrow 0$  strebt die errechnete Geschwindigkeit gegen 2 m/s.

B2. Sei  $v(t) = \frac{k}{t} + v_0$ . Wie gross ist die Beschleunigung bei  $t = 3$  s für

$k = 2$  m?

Für  $\Delta t = 0.1$  s ergibt sich: 
$$a \approx \frac{\frac{k}{t+0.1s} + v_0 - \frac{k}{t} - v_0}{0.1s} = \frac{\frac{2m}{3.1s} - \frac{2m}{3s}}{0.1s} =$$
  
 $= -0.215$  m/s<sup>2</sup>

Für  $\Delta t = 0.01$  s ergibt sich -0.221 m/s<sup>2</sup> und für  $\Delta t = 0.001$  s -0.222 m/s<sup>2</sup>. Auch hier strebt für  $\Delta t \rightarrow 0$  die berechnete Beschleunigung gegen einen Grenzwert (-0.22222 m/s<sup>2</sup>).

Um die Geschwindigkeit oder die Beschleunigung für einen beliebigen Zeitpunkt  $t$  zu berechnen, gibt es Ableitungsregeln, welche relativ einfach angewendet werden können. Diese sind im Anhang 1 und 2 hergeleitet.

### Aufgaben

A1. Die Messung des Aufenthaltsortes eines punktförmigen Objekts relativ zu einem x-y-z-Koordinatensystem ergab folgende Werte:

Zeit  $t = 2$  s :  $x = 2m; y = 3m; z = 0m$

Zeit  $t = 4$  s :  $x = -1m; y = 1m; z = 12m$

- Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor für den Fall, dass das Objekt sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt,
- Bestimmen Sie den Betrag von Geschwindigkeit und Beschleunigung anhand der Werte aus Teilaufgabe a.

A2. Für eine beschleunigte Bewegung in x-Richtung lässt sich die während der Zeitdauer  $t$  Strecke  $x$  aus der Beschleunigung  $a_x$  durch folgende Formel berechnen:

$$x = \frac{1}{2} a_x \cdot t^2$$

- Begründen Sie diese Formel.
- Welche Strecke (Betrag) legt ein punktförmiges Objekt in 10 Sekunden zurück welches in x-Richtung mit  $2m/s^2$  und in z-Richtung mit  $10m/s^2$  beschleunigt?

A3. Die Position eines Objekts wurde in Abhängigkeit der Zeit gemessen (Messwerte Tab.1). bestimmen Sie numerisch die Geschwindigkeit und die Beschleunigung als Funktion der Zeit. Verwenden Sie dazu ein Tabellenkalkulationsprogramm und stellen Sie  $s(t)$ ,  $v(t)$  und  $a(t)$  graphisch dar.

Tab.1. Position in Abhängigkeit der Zeit

$t / s$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
$s / m$	0	1.2	2.3	3.4	4.4	5.2	5.7	5.9	6.0	5.8

$t / s$	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5
$s / m$	5.6	5.0	4.1	3.1	2.0	1.0	-0.1	-1.1	-2.3	-3.5

A4. In einem Gefäss befinde sich eine Flüssigkeit. Beim Ausfliessen der Flüssigkeit wurde die Füllhöhe  $h(t)$  als Funktion der Zeit bestimmt:

$$h(t) = h_0 \cdot e^{-bt}$$

Bestimmen Sie numerisch die Sinkgeschwindigkeit des Flüssigkeitspegels als Funktion der Zeit. Verwenden Sie dazu  $h_0 = 1m$  und  $b = 1s^{-1}$ . Stellen Sie die Resultate graphisch dar: Was fällt auf?

A5. Die Position eines Objektes sei gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{5} \cdot \cos t \\ \frac{t}{5} \cdot \sin t \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie numerisch die Geschwindigkeiten in x- und y-Richtung. Stellen Sie die Bahnkurve und die Geschwindigkeiten graphisch dar.

A6. Die zweidimensionale Bewegung einer punktförmigen Masse wurde durch eine Positionsmessung festgehalten (Messwerte Tab.2). Bestimmen Sie numerisch die Geschwindigkeiten in  $x$ - und  $y$ - Richtung. Stellen Sie die Bahnkurve und die Geschwindigkeiten graphisch dar.

Tab.2. Position eines Körpers in Abhängigkeit der Zeit

t / s	x / m	y / m
0	2	10
1	2.5	10
2	3.2	9.8
3	4	9.5
4	5	9.1
5	6	8.5
6	7	8
7	7.8	7.5
8	8.5	7
9	9	6.5
10	9.3	6
11	9.5	5.5
12	9.7	5
13	9.9	4.5
14	10.1	4
15	9.8	3.5
16	9.2	3
17	8	2.5
18	7	2
19	6	1.6
20	5.5	1.2
21	5	1
22	4.7	0.9
23	4.5	1.1
24	4.4	1.3
25	4.3	1.7
26	4.2	2.5
27	4.1	4
28	4	6
29	3.9	8
30	3.8	10

## Lösungen

L1.

$$(a) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta x / \Delta t \\ \Delta y / \Delta t \\ \Delta z / \Delta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1m - 2m) / 2s \\ (1m - 3m) / 2s \\ (12m - 0m) / 2s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} m/s$$

$$(b) \quad v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \underline{6.265m/s}; a = 0 \text{ m/s}^2$$

L2.

(a) Die Strecke kann gemäss Eq.5 aus der Geschwindigkeit berechnet werden:

$$x = v_x \cdot t$$

Nun ändert sich aber die Geschwindigkeit dauernd, deshalb gilt:

$$x \neq v_x \cdot t = (a_x \cdot t) \cdot t = a_x \cdot t^2$$

Wird hingegen die mittlere Geschwindigkeit  $\frac{v_x(t) + v_x(t + \Delta t)}{2}$  genommen, so ergibt sich das korrekte Resultat:

$$x = \frac{1}{2} v_x \cdot t = \frac{1}{2} a_x \cdot t^2$$

Eine bessere Begründung liefert die Differentialrechnung: Wird die Streckenfunktion abgeleitet, muss sich die Geschwindigkeit ergeben:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} a t^2 \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta x}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{0.5a(t + \Delta t)^2 - 0.5at^2}{\Delta t} \right] \\ &= \frac{a}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{t^2 + 2\Delta t \cdot t + \Delta t^2 - t^2}{\Delta t} \right] = \frac{a}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [2t + \Delta t] = \frac{a}{2} \cdot 2t = a \cdot t = v(t) \end{aligned}$$

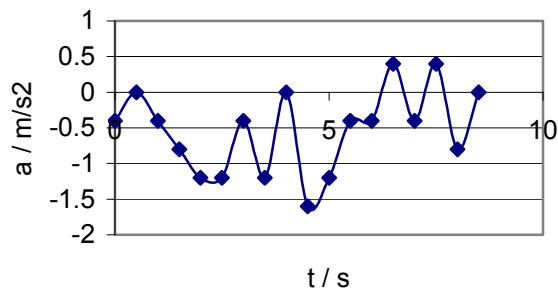
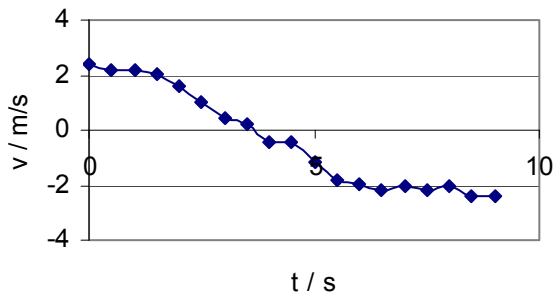
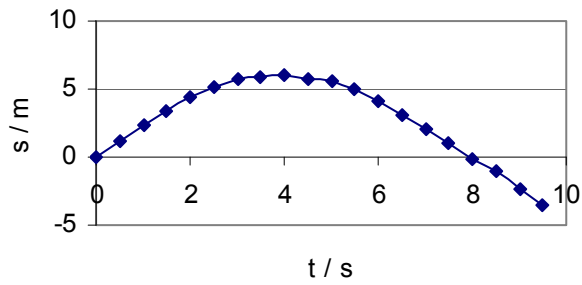
$$(b) \quad \Delta \vec{r} = \vec{s} = \begin{pmatrix} 0.5a_x \cdot t^2 \\ 0.5a_y \cdot t^2 \\ 0.5a_z \cdot t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1m/s^2 \cdot 100s^2 \\ 0m \\ 5m/s^2 \cdot 100s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100m \\ 0m \\ 500m \end{pmatrix}$$

$$s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \underline{509.9m}$$

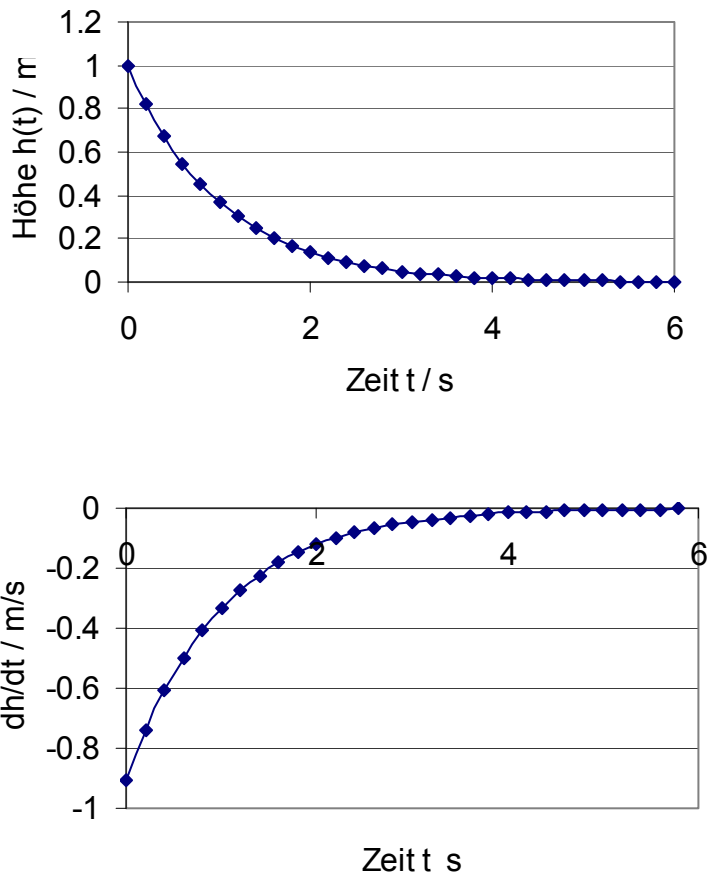
L3. Für die numerische Berechnung kann folgende Tabelle programmiert werden:

Zeit $t / s$	Position $s / m$	$v / m/s$	$a / m/s^2$
$t_0$	$s_0 = s(t_0)$	$v_0 = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}$	$a_0 = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}$
$t_1$	$s_1 = s(t_1)$	$v_1 = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$	$a_1 = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$
$t_2$	$s_2 = s(t_2)$	...	...

Folgende Diagramme resultieren:

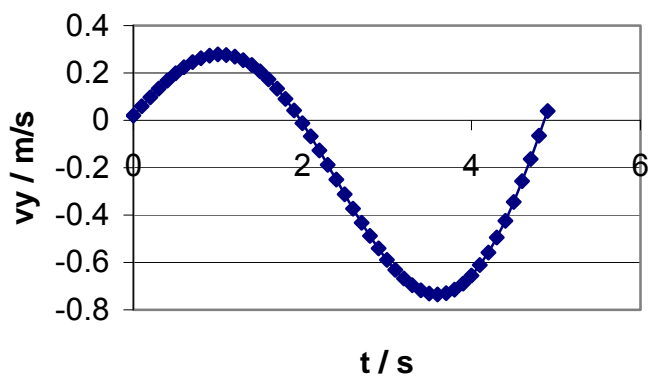
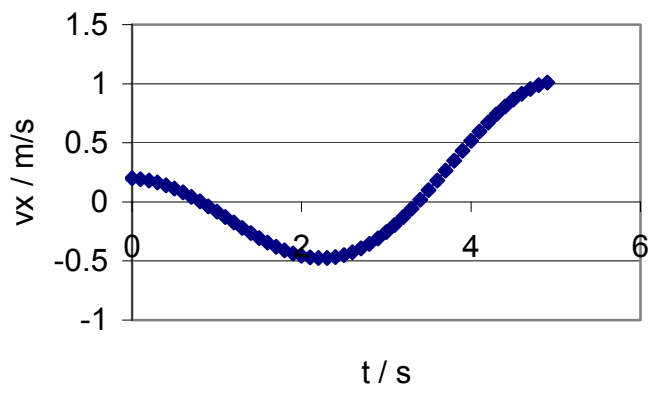
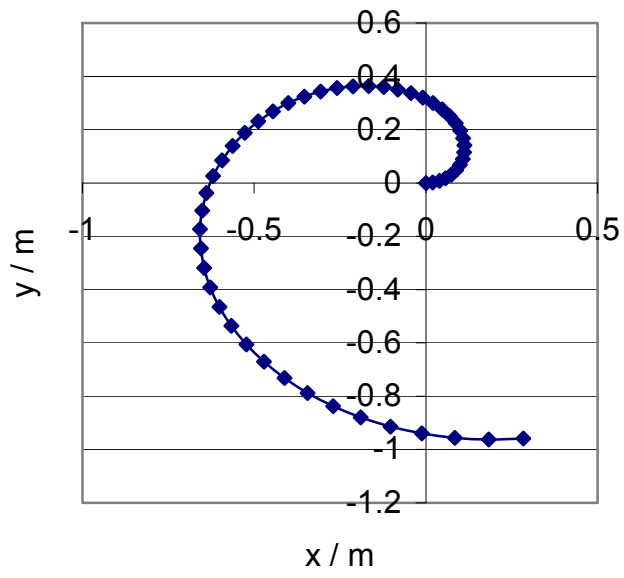


L4. Die numerische Rechentabelle ist analog zu Aufgabe 3. Es resultieren folgende Diagramme:



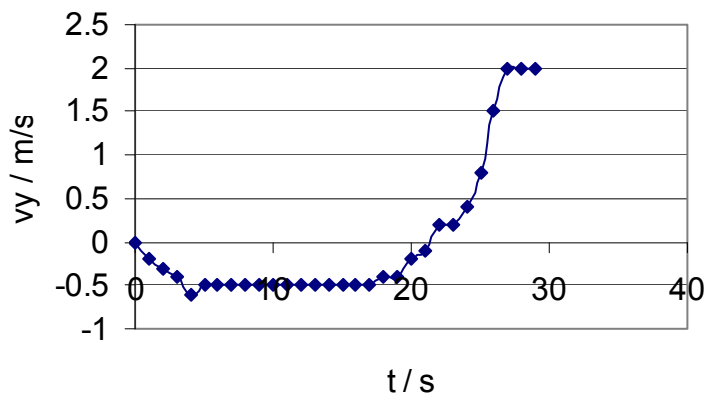
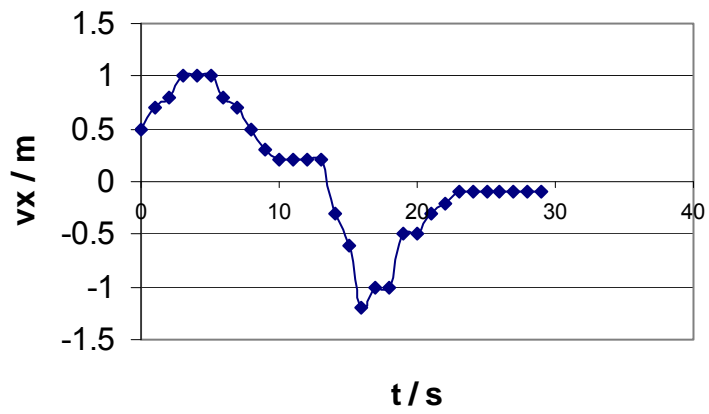
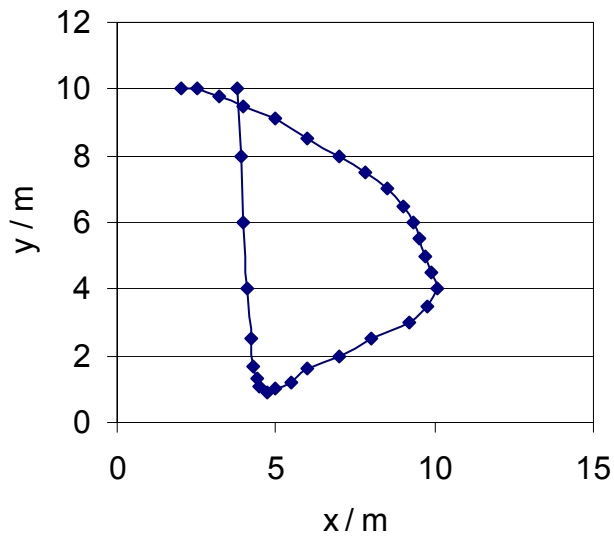
Es fällt auf, dass sich beide Kurven exponentiell verhalten. Die Ableitung einer Exponentialfunktion scheint also wieder eine Exponentialfunktion zu sein, hier mit negativem Vorzeichen (siehe spätere Kapitel und 002: Anhang 2). Wird das  $\Delta t$  kleiner gewählt, lässt sich beobachten, wie die Ableitung  $\left[ \frac{dh}{dt} \right]_{t=0} = \dot{h}(0)$  gegen 1 strebt. Die obigen Resultate sind also nicht genau, sie enthalten numerische Fehler. Um diese numerischen Fehler so klein wie möglich zu halten, muss das  $\Delta t$  möglichst klein gewählt werden.

L5. Die numerische Rechentabelle ist analog zu Aufgabe 3, jedoch muss die Geschwindigkeit für jede Richtung getrennt berechnet werden.





L6. Analog Aufgabe 5.



## 120 Berechnung von Bahnkurven

### 121 horizontaler Wurf

#### Theorie

Beim horizontalen Wurf wird ein Gegenstand in waagrechter Richtung geworfen. Dieser Gegenstand fliegt dann nicht einfach gerade aus, sondern wird durch die Erdanziehung nach unten abgelenkt (Fig.1).

*Bahnkurve*

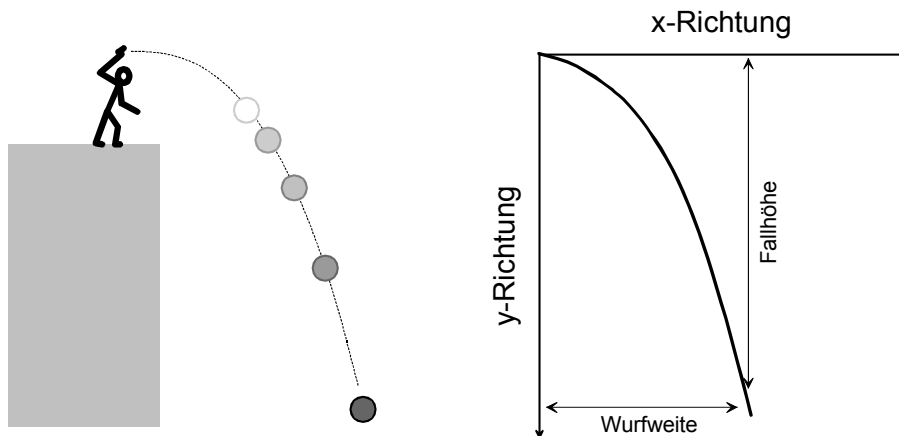


Fig.1. Horizontaler Wurf

Die Bahnkurve sieht aus wie eine Parabel. Dass es sich um eine Parabel handelt, kann durch eine einfache Rechnung gezeigt werden. Dabei ist es sehr hilfreich, wenn man sich die Bewegung des Gegenstandes als eine Kombination einer Bewegung in x-Richtung und einer Bewegung in y-Richtung vorstellt!

Die Bewegung lässt sich vektoriell in zwei Dimensionen darstellen (hier mit positiver y-Achse nach unten):

*Bewegung in Raumrichtungen*

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \cdot t \\ \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$$

Im Folgenden soll nun jede Raumrichtung getrennt betrachtet werden.

☀ **Kernidee:** Eine räumliche Bewegung kann in Bewegungen in den einzelnen Raumrichtungen zerlegt oder aus diesen zusammengesetzt werden.

Wenden wir diese Kernidee auf den schiefen Wurf an: In  $x$ -Richtung startet der Gegenstand mit einer Anfangsgeschwindigkeit  $v_x = \Delta x / \Delta t$ , welche konstant bleibt, wenn kein Luftwiderstand wirkt. Es gilt deshalb für die  $x$ -Richtung:

$$x = v_x \cdot t \quad (\text{Eq.12})$$

Die Bewegung in  $y$ -Richtung ist ein freier Fall. Die Geschwindigkeit in  $y$ -Richtung  $v_y = v_y(t)$  ist demnach gegeben durch  $v_y(t) = g \cdot t + v_y(t=0s)$ , wobei in  $y$ -Richtung beim horizontalen Wurf die Anfangsgeschwindigkeit  $v_y(0s) = 0m/s$  ist. Die Strecke ist gegeben durch:

$$y = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (\text{Eq.13})$$

Die Strecke in  $y$ -Richtung nimmt quadratisch mit der Zeit zu. Aus Eq.12 und Eq.13 können wir nun die Bahnkurve in der  $x$ - $y$ -Ebene berechnen. Dabei ersetzen wir in Eq.13  $\Delta t$ , indem wir Eq.12 umformen:  $t = x / v_x$ , wobei  $v_x$  die Anfangsgeschwindigkeit in  $x$ -Richtung ist.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} g \cdot t^2 = \frac{1}{2} g \cdot \left( \frac{x}{v_x} \right)^2 \\ &= \frac{g}{2(v_x)^2} \cdot x^2 \end{aligned} \quad (\text{Eq.14})$$

Damit haben wir bewiesen, dass es sich bei der Bahnkurve tatsächlich um eine Parabel handelt. Zudem können wir jetzt direkt aus der Fallhöhe  $y$  die Wurfweite  $x$  berechnen und umgekehrt.

*Bewegung in  $x$ -Richtung*

*Bewegung in  $y$ -Richtung*

*Bewegung in  $x$ - $y$ -Richtung*

*Wurfparabel*

### Aufgaben

A1. Wie weit fliegt ein Ball, der mit 1.5 m/s aus einem Fenster in 80 m Höhe geworfen wird?

A2. Ein Ball wird mit einer horizontalen Anfangsgeschwindigkeit von 1.3 m/s von einem 57 m hohen Kraterrand eines Mondkraters geworfen.

- a) Wie weit fliegt der Ball?
- b) Wie schnell ist die Endgeschwindigkeit des Balls kurz vor dem Auftreffen?
- c) Mit welchem Winkel würde der Ball auf eine horizontale Oberfläche treffen?

A3. Im Film springen Helden oft von einer Brücke auf einen fahrenden Lastwagen. Meistens werden solche Sprünge von einem Stuntman ausgeführt, welcher im Voraus alles genau plant. Dazu gehört auch folgende Frage:

Wo muss sich der Lastwagen zur Zeit des Absprungs befinden, damit der Stuntman den darauf vorbereiteten Landeplatz erreicht?

- a) Lösen Sie die Aufgabe für die Lastwagengeschwindigkeit  $v$  und die Höhe  $h$ .
- b) Lösen Sie die Aufgabe für  $v = 40 \text{ km/h}$  und  $h = 2.5 \text{ m}$ .

A4. Der horizontale Wurf soll mit dem Computer simuliert werden. Zur Berechnung der Bahnkurve muss aus der Geschwindigkeit die Position und somit die zurückgelegte Strecke berechnet werden.

Erstellen Sie eine Berechnungstabelle, mit der aus der Geschwindigkeit die zurückgelegte Strecke berechnet werden kann, und zwar für

a)  $v = \text{const.}$

b)  $v = g \cdot t$

A5. Ein Ball wird schief in die Luft geworfen. Die vertikale Anfangsgeschwindigkeit betrage 3 m/s.

- Wie lange dauert es, bis der Ball wieder auf die Abwurfhöhe zurück kehrt
- Welche maximale Höhe erreicht er?

A6. Ein frei fallender Körper werde horizontal beschleunigt. Die Geschwindigkeit in horizontaler ( $x$ ) – Richtung sei gegeben durch:

$$v_x = k \cdot \sqrt{t} + v_0$$

Mit  $k = 1 \text{ m/s}^{1.5}$  und  $v_0 = 2.5 \text{ m/s}$ . Berechnen Sie den Zeitpunkt, bei dem der Körper mit einem Winkel von  $45^\circ$  zur horizontalen Richtung nach unten beschleunigt wird.

### Lösungen

L1. 
$$x = \sqrt{\frac{2(v_x)^2 \cdot y}{g}} = \underline{6.06 \text{ m}}$$

L2.

(a) 
$$x = \sqrt{\frac{2(v_x)^2 \cdot y}{g}} = \underline{10.9 \text{ m}}$$

(b) 
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_x^2 + (g \cdot t)^2} = \sqrt{v_x^2 + \left(g \cdot \frac{x}{v_x}\right)^2}$$
  

$$= \underline{13.73 \text{ m/s}}$$

(c) 
$$\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{g \cdot \frac{x}{v_x}}{v_x} = \frac{g \cdot x}{v_x^2}$$

$$\alpha = \arctan \left[ \frac{g \cdot x}{v_x^2} \right] = \underline{84.6^\circ}$$

L3.

$$(a) \quad s = v \cdot t = v \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$(b) \quad s = \underline{7.9m}$$

L4. Für den  $k$ -ten Zeitschritt  $\Delta t_k$  gilt:

$$(a) \quad \Delta s_k = v \cdot \Delta t_k \quad \text{und} \quad s = \sum_k \Delta s_k$$

$$(b) \quad \Delta s_k = g t_k \cdot \Delta t_k \quad \text{und} \quad s_k = s_{k-1} + \Delta s_k$$

Dieses verfahren nennt man numerische Integration (Umkehrung der Ableitung!)

L5.

$$a) \quad v_y(t_b/2) = v_y(0) - g \cdot \frac{t_b}{2} = 0 \rightarrow t_b = \frac{2v_y(0)}{g} = 0.61s$$

$$b) \quad y_{\max} = \frac{1}{2} g \left( \frac{t_b}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} g \left( \frac{v_0(0)}{g} \right)^2 = \frac{v_y^2(0)}{2g} = 0.46m$$

L6.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = k \cdot \frac{d}{dt} [\sqrt{t}] + 0 = k \cdot \frac{1}{2} \cdot t^{-0.5} = \frac{k}{2 \cdot \sqrt{t}}$$

Bei einen Winkel von  $45^\circ$  ist  $a_x = g$  und somit:

$$\sqrt{t} = \frac{k}{2g}, \text{ also } t = \left( \frac{k}{2g} \right)^2 = 2.598 \cdot 10^{-3} s$$

## 122 schiefer Wurf

*Theorie*

In Abschnitt 121 wurde die Bahnkurve analytisch hergeleitet. Dies wäre auch für den schiefen Wurf möglich. Jedoch soll an dieser Stelle ein anderer Weg besprochen werden: Die Computersimulation.

*Methode*

Für die x-Richtung (horizontale Richtung) gilt ohne Luftwiderstand für ein während dem  $n$ -ten Zeitschritt zurück gelegtes Streckenstück  $\Delta x$ :

*Bewegung in x-Richtung*

$$\Delta x_n = v_x \cdot \Delta t \quad (\text{Eq.15})$$

Dabei ist  $v_x$  die Anfangsgeschwindigkeit in x-Richtung. Ohne Luftwiderstand ist diese konstant. Die während der Zeitdauer  $t$  Strecke  $x(t)$  ergibt sich als Summe aller Teilstücke:

*zurückgelegte Strecke*

$$x(t = n \cdot \Delta t) = \sum_n \Delta x_n \quad (\text{Eq.16})$$

Für die horizontale Richtung sind alle Teilstücke  $\Delta x_n$  gleich gross, es gilt also:  $x(t) = n \cdot \Delta x_n = v_x \cdot n \cdot \Delta t$ .

Für die y-Richtung (vertikale Richtung) muss zusätzlich die Schwerebeschleunigung  $g$  berücksichtigt werden. Deshalb muss für jeden Zeitschritt  $\Delta t$  die aktuelle vertikale Geschwindigkeit  $v_y(t) = v_y(n \cdot \Delta t)$  neu berechnet werden. Die Geschwindigkeitsänderung  $\Delta v_n$  für den  $n$ -ten Zeitschritt ist gegeben durch:

*Bewegung in y-Richtung*

$$\Delta v_n = -g \cdot \Delta t \quad (\text{Eq.17})$$

Die Geschwindigkeit  $v_y(t) = v_y(n \cdot \Delta t)$  ergibt sich durch Summation:

*Aktuelle Geschwindigkeit*

$$v_y(n \cdot \Delta t) = v_y(0) + \sum_n \Delta v_n \quad (\text{Eq.18})$$

Die während der Zeit  $t$  zurück gelegte Strecke  $y(t)$  ist nun gegeben durch:

*Zurückgelegte Strecke in y-Richtung*

$$y(t = n \cdot \Delta t) = \sum_n \Delta y_n = \sum_n v_y(n \cdot \Delta t) \cdot \Delta t \quad (\text{Eq.19})$$

Die Formeln Eq.18 und Eq.19 sind Approximationen (Warum?).

### *Aufgaben*

A1. Implementieren Sie in einem Tabellenkalkulationsprogramm (GNUmeric, Excel etc.) die im Theorieteil beschriebene Methode und stellen Sie für verschiedene Werte von  $v_x$  und  $v_y(0)$  die Wurfbahn graphisch dar.

A2. Ermitteln Sie für verschiedene Wurfwinkel die Wurfweite: Bei welchem Winkel wird die grösste Wurfdistanz erreicht, bei welchem Winkel die grösste Wurfhöhe? (Wie lässt sich der Wurfwinkel bestimmen?)

A3. Simulieren Sie einen Wurf auf dem Mond: Wie verändert sich die Wurfweite in Verhältnis zur Schwerebeschleunigung? Lässt sich dieses Resultat durch Handrechnung prüfen? (Hinweis: Bahnkurve als  $y = f(x)$  analog zum Abschnitt 121 berechnen)

A4. Überlegen Sie sich, wie die Simulation erweitert werden müsste, damit der Luftwiderstand mitberücksichtigt werden könnte? (→ Dynamik **200**)



Lösungen

L1. Kern der Simulation bildet die folgende Berechnungstabelle (Tab.1).

Tab.1. Schrittweise Berechnung der Geschwindigkeiten und Strecken.

$t$	$\Delta v_y(t)$	$v_y(t)$	$\Delta y(t)$	$y(t)$	$\Delta x(t)$	$x(t)$
0	$= -g \cdot \Delta t$	$= v_y(0)$	$= v_y(0) \cdot \Delta t$	$= 0$	$= v_x \cdot \Delta t$	...
0.01	$= -g \cdot \Delta t$	$= v_y(0) - g \cdot \Delta t$	$= v_y(0.01) \cdot \Delta t$	$= \Delta y(0)$	$= v_x \cdot \Delta t$	...
0.02	$= -g \cdot \Delta t$	$= v_y(0.01) - g \cdot \Delta t$	$= v_y(0.02) \cdot \Delta t$	$= y(0.01) + \Delta y(0.01)$	$= v_x \cdot \Delta t$	...
...	...	...	...	...	...	...

Fig.2 zeigt Wurfbahnen bei verschiedenen Wurfwinkeln.

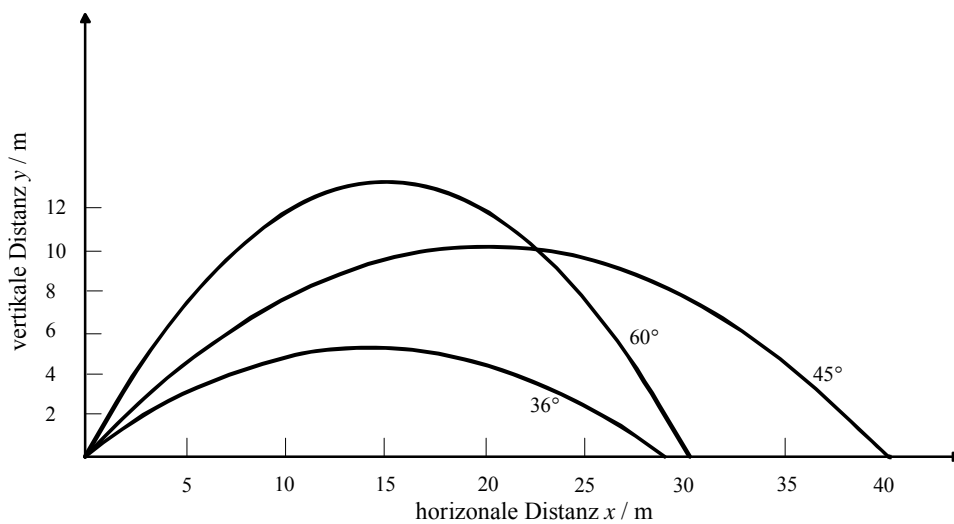


Fig.2. Simulierte Wurfbahnen. Parameterwerte: 36°-Bahn:  $v_x = 14m/s$ ;

$v_y = 10m/s$ ;  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 17.2m/s$ ; 45°-Bahn:  $v_x = 14m/s$ ;

$v_y = 14m/s$ ;  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 19.8m/s$ ; 60°-Bahn:  $v_x = 9.2m/s$ ;

$v_y = 16m/s$ ;  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 18.5m/s$

L2. maximale Wurfweite wird bei  $45^\circ$  erreicht. Für diese Fragestellung ist es von Vorteil, den Betrag der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und den Wurfwinkel  $\alpha$  vorzugeben. Die Anfangsgeschwindigkeiten für die x- und die y-Richtung sind dann gegeben durch:

$$v_x(0) = v_0 \cdot \cos \alpha$$

$$v_y(0) = v_0 \cdot \sin \alpha$$

L3. Wurfweite und Wurfhöhe werden grösser bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit: Die Wurfweite steigt um den Faktor 6, analog zur Reduktion von  $g$  um diesen Faktor. Das lässt sich durch die Berechnung der Bahnkurve zeigen:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 t \cdot \cos \alpha \\ v_0 t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$$

$$t = \frac{x(t)}{v_0 \cos \alpha} \rightarrow y(x) = \frac{v_0 x \cdot \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2$$

$$y = x \cdot \tan \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2$$

Maximale Reichweite durch Suche der Nullstellen:

$$y = x \cdot \tan \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 = 0 \quad \rightarrow x_1 = 0$$

$$\tan \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x_2 = 0$$

$$\rightarrow x_2 = \frac{(2 \tan \alpha \cos^2 \alpha) \cdot v_0^2}{g} = \frac{(2 \sin \alpha \cos \alpha) \cdot v_0^2}{g} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2\alpha)$$

L4. Der Luftwiderstand wirkt der Bewegungsrichtung entgegen. Dabei kann dieser als Kraft betrachtet werden ( $\rightarrow$  Kap. **200**)

## 200 Dynamik: Kräfte und Impuls

Die Mechanik beschäftigt sich mit der Beschreibung von Bewegungen von Körpern. Sie ist im Wesentlichen aus der Entwicklung einfacher Maschinen und der Beobachtung von Himmelskörper hervorgegangen. Es gibt es zwei unterschiedliche Ansätze. Die Newtonsche Mechanik (begründet auf Isaak NEWTON 1643-1727 und Galileo GALILEI 1564-1642) geht von den Grundgrößen Ort und Zeit und den daraus abgeleiteten Größen Geschwindigkeit und Beschleunigung aus. Ein anderer Weg führt über die Betrachtung der Energie eines Körpers – ein Ansatz, welcher in Kap. 300 besprochen wird.

*Inhalt*

Im Rahmen der Newtonschen Mechanik spielt die Kraft eine zentrale Rolle. Das Unterkapitel 220 beschäftigt sich exemplarisch mit der Anwendung dieses Begriffs auf Fall- und Wurfbewegungen. Im Unterkapitel 230 wird die mit der Kraft zusammenhängende Grösse Impuls behandelt. Zuerst werden aber im Unterkapitel 210 die Ursache von Kräften und die fundamentalen Wechselwirkungen im Bereich Gravitation und Elektrizität behandelt.

Die Lernziele sind:

*Lernziele*

1. Bewegungsgleichungen aufstellen können
2. Die Definitionen für Kraft und Impuls auswendig kennen
3. Wurf- und Fallbewegungen mit Luftwiderstand mit dem Computer simulieren können
4. Differentialrechnung auf einfache Beispiele in der Mechanik anwenden können



Fig.1. Band-Generator und Konduktorkugeln zur Untersuchung elektrischer Kräfte

## 210 Ursache von Kräften

### 211 Trägheit

#### Theorie

Schon anhand der Definition der Kraft wird ein Grundprinzip sichtbar, welches auf NEWTON zurück geht. Eine auf einen Körper mit Masse  $m$  wirkende Kraft  $\vec{F}$  führt zu einer Beschleunigung  $\vec{a}$  des Körpers.

#### Definition der Kraft

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad (\text{Eq.1})$$

Die SI-Einheit der Kraft ist  $\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2 = \text{N}$  (Newton). Da die Beschleunigung eine vektorielle Grösse darstellt, muss auch die Kraft vektoriell sein, da die Masse eine skalare Grösse ist.

Daraus lässt sich ableiten, dass ohne Einwirkung einer Kraft ein Körper seinen Bewegungszustand beibehält, also Richtung und Betrag der Geschwindigkeit sich nicht ändern. Massen sind also Träge. So muss auf einen Körper auch dann eine Kraft wirken, wenn dieser bei konstanter Geschwindigkeit eine Kurve fliegt. Auf einen sich auf einer Kreisbahn bewegendem Körper muss eine sogenannte Zentripetalkraft wirken. Diese ist proportional zur Masse  $m$  des Körpers und hängt vom Radius  $r$  der Kreisbahn und von der Geschwindigkeit  $v$  ab. Zur Herleitung dieser Kraft lässt sich annehmen, dass eine Punktmasse bei der Drehung um eine Strecke  $\Delta r$  von der Position abweicht, die sie bei geradliniger Bewegung hätte (Fig.1)

#### Trägheits-Prinzip

#### Zentripetal-Kraft

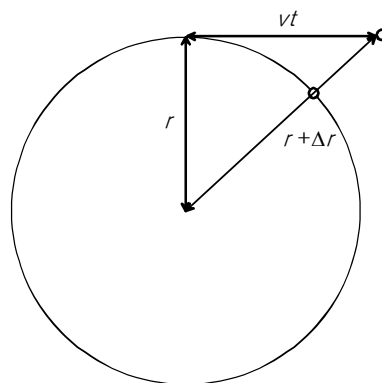


Fig.1 Drehbewegung einer Punktmasse

Gemäss dem Satz von Pythagoras gilt:  $(r + \Delta r)^2 = (v \cdot t)^2 + r^2$  und somit  $r^2 + 2r \cdot \Delta r + \Delta r^2 = (v \cdot t)^2 + r^2$ . Somit resultiert  $v^2 t^2 = (2r + \Delta r) \cdot \Delta r$ . Für sehr kurze Zeitschritte gilt  $\Delta r \ll r$ . Somit kann der quadratische Term  $\Delta r^2$  vernachlässigt werden:  $2r \cdot \Delta r \approx v^2 t^2$ . Auflösen nach  $\Delta r$  ergibt

*Zentripetal-  
Beschleunigung*

$$\Delta r \approx \frac{1}{2} \left( \frac{v^2}{r} \right) \cdot t^2 = \frac{1}{2} a t^2$$

Somit ist die Punktmasse beschleunigt mit  $a_z = v^2 / r$  (Zentripetalbeschleunigung). Es wirkt die Kraft:

$$F_z = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot a_z \quad (\text{Eq.2})$$

Für viele Problemstellungen ist die Berechnung über die Geschwindigkeit ungünstig. Deshalb wird gerne die sogenannte Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  verwendet. Diese kann durch die Beziehung von Winkel und Kreisumfang hergeleitet werden. Die Länge eines Kreisbogens  $s$  ist durch den Radius  $r$  und den Winkel  $\varphi$  gegeben:  $s = r\varphi$ . Dabei muss natürlich der Winkel  $\varphi$  in Bogenmass genommen werden. Aus dieser Beziehung folgt für die Geschwindigkeit  $v$  eines Körpers auf einer Kreisbahn:

*Winkel-  
geschwindigkeit*

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} [r\varphi] = r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = r \cdot \omega \quad (\text{Eq.3})$$

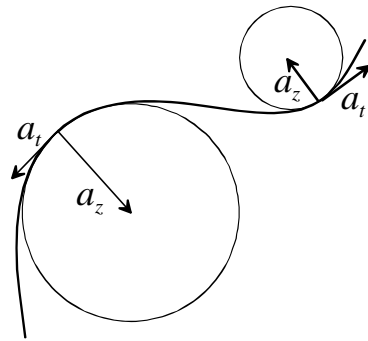
Die zeitliche Änderung des Winkels  $\omega = \dot{\varphi}$  definiert die Winkelgeschwindigkeit. Somit lässt sich die Beziehung Eq.2 umschreiben:

$$F_z = m r \omega^2 \quad (\text{Eq.4})$$

Von einem still stehenden Beobachter aus muss also eine Zentralkraft wirken, damit der beobachtete Körper eine Kreisbahn fliegt. Eine in einer Kapsel eingeschlossene Person würde hingegen nach radial nach aussen Gedrückt, wenn die Kapsel eine Kreisbahn fliegt. Im mitbewegten Koordinatensystem der Kapsel wirkt somit eine durch die Massenträgheit verursachte Scheinkraft: Die Zentrifugalkraft  $\vec{F}_z^* = -\vec{F}_z$ .

*Zentrifugal-  
Kraft*

Im Prinzip lässt sich bei jeder Bahn eine tangentielle und eine radiale Beschleunigungskomponente definieren (Fig.2), wobei die radiale Komponente gerade  $a_z$  und der entsprechende Kreisradius  $r$  derjenige des in die Bahnkurve eingeschriebenen Kreises ist.



*Tangential-  
und  
Zentralkompo-  
nente bei  
allgem.  
Bahnkurven*

Fig.2. Tangential- und Radial- (Zentral-)Komponenten der Beschleunigung

### Aufgaben

A1. Eine Zentrifuge drehe sich mit einer Winkelgeschwindigkeit von  $20 \text{ s}^{-1}$ . Die Zentrifugengläser (Proben) befinden sich in einem Abstand von 10 cm von der Drehachse.

- Wie gross ist die Bahngeschwindigkeit in m/s und welcher Weg wird in einer Sekunde zurückgelegt?
- Welche Zentrifugalbeschleunigung wirkt auf die Proben?

A2. Das Schaufelrad einer Turbine (Flugzeugtriebwerk) drehe sich mit 30000 U/min. Die einzelnen Schaufeln haben eine Masse von 50 g und befinden sich im Abstand von 15 cm von der Drehachse entfernt. Welche Kraft muss mindestens aufgebracht werden, damit die Schaufeln nicht aus der Turbine fliegen?

A3. Warum kann ein Flugzeug ohne aerodynamischen Hilfen keine Kurve mit einem Neigungswinkel von  $90^\circ$  fliegen und dabei die Höhe halten?

A4. Eine Person mit einer Masse von 70 kg stehe auf einer Waage, welche sich in einem Lift befinde. Der Lift beschleunige mit  $a_L = 1.7 \text{ m/s}^2$  (a) aufwärts bzw. (b) abwärts. Was zeigt die Waage an?

A5. Ein Fahrzeuglenker mit einer Masse von 80 kg kollidiere mit seinem Fahrzeug mit einer Mauer. Die Geschwindigkeiten vor der Kollision betrage 56 km/h. Das Fahrzeug komme innerhalb von 0.2 s zum Stehen. Welcher maximalen Belastung müsste ein Sicherheitsgurt standhalten?

A6. Bei CT (Computertomographie)-Scannern rotieren Detektor und Strahlerteil in einem typischen Abstand von 60 cm von der Drehachse um den Patienten. Welche Masse darf der Strahlerteil haben, wenn eine Fleihkraft von 4737 N nicht überschritten werden kann und pro Sekunde eine Umdrehung "gescannt" wird.

A7. Eine Masse  $m_1=200$  g werden an einem vertikalen Faden (dieser kann als masselos angenommen werden) befestigt. Der Faden ist über eine Umlenkrolle an einem Wagen mit der Masse  $m_2$  befestigt (Fig.A). Dieser Wagen bewege sich reibungsfrei auf einer horizontalen Schiene.

- Wie schnell beschleunigt sich die Masse  $m_1$  in Abhängigkeit der Masse  $m_2$  nach unten?
- Welche Masse  $m_2$  besitzt der Wagen, wenn die Masse  $m_1$  mit  $2 \text{ m/s}^2$  nach unten beschleunigt?
- Welche Masse  $m_2$  besitzt der Wagen, wenn die Masse  $m_1$  nach 3 Sekunden aus dem Stillstand heraus eine Geschwindigkeit von  $0.6 \text{ m/s}$  erreicht hat?

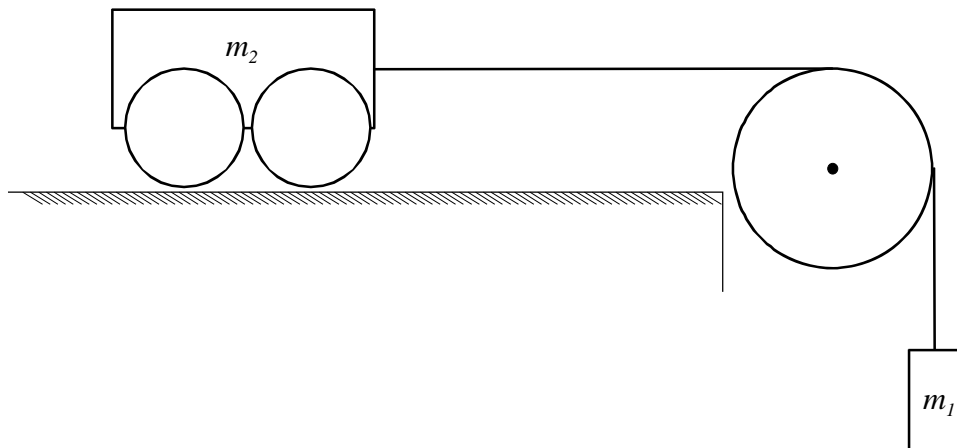


Fig.A.

## Lösungen

L1.

$$(a) v = r\omega = 0.1m \cdot 20s^{-1} = \underline{2m/s}, \quad \underline{s = 2m}$$

$$(b) F_{ZF} = mr\omega^2 = a_{ZF} \cdot m \Rightarrow a_{ZF} = r\omega^2 = 0.1m \cdot 400s^{-2} = 40m/s^2$$

$$L2. F_{ZF} = mr\omega^2 = 0.05kg \cdot 0.15m \cdot 9.87 \cdot 10^6 s^{-2} = \underline{7.4 \cdot 10^4 N}$$

L3. Lösung via Kräfte diagramm und / oder Rechnung: Die von den Flügel aufzubringende Auftriebskraft  $F_A$  setzt sich aus der Gewichtskraft  $F_G$  und der Zentrifugalkraft  $F_{ZF}$  zusammen:  $\vec{F}_A = \vec{F}_G + \vec{F}_{ZF}$  bzw.  $F_A = \sqrt{F_G^2 + F_{ZF}^2}$  da  $F_G$  und  $F_{ZF}$  senkrecht zu einander stehen. Für das Verhältnis der Kräfte gilt:

$$\frac{F_{ZF}}{F_G} = \frac{F_A \cdot \sin \alpha}{F_A \cdot \cos \alpha} = \tan \alpha$$

Der  $\tan \alpha$  strebt für  $90^\circ$  gegen  $\infty$ . Bei einer Gewichtskraft ungleich 0N müsste also unendlich viel auftrieb erzeugt werden, was ersten aerodynamisch unmöglich ist und zweitens keine reale Flugzeugkonstruktion ertragen kann.

L4.

$$\tilde{m} = \frac{\tilde{F}}{g} = \frac{m\tilde{g}}{g} = m \cdot \frac{(g \pm a_{Lift})}{g} \rightarrow \text{a) } 82.1 \text{ kg; (b) } 57.9 \text{ kg}$$

$$L5. \text{ Annahme } a_{\max} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{\max}}{\Delta t} \rightarrow F = m \cdot \frac{v_{\max}}{\Delta t} = 6.22kN$$

Die Kollision führt z.T. wegen der Deformation der Fahrzeugzelle zu keiner konstanten Beschleunigung. Bei einer steifen Konstruktion, welche erst nach einer bestimmten Belastung gestaucht wird, sind kurzzeitig noch höhere Spitzenkräfte zu erwarten.



$$\text{L6. } F_{ZF} = m\omega^2 r \rightarrow m = \frac{F_{ZF}}{r\omega^2} = \frac{4737\text{N}}{0.6\text{m} \cdot 4\pi^2 \text{s}^{-2}} = \underline{200\text{kg}}$$

L7.

a) Träge Kraft = schwere Kraft:  $(m_1 + m_2) \cdot a = m_1 g \rightarrow a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot g$

b)  $(m_1 + m_2) \cdot a = m_1 g \rightarrow m_2 = \frac{m_1 \cdot (g - a)}{a} = \underline{0.781 \text{ kg}} = \underline{781 \text{ g}}$

c)  $m_2 = \frac{m_1 \cdot (g - a)}{a} = \frac{m_1 \cdot \left(g - \frac{\Delta v}{\Delta t}\right)}{\frac{\Delta v}{\Delta t}} = \underline{9.61 \text{ kg}}$

## 212 fundamentale Wechselwirkungen

*Theorie*

Die Frage nach dem Ursprung von Kräften führt unweigerlich über das Trägheitsprinzip hinaus zu den fundamentalen Naturkräften. In der makroskopischen Welt sind es vor allem zwei Wechselwirkungen, welche die Physik bestimmen: Die Gravitation und die elektrischen Kräfte. Als weiteres Phänomen könnte noch der Magnetismus angefügt werden. Dieser lässt sich jedoch zusammen mit den elektrostatischen Kräften im Rahmen des Elektromagnetismus beschreiben (Kap. 800).

*Fundamentale Wechselwirkungen*

Als Gravitation wird die Eigenschaft von Massen bezeichnet, sich gegenseitig anzuziehen. Massen sind deshalb nicht nur träge sondern auch schwer. Es ist nicht a priori klar, dass träge und schwere Masse dasselbe sind. Messungen haben jedoch mit hoher Genauigkeit keinen Unterschied festgestellt.

*Gravitation*

Ebenfalls recht genau wurde die Kraft zwischen zwei Punktmassen bestimmt. Sie ist von den beiden Massen  $m$  und  $M$  und dem Abstand  $r$  abhängig:

$$F_G = \gamma \cdot \frac{mM}{r^2} \quad (\text{Eq.5})$$

Dabei ist  $\gamma = 6.6731 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2$  die sogenannte Gravitationskonstante. Da diese sehr klein ist, sind Gravitationskräfte nur spürbar, wenn zumindest eine der Massen sehr gross ist. Dies ist im Alltag die Anziehung der Erde auf Gegenstände, was sich als Gewichtskraft  $F_G = mg$  mit  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  äussert.

*Gravitationskonstante*

Wichtig ist hier auch, dass es sich um eine Wechselwirkung zwischen den beiden Massen handelt, es gilt für die Kräfte  $\vec{F}_{mM}$  und  $\vec{F}_{Mm}$  auf die beiden Massen:  $\vec{F}_{mM} = -\vec{F}_{Mm}$ .

Die elektrische Kraft bildet sich zwischen elektrischen Ladungen aus (SI-Einheit Coulomb C). Dabei ist die sogenannte Coulomb-Kraft zwischen zwei Punktladungen  $q$  und  $Q$  abhängig vom Abstand  $r$ :

*Elektrische Kräfte*

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{r^2} \quad (\text{Eq.6})$$

Dabei ist  $\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{Nm}^2)$  die elektrische Feldkonstante. Der Vorfaktor  $(4\pi\epsilon_0)^{-1}$  beträgt  $8.9875 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2$ . Dies ist rund 20

*Elektrische Feldkonstante*

Zehnerpotenzen grösser als die Gravitationskonstante. Entsprechend können schon zwischen kleinen Ladungen veritable Kräfte beobachtet werden. Da es zwei Sorten von Ladungen gibt (negative und positive), treten sowohl anziehende als auch abstossende Kräfte auf.

### *Experiment*

Die elektrischen Kräfte lassen sich gut beobachten. Dazu kann ein Band-Generator verwendet werden (sogenannter Van der Graaf – Generator, Fig.3,4). Dieser besteht aus einem rotierenden Gummiband, welches sich durch Reibung auflädt. Die Rotation bewirkt eine Ladungstrennung. Die positiven Ladungen werden in der aufgesetzten Konduktorkugel gesammelt. Diese Metallkugel dient als Ladungsspeicher (Kondensator). Die elektrischen Kräfte manifestieren sich als Anziehung bei Ladungen mit entgegengesetztem Vorzeichen oder als Abstossung bei Ladungen mit gleichem Vorzeichen. Auch die Blitzentladungen sind Ausdruck von elektrischen Kräften: Es kommt bei genügend hohen Kräften auf die Elektronen zu einem Ladungstransport durch die Luft.

*Van der Graaf  
Generator*

*Blitz-  
Entladungen*

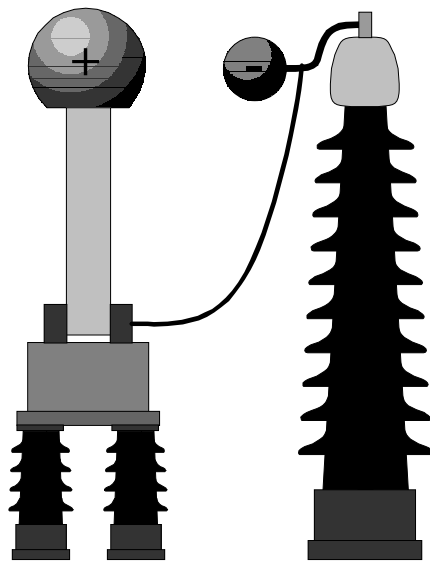
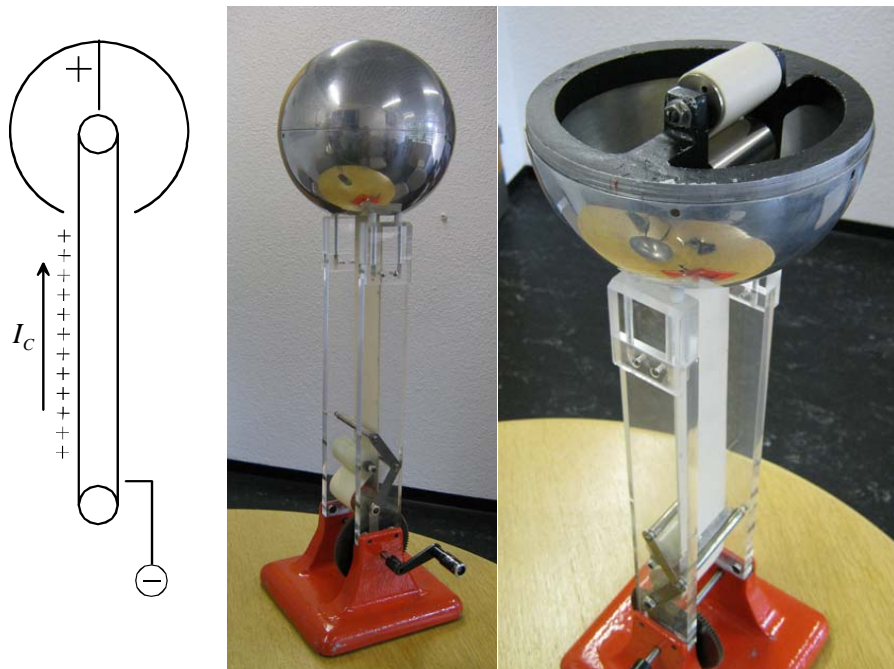


Fig.3. Experiment zu elektrostatischen Kräften: Die Konduktorkugel des Van der Graaf – Generators lädt sich positiv auf, während sich das untere Ende negativ auflädt. Zwischen zwei Konduktorkugeln werden bei genügend hohen elektrischen Feldstärken (Kräfte) Entladungen in Form von Blitzen sichtbar.



*Band- oder  
Van de Graaf-  
Generator*

Fig.4. Aufbau eines Van der Graaf – Generators: Durch Reibung oder Aufsprühen fixieren sich auf dem aufwärtslaufenden Band positive elektrische Ladungen. Im inneren der Konduktorkugel (rechts) werden diese Ladungen auf die Kugeloberfläche abgezogen. Die Konduktorkugel dient als Ladungsspeicher (Kondensator).

Durch die Bewegung des Gummibandes wird pro Zeit  $dt$  die Ladung  $dQ$  zur Konduktorkugel transportiert. Somit fließt ein elektrischer Ladestrom:

*elektrische  
Ströme*

$$I_c = \frac{dQ}{dt}$$

Andererseits entlädt sich die Konduktorkugel wieder, vor allem, wenn viel Ladung auf ihr gespeichert ist. Diese Entladungen können über das abwärtsbewegende Gummiband oder über Glimmentladungen in die Luft erfolgen. Übersteigt die elektrische Feldstärke einen kritischen Wert (ca.  $2.1 \text{ MN/C}$ ), kommt es zu Blitzentladungen.

### *Aufgaben*

A1. Zwei Punktmassen mit  $m = 100 \text{ kg}$  und  $M = 10^4 \text{ kg}$  befinden sich im Abstand von  $0.5 \text{ m}$ . Welche Kraft wirkt zwischen diesen beiden Massen?

A2. Welche Gravitationskraft wirkt zwischen der Erde und dem Mond?

A3. Welche Kraft wirkt auf eine Waage, auf welcher sich 1 kg Masse befindet und die einmal auf der jupiterzugewandten Seite des Jupitermondes Europa und das andere mal auf jupiterabgewandten Seite aufgestellt wird? Welche Konsequenzen könnte dieser Unterschied haben?

Bahnradius von Europa: 670'900 km; Radius von Europa: 1569 km; Masse von Europa:  $4.8 \cdot 10^{22}$  kg; alle anderen Angaben gem. FOTA; Annahme: Es schaut immer die gleiche Seite zum Jupiter.

A4. Ein Satellit soll in eine geostationäre Umlaufbahn gebracht werden (Satellit bleibt bezüglich einem bestimmten Ort auf der Erde stehen). Wie hoch ist die Umlaufbahn?

A5. Leiten Sie die Bahngeschwindigkeit eines Satelliten als Funktion der Höhe  $h$  über der Erdoberfläche her.

A6. Erklären Sie, weshalb auf der Erde bis zu vier Flutberge auftreten können!

A7. Ein Wasserstoffatom besteht aus einem positiv geladenen Proton (Atomkern), welches von einem negativ geladenen Elektron umgeben ist. Welche Kraft wirkt zwischen den beiden Teilchen, wenn das Elektron einen Abstand von 0.05 nm hat?

A8. Zwei Punktladungen sind 15 cm voneinander entfernt, wobei die eine Punktladung doppelt so gross ist wie die andere. Dann werden die Ladungen verschoben und die Kraft, welche die Ladungen nun aufeinander ausüben, hat sich verdreifacht. Wie weit voneinander sind die Ladungen nun entfernt?

A9. Das dritte Keplersche Gesetz besagt, dass das Verhältnis von der dritten Potenz des Bahnradius und dem Quadrat der Umlaufzeit (Periode) konstant ist. Kann dieses Gesetz auf die Gesetze in den Abschnitten 211 und 212 zurück geführt werden? (Hinweis: Periode  $T = 2\pi / \omega$ )

## Lösungen

$$L1. F = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = (6.67259) \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot \frac{10^6 kg^2}{(0.5)^2 m^2} = \underline{2.67 \cdot 10^{-4} N}$$

L2.

$$F = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = (6.67259) \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot \frac{5.974 \cdot 10^{24} kg \cdot 7.34910^{22} kg}{(3.844 \cdot 10^8)^2 m^2} = \underline{1.98 \cdot 10^{20} N}$$

L3. Ein Massenelement auf der Oberfläche von Europa verspürt einerseits die Anziehung vom Mond selbst ( $F$ ), andererseits diejenige vom Jupiter ( $F_2(r)$ ) sowie die Zentrifugalkraft, welche durch die Kreisbahn um den Jupiter entsteht (Annahme: im Bezugssystem stillstehender Mond). Für die Jupiter zugewandten Seite gilt (mit Abstand zum Jupitermittelpunkt  $r_1 = 669331$  km):

$$\begin{aligned} F(r + \Delta r) &= F_{G, Europa} + F_{G, Jupiter} - F_Z(r + \Delta r) = \\ &= \gamma m \cdot \frac{m_{Europa}}{\Delta r^2} + \gamma m \cdot \frac{m_{Jupiter}}{(r + \Delta r)^2} - m \omega^2 \cdot (r + \Delta r) \\ &= m \left[ \gamma \cdot \left( \frac{m_{Europa}}{\Delta r^2} + \frac{m_{Jupiter}}{(r + \Delta r)^2} \right) - \omega^2 \cdot (r + \Delta r) \right] \end{aligned}$$

Für die abgewandten Seite aber gilt ( $r_2 = 672469$  km):

$$F(r + \Delta r) = m \left[ \gamma \cdot \left( \frac{m_{Europa}}{\Delta r^2} - \frac{m_{Jupiter}}{(r - \Delta r)^2} \right) + \omega^2 \cdot (r - \Delta r) \right]$$

Die Winkelgeschwindigkeit der Kreisbewegung um den Jupiter kann ersetzt werden:

$$\gamma \frac{m_{Jupiter}}{r^2} = \omega^2 r \rightarrow \omega = \sqrt{\gamma \frac{m_{Jupiter}}{r^3}}$$

also:

$$\begin{aligned} F(r \pm \Delta r) &= m \left[ \gamma \cdot \left( \frac{m_{Europa}}{\Delta r^2} \pm \frac{m_{Jupiter}}{(r \pm \Delta r)^2} \right) \mp \gamma \frac{m_{Jupiter}}{r^3} \cdot (r \pm \Delta r) \right] = \\ &= \gamma m \cdot \left[ \frac{m_{Europa}}{\Delta r^2} \pm m_{Jupiter} \cdot \left( \frac{1}{(r \pm \Delta r)^2} - \frac{(r \pm \Delta r)}{r^3} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\rightarrow F_1 = 1.298 N; F_2 = 1.301 N$$

$$L4. \quad mr\omega^2 = \gamma \frac{mM}{r^2} \Rightarrow r = \left( \gamma \frac{M}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{3}} = h + R \Rightarrow h = \left( \gamma \frac{M}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{3}} - R$$

mit  $R$  = Erdradius

$$L5. \quad \frac{mv^2}{r} = \gamma \frac{mM}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\gamma \frac{M}{r}} = \sqrt{\gamma \frac{M}{R+h}}$$

L6. Einfluss von Mond, Sonne und Zentrifugalkräfte berücksichtigen -  
Achtung: Erde und Mond drehen um gemeinsamen Schwerpunkt!

L7.

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} = 8.9875 \cdot 10^9 \cdot \frac{1.6022^2 \cdot 10^{-38}}{25 \cdot 10^{-22}} \text{ N}$$

$$= \underline{9.23 \cdot 10^{-8} \text{ N}}$$

L8.

$$\frac{F(r_2)}{F(r_1)} = 3 = \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 = \left( \frac{15 \text{ cm}}{r_2} \right)^2 \rightarrow r_2 = \frac{15 \text{ cm}}{\sqrt{3}} = 8.66 \text{ cm}$$

L9.

$$mr\omega^2 = \gamma \cdot \frac{mM}{r^2} \rightarrow r^3 = \gamma \cdot \frac{mM}{\frac{m\omega^2}{4\pi^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}$$

## 213 Reibungskräfte

*Theorie*

Reibung entsteht bei mechanischem Kontakt von Oberflächen. Mikroskopisch gesehen lässt sich Reibung auf die elektrischen Kräfte zwischen Atomen zurückführen.

Naiverweise würde man annehmen, dass die Reibung von der Grösse der reibenden Oberfläche abhängt. Da jedoch der Druck, also die Kraft pro Fläche relevant ist, ist die Reibungskraft unabhängig von der Fläche.

Es wird zwischen Haft- und Gleitreibung unterschieden. Bei der Haftreibung haften die beiden Seiten aneinander, die Differenzgeschwindigkeit ist null. Es gilt:

*Haftreibung*

$$F_R \leq \mu_H \cdot F_N \quad (\text{Eq.7})$$

Dabei ist  $\mu_H$  die Haftreibungszahl (Tab.1). Die Normalkraft  $F_N$  ist die senkrecht zur Oberfläche gerichtete Kraft.

Die Gleitreibung beschreibt die Reibung zwischen sich zwei gegenseitig bewegenden Oberflächen. Analog zu Eq.7 gilt:

*Gleitreibung*

$$F_R = \mu_G \cdot F_N \quad (\text{Eq.8})$$

Tab.1. Gleit- und Haftreibungskoeffizienten (ungefähre Werte für trockene Oberflächen).

	$\mu_G$	$\mu_H$
Holz auf Holz	0.4	0.6
Stahl auf Stahl	0.1	0.15
Pneu auf trockenem Asphalt	0.6	1.0
Stahl auf Eis	0.014	0.027

Wichtig anzumerken ist, dass es auch Rollreibung gibt. Die korrekte Behandlung bzw. Modellierung von Reibungskräften bei realen Problemen ist oft schwierig, da je nach Bewegungszustand verschiedene Formen von Reibung ineinander übergehen können.



### Aufgaben

A1. Ein Holzblock werde auf eine geneigte Ebene (Brett aus Holz) gestellt. Wie gross darf der Neigungswinkel maximal sein, damit der Block nicht ins rutschen kommt?

A2. Ein Motorrad (Masse = 320 kg) fährt mit 90 km/h in eine Kurve. Der Kurvenradius betrage 70 m. Kann der Motorradfahrer diese Kurve mit dieser Geschwindigkeit durchfahren?

L1.

$$mg \cdot \sin \alpha = \mu_H \cdot mg \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \mu_H = \tan \alpha$$

$$\alpha = \arctan \mu_H = 30.96^\circ$$

L2. Ansatz: Haftreibungskraft > Zentripetalkraft:

$$\mu_H \cdot mg > \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \mu_H \cdot g > \frac{v^2}{r}$$

$\mu_H$  ist für Pneu auf Asphalt ca. 1.0,  $v^2/r = 8.93 \rightarrow$  Kurve ist knapp möglich!

## 220 Fall- und Wurfbewegungen mit Luftwiderstand

### 221 freier Fall mit Luftwiderstand

#### Theorie

In diesem Abschnitt wird eine Eindimensionale Bewegung betrachtet. Zielgrösse ist dabei die zurückgelegte Strecke  $s = s(t)$ . Nach Newton ist das Produkt Masse mal Beschleunigung ( $m \cdot a$ ) gegeben durch die Summe der im System wirkenden Kräfte  $F_i$ :  $ma = \sum_i F_i$ . Auf einen frei fallenden

*Kraft*

Körper im Vakuum wirkt nur die Gewichtskraft  $F_G = mg$  (mit  $g =$  Schwerebeschleunigung  $= 9.81$  m/s). Es gilt deshalb: Träge Kraft gleich schwere Kraft, also  $ma = mg$ . Die Masse  $m$  kürzt sich aus der Gleichung. Berücksichtigt man, dass die Beschleunigung  $a$  gleich der ersten Ableitung der Geschwindigkeit  $v = v(t)$  nach der Zeit  $t$  ist, so resultiert eine einfache Differentialgleichung:

*Freier Fall  
ohne  
Luftwiderstand*

$$\frac{dv}{dt} = g \quad (\text{Eq.9})$$

Die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit  $v(t)$  lässt sich bestimmen. Dabei muss diejenige Funktion gesucht werden, welche bei einmahliger Ableitung  $g$  ergibt. Dies ist der Fall für  $v(t) = g \cdot t + c$ . Wird die Zeit  $t = 0$  s gesetzt (Startzeitpunkt), so gilt:  $v(t=0) = v_0 = c$ , womit die Konstante  $c$  bestimmt ist. Analog kann auch die Streckenfunktion  $s(t)$  bestimmt werden:

$$s(t) = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + s_0 \quad (\text{Eq.10})$$

Solange kein Luftwiderstand berücksichtigt wird, lässt sich der Vorgang vollend im Rahmen der Kinematik (Kap. 100) beschreiben.

Auf einen fallenden Körper in der Luft wirkt nun aber neben der Gravitationskraft  $F_G = mg$  auch eine Luftwiderstandskraft  $F_W$ . Da der Luftwiderstand dem Beschleunigungsvorgang entgegen wirkt, ist  $F_W$  mit einem negativen Vorzeichen zu versehen. Die Kräftebilanz sieht nun wie folgt aus:  $ma = \sum_i F_i = F_G - F_W$ . Der Luftwiderstand wird als Kraft des

*Luftwiderstand*

Strömungswiderstandes eines Körpers mit der Querschnittsfläche  $A$  und der Masse  $m$  beschrieben, welcher sich in einem Medium mit der Dichte  $\rho$

bewegt. Im Unterschallbereich (deutlich unterhalb  $v = 344 \text{ m/s}$ ) nimmt diese Kraft quadratisch zur Geschwindigkeit zu:

$$F_w = c_w \frac{\rho A}{2} \cdot v^2 \quad (\text{Eq.11})$$

Hier ist  $c_w$  die Widerstandszahl<sup>2</sup> und  $\rho$  die Luftdichte (Standard-atmosphäre:  $\rho = 1.293 \text{ kg/m}^3$ ). Die Fläche  $A$  ist die senkrecht zur Anströmung stehende Querschnittsfläche.

*Widerstands-  
zahl*

Somit ergibt sich die folgende Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeit  $v$ :

$$\frac{dv}{dt} = g - c_w \frac{\rho A}{2m} \cdot v^2 \quad (\text{Eq.12})$$

Bei Gleichung (Eq.12) handelt es sich um eine sogenannte Differentialgleichung (DGL, engl. ODE: *ordinary differential equation*). Es gibt verschiedene analytische Verfahren zur Lösung solcher Gleichungen, welche später in diesem Skript erläutert werden. In die-sem Abschnitt soll die Gleichung numerisch gelöst werden.

*Differential-  
gleichung*

In einem ersten Schritt kann der Fall für  $g = 0 \text{ m/s}^2$  untersucht werden. Dies entspricht dem Fall eines horizontal fliegenden Objekts, welches durch den Luftwiderstand abgebremst wird. Die Geschwindigkeitsabnahme für die horizontale Geschwindigkeit ist dann gegeben durch:

*Bewegung in  
horizontaler  
Richtung*

$$\frac{dv}{dt} = -c_w \frac{\rho A}{2m} \cdot v^2 \quad (\text{Eq.13})$$

Setzt man den Vorfaktor  $c_w \rho A / (2m)$  gleich 1, ist nun eine Funktion gesucht, welche beim Ableiten das Quadrat von sich selbst ergibt. Dies ist erfüllt für  $v(t) = t^{-1}$ , denn diese Funktion erfüllt die Differentialgleichung Eq.13:

$$\frac{dv}{dt} = -v^2 = \frac{d}{dt} [t^{-1}] = -t^{-2}$$

<sup>2</sup> DPK, DMK: Formeln und Tafeln, Orell Füssli Verlag AG (1977), 9. Auflage (2001), S.170

Unter Berücksichtigung des Vorfaktors ergibt sich als Lösungsfunktion:

$$v = v(t) = \left[ \left( c_w \frac{\rho A}{2m} \right) \cdot t - c \right]^{-1} \quad (\text{Eq.14})$$

Durch Ableiten und Einsetzen in die Bewegungsgleichung (Eq.13) lässt sich überprüfen, ob die Funktion Eq.14 tatsächlich Lösung von Eq.13 ist.

*Analytische  
Lösung*

Die Konstante  $c$  kann durch Einsetzen der Zeit für  $t = 0$  s erhalten werden:  $c = -(v_0)^{-1}$  mit  $v_0 = v(t=0)$ .

Die numerische Berechnung erfolgt über eine Differenzgleichung. Dabei wird für den  $n+1$ -ten Berechnungsschritt die Geschwindigkeit  $v_{n+1}$  aus der Geschwindigkeit des  $n$ -ten Berechnungsschritts  $v_n$  und der Geschwindigkeitszunahme (Differenz)  $\Delta v_n$  ermittelt:

*Numerische  
Lösung*

$$v_{n+1} = v_n + \Delta v_n = v_n + \left( g - c_w \frac{\rho A}{2m} \cdot v_n^2 \right) \cdot \Delta t \quad (\text{Eq.15})$$

Dabei wurde die Ableitung nach der Zeit  $dv/dt$  durch den Quotienten  $\Delta v/\Delta t$  ersetzt. Es wird quasi der Limes  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta v}{\Delta t} \right)$  rückgängig gemacht.

Das Verfahren wird umso genauer, desto kleiner die Zeit-schritte  $\Delta t$  sind. Die Wahl eines günstigen  $\Delta t$  hängt von der Rechen-leistung des Computers und vom zu berechnenden Problem ab. Kleine Zeitschritte  $\Delta t$  führen zwar zu einer hohen numerischen Genauigkeit, aber auch zu grossen Datenmengen und längerer Rechenzeit (was bei einfachen Systemen heute kein Problem mehr darstellt). Je kleiner die zeitlichen Änderungen der Geschwindigkeit sind und umso weniger hohe Ansprüche an die Genauigkeit gestellt werden, desto grösser können die Zeitschritte  $\Delta t$  gewählt werden. Letzen Endes handelt es sich um ein Optimierungsproblem.

*Genauigkeit*

Die Differenzgleichung (Eq.15) lässt sich problemlos in ein Tabellenkalkulations-Programm implementieren. Die resultierende Berechnungstabelle (Tab.2) kann durch eine weitere Kolonne für die Strecke ergänzt werden, welche durch eine numerische Integration erhalten wird.

*Verwendung  
von Tabellen-  
Kalkulation*

Tab.2. Berechnungstabelle für den freien Fall mit Luftwiderstand. Für den  $n+1$ -ten Schritt die Geschwindigkeit  $v_{n+1}$  aus der Geschwindigkeit des  $n$ -ten Berechnungsschritts  $v_n$  und der Geschwindigkeitszunahme  $\Delta v_n$  berechnet.

Zeit $t$	Geschwindigkeit $v$	Differenz $\Delta v$	Strecke $s$
$t_0$	$v_0 = v(t_0)$	$\Delta v_0 = (g - c_w \cdot \rho A (v_0)^2 / (2m)) \cdot (t_1 - t_0)$	$s_0$
$t_1$	$v_1 = v_0 + \Delta v_0$	$\Delta v_1 = (g - c_w \cdot \rho A (v_1)^2 / (2m)) \cdot (t_2 - t_1)$	$s_1 = v_0(t_1 - t_0) + s_0$
$t_2$	$v_2 = v_1 + \Delta v_1$	$\Delta v_2 = (g - c_w \cdot \rho A (v_2)^2 / (2m)) \cdot (t_3 - t_2)$	$s_1 = v_1(t_2 - t_1) + s_1$
$t_3$	$v_3 = v_2 + \Delta v_2$	$\Delta v_3 = (g - c_w \cdot \rho A (v_3)^2 / (2m)) \cdot (t_4 - t_3)$	$s_1 = v_2(t_3 - t_2) + s_2$

### Aufgaben

A1. Verwenden Sie die Formel Eq.15, um mit Hilfe des Programms *Excel* die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit schrittweise zu berechnen.

A2. Berechnen Sie für eine Masse  $m = 70$  kg, eine Querschnittsfläche  $A = 1$  m<sup>2</sup> und eine Widerstandszahl  $c_w = 0.74$  die Gleichgewichtsgeschwindigkeit analytisch. Vergleichen Sie das Resultat mit der numerisch berechneten Gleichgewichtsgeschwindigkeit. → Arbeitet die Computersimulation korrekt?

A3. Berechnen Sie im *Excel* mit Hilfe der analytischen Lösungsfunktion für  $v$  (Eq.14) die Geschwindigkeiten für ein horizontal fliegendes Objekt mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 100$  m/s. Verwenden Sie die gleichen Zeitschritte wie bei der numerischen Berechnung. Bilden Sie die Differenzen. Was stellen Sie fest?

*Lösungen*

L1 / L2. Die Tabelle (Tab.2) kann auf verschiedene Arten erweitert werden. So kann ein Fallschirmsprung mit *Skydive* (Abtauchen des Springers durch Einnehmen einer vertikalen Position) oder das Öffnen des Fallschirmsprungs simuliert werden.

Die Gleichgewichtsgeschwindigkeit  $v_{eq}$  kann analytisch berechnet werden. Die Bedingung dafür liefert das Nullsetzen der Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion:

*Gleichgewicht*

$$\frac{dv}{dt} = 0 = g - c_w \frac{\rho A}{2m} \cdot v_{eq}^2 \quad (\text{Eq.16})$$

Durch Umformen ergibt sich die Gleichgewichtsgeschwindigkeit:

$$v_{eq} = \sqrt{\frac{2mg}{c_w \rho A}} \quad (\text{Eq.17})$$

L3. Der zweite Vergleich kann zwischen der numerisch gerechneten Geschwindigkeit  $v_{num}$  und der analytischen Lösung  $v_{anal}$  (Eq.14) für den Fall  $g = 0 \text{ m/s}^2$  erfolgen. Dafür muss in der Berechnungstabelle (Tab.2) die Schwerebeschleunigung  $g$  null gesetzt werden. Die Anfangsgeschwindigkeit sollte für eine realistische Simulation nicht zu hoch gewählt werden ( $\leq 100 \text{ m/s}$ ), da sonst Kompressibilitätseffekte mitberücksichtigt werden müssten. In der gleichen Tabelle kann direkt die Lösungsfunktion  $v(t)$  für die gegebenen Zeitschritte berechnet und die Differenz zur numerischen Lösung zeilenweise gebildet werden (Fig.1ab).

*Vergleich mit analytischer Lösung*

In Fig2b lässt sich gut erkennen, wie die Differenzen zwischen analytischer und numerischer Lösung mit abnehmendem  $\Delta t$  kleiner werden.

*Numerische Fehler*

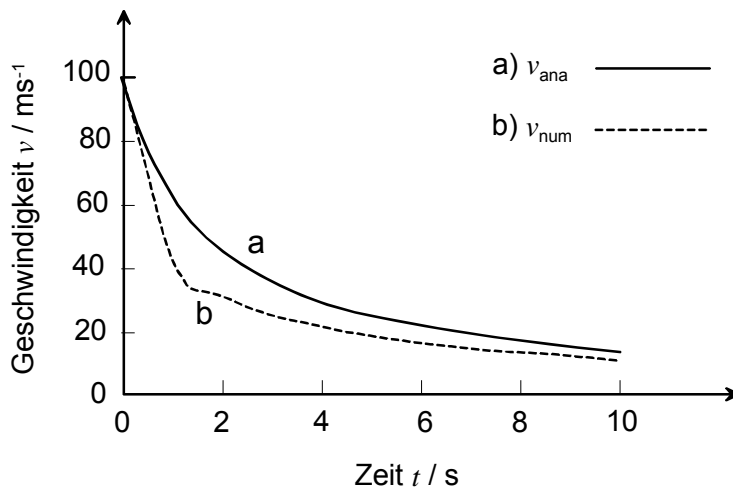


Fig.1a. Die Abnahme der horizontalen Geschwindigkeit  $v(t)$ , Kurve a berechnet mit Excel unter Verwendung von Eq.14, Kurve b numerisch berechnet mit Eq.15, Schrittweite  $\Delta t = 1$  s. Die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  beträgt 100 m/s und es wurde ein Intervall von 10 s berechnet. Achtung: Die Kurven täuschen über den Umstand hinweg, dass die Geschwindigkeit nur an wenigen Punkten gerechnet wurde!

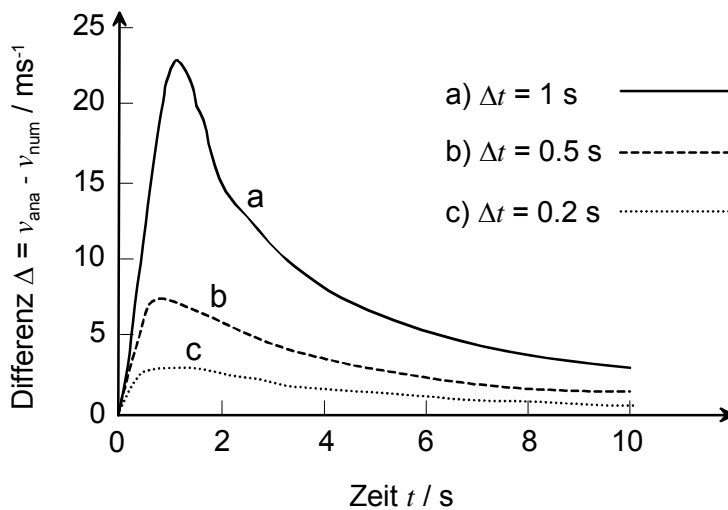


Fig.1b. Differenz  $\Delta = v_{\text{anal}} - v_{\text{num}}$  zwischen Berechnung von  $v(t)$  mit Eq.14 und Eq.15 für verschiedene Schrittweiten  $\Delta t$ . Die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  beträgt 100 m/s.

## 222 Ballistische Kurven

### *Theorie*

In diesem Abschnitt geht es um die Erweiterung der Computer-Simulation von Abschnitt 122. Für die Bewegung in x- und in y-Richtung soll nun der Luftwiderstand mitberücksichtigt werden. Dabei erfolgt die Simulation analog zum Abschnitt 211. Der schiefe Wurf mit Luftwiderstand kann als Kombination von vertikalem Wurf (und freier Fall) mit Luftwiderstand und horizontaler Bewegung mit Luftwiderstand (Eq.5) gedacht werden.

### *Aufgaben*

A1. Erweitern Sie Ihre Simulation für den schiefen Wurf so, dass der Luftwiderstand berücksichtigt wird.

A2. Simulieren Sie mit der Simulation von Aufgabe 1 einige Beispiele. Betrachten Sie die resultierenden Bahnkurven: Wie lässt sich der Verlauf der Bahn qualitativ erklären?

A3. Beantworten Sie mittels der Simulation von Aufgabe 1 folgende Frage: Wie weit fliegt ein kugelförmiges Geschoss, welches in einem Abschusswinkel von  $45^\circ$  mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 300 m/s abgeschossen wird. Die Masse des Geschosses betrage 20 kg.

A4. Was wurde in Aufgabe 3 vernachlässigt?

### *Lösungen*

L1. Die Berechnung des Luftwiderstands darf wegen dem quadratischen Term für die Geschwindigkeit nicht getrennt für jede Richtung erfolgen. Es muss also die Geschwindigkeitsabnahme in Flugrichtung simuliert werden. Hingegen ist die Schwerkraftbeschleunigung nur in der vertikalen Richtung anzuwenden. Die Beschreibung der aktuellen Flugrichtung kann durch den Winkel  $\alpha$  zwischen Gesamtgeschwindigkeit und Horizont erfolgen. Dieser muss bei jedem Schritt neu aus  $v_x$  und  $v_y$  erfolgen.



Folgende Berechnungstabelle berechneten den schiefen Wurf mit Luftwiderstand korrekt:

$t$	$v_x + \Delta v_x$	$\Delta v_x$	$x + \Delta x$	$v_y + \Delta v_y$	$\Delta v_y$	$y + \Delta y$
		$= -\Delta v \cdot \cos \alpha$	$= x + v_x \cdot \Delta t$		$= -g \cdot \Delta t - \Delta v \cdot \sin \alpha$	$= y + v_y \cdot \Delta t$

$v$	$\Delta v$	$\alpha$
$= \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$	$= c_w \frac{\rho A}{2m} \cdot v^2 \cdot \Delta t$	$= \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$

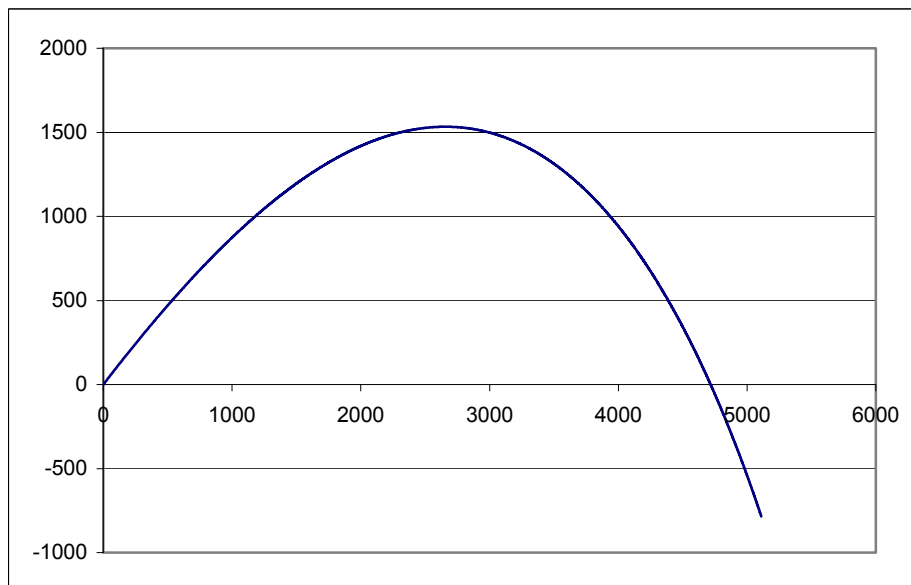


Fig.2. Simulation eines Kanonenschusses: Die Masse des kugelförmigen Geschosses beträgt 20 kg, die Anfangsgeschwindigkeit 300 m/s und der Abschusswinkel 45°; Numerik: Euler-Verfahren mit Schrittweite  $\Delta t = 0.01$  s.

L3. gem. Fig.3: ca. 4700 m

L4. Abnahme der Luftdichte mit zunehmender Höhe: Die Abnahme der Dichte läuft exponentiell mit der Höhe. Alle 6600 m Höhendifferenz halbiert sie sich (Der Druck halbiert sich ca. alle 550 m).

## 230 Impuls

### 231 Impulserhaltung

#### Theorie

Im Gegensatz zur Kraft ist der Impuls eine Erhaltungsgrösse. Definiert ist der Impuls durch:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (\text{Eq.18})$$

Die SI-Einheit ist  $\text{kg} \cdot \text{m} / \text{s} = \text{Ns}$ . Die Kraft stellt die zeitliche Änderung des Impulses dar. Wenn die Geschwindigkeit  $\vec{v} = \vec{v}(t)$  und die Masse  $m = m(t)$  von der Zeit abhängig sind, folgt unter Anwendung der Ableitung:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt} \quad (\text{Eq.19})$$

Die mathematische Herleitung von Eq.19 ist in Anhang 3 gegeben (Produktregel für Ableitungen). An dieser Stelle sei dieser Sachverhalt graphisch illustriert (Fig.4). Die gleichzeitige Änderung von zwei unabhängigen Grössen lässt sich mit einem Quadrat darstellen, welches auf der einen Seite um  $dv$  und auf der anderen Seite um  $dm$  vergrössert wird. Die Flächenänderung beträgt dann  $m \cdot dv + v \cdot dm + dv \cdot dm$ . Wenn die die Änderungen gegenüber den Seitenlängen  $m$  und  $v$  sehr klein sind (also für  $dm \rightarrow 0$  und  $dv \rightarrow 0$ , kann der Term  $dv \cdot dm$  vernachlässigt werden, es resultiert  $m \cdot dv + v \cdot dm$ . Ist dies die Änderung pro Zeitschritt  $dt$ , so resultiert Eq.19.

*Definition des Impulses*

*Impuls und Kraft*

*Produkte-Regel*

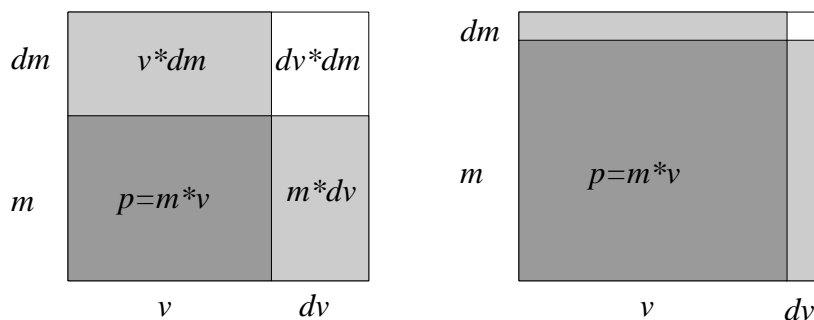


Fig.4. Illustration der Impulsänderung bei gleichzeitiger Änderung von Masse und Geschwindigkeit.

Kraft und Impuls sind vektorielle Grössen. Deshalb gilt für jede Raumrichtung in Gleichung Eq.19  $F_x = \dot{p}_x$ ,  $F_y = \dot{p}_y$  bzw.  $F_z = \dot{p}_z$ .

Für konstante Massen wird die zeitliche Ableitung  $\dot{m}$  null, so dass gilt:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (\text{Eq.20})$$

*Impulsvektor*

Im Folgenden sollen nun zwei wechselwirkende Körper (e.g. Planeten, welche sich gravitativ anziehen) betrachtet werden (Fig.5).

*Zweikörper-Problem*

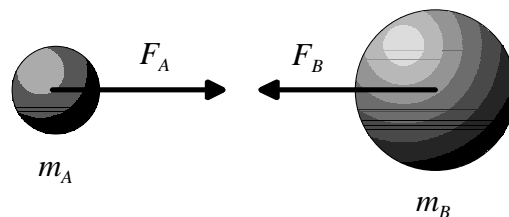


Fig.5. Kräfte beim Zweikörperproblem

Gemäss dem dritten Newtonschen Axiom (Actio gleich Reactio) haben die Kraftvektoren  $\vec{F}_A$  und  $\vec{F}_B$  den gleichen Betrag, aber entgegengesetzte Richtung. Es gilt somit:  $\vec{F}_A + \vec{F}_B = 0$ . Daraus folgt unter Verwendung von Eq.20 und mit  $\vec{p}_A = m_A \vec{v}_A$  bzw.  $\vec{p}_B = m_B \vec{v}_B$ :

*Actio = Reactio*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt} = 0 \quad (\text{Eq.21})$$

Wenn die zeitliche Änderung des Impulses null ist, bedeutet dies, dass der Impuls im System erhalten bleibt, also:

*Impuls-Erhaltung*

$$\vec{p} = \vec{p}_A + \vec{p}_B = \text{const.} \quad (\text{Eq.22})$$

Dies bedeutet auch, dass zu zwei verschiedenen Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  der Impuls erhalten bleibt:  $\vec{p}_A(t_1) + \vec{p}_B(t_1) = \vec{p}_A(t_2) + \vec{p}_B(t_2)$ . Dies gilt auch für Systeme mit mehr als zwei Körpern, wenn keine äussere Kraft wirkt.

Aus Eq.22 kann auch die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  des Schwerpunktes des Systems berechnet werden. Es gilt  $(m_A + m_B)\vec{v} = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B$  und somit:

$$\vec{v} = \frac{m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B}{m_A + m_B} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\sum_i m_i} \quad (\text{Eq.23})$$

*Geschwindigkeit des Schwerpunktes*

Die Summe aller Teilimpulse im System dividiert durch die Gesamt-masse ergibt also die Geschwindigkeit des Schwerpunktes.

Stöße können mit dem Computer simuliert werden. Im Folgenden soll ein Ball betrachtet werden, welcher aus der Anfangshöhe  $h_0$  fallen gelassen wird. Beim Auftreffen auf den Boden kann sich der Ball plastisch und elastisch deformieren (eine Einführung in die Mechanik der Kontinua ist im Kapitel 600 gegeben). Die elastische Deformation führt zu einer rücktreibenden Kraft  $F_D$ . Diese wirkt nach oben, solange der Ball deformiert ist. Dies ist während der Dauer der Bodenberührung der Fall. Während dieser Zeit wird Impuls auf den Ball zurück übertragen. Bei einer vollkommen elastischen Deformation ist dies der doppelte Impuls, welcher der Ball kurz vor dem Auftreffen auf den Boden hat. Der Impuls kann auch über die Wirkungsdauer und Stärke der rücktreibenden Kraft  $F_D$  berechnet werden (Kraftstoss):

*Simulation eines Stosses*

*Kraft-Stoss*

$$p = \int F_D \cdot dt \quad (\text{Eq.24})$$

Das Integral Eq.24 (Abschnitt 321) ist die Umkehrung der Ableitung. Es berechnet quasi die Fläche unter der Kurve von  $F_D(t)$ . Wäre die Kraft  $F_D$  zeitlich konstant, so könnte die Impulsänderung pro Zeitdifferenz  $\Delta t$  einfach durch  $\Delta p = F_D \cdot \Delta t$  berechnet werden. Für einen genügend kurzen Zeitschritt kann angenommen werden, dass die Kraft einigermaßen konstant bleibt. Die gesamte Impulsänderung lässt sich durch eine Summe approximieren:

$$p = \sum_i \Delta p_i = \sum_i F_D(t_i) \cdot \Delta t$$

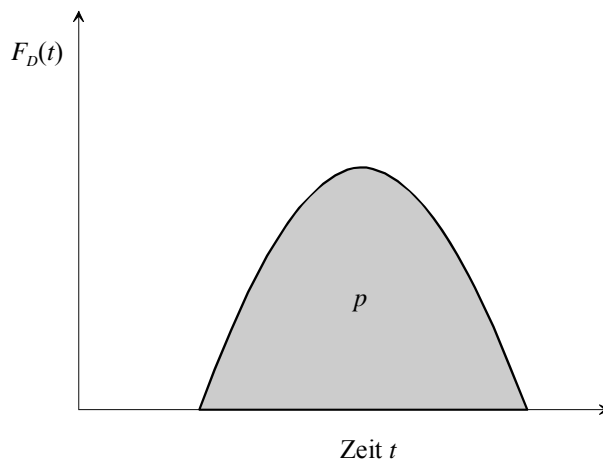


Fig.5. Schematische Darstellung des Verlaufs der rücktreibenden Kraft während der Dauer der Bodenberührung und Deformation eines Balls: Die graue Fläche entspricht dem Impuls.

Für die Berechnung der Kraft müsste die elastische und plastische Deformation des Balls in einem dreidimensionalen Modell gerechnet werden. An dieser Stelle soll nur ein einfaches Modell vorgestellt werden. Dabei kann angenommen werden, dass die rücktreibende Kraft proportional zur Deformation des Balls mit dem Radius  $r$  ist (mit der Proportionalitätskonstante  $D$ ). Für  $h(t) < r$  gilt:

$$\frac{dp}{dt} = -mg + D \cdot (r - h) \quad (\text{Eq.25})$$

Für die Höhe  $h$  resultiert daraus die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -g + \frac{D}{m} \cdot (r - h)$$

### Aufgaben

A1. Ein rollender Wagen mit der Masse  $m$  verliere durch Reibung Impuls. Es gelte dabei:  $p(t) = p_0 \cdot e^{-\lambda t}$ .

- a) Berechnen Sie die auf den Boden übertragene Kraft  $F(t)$ .
- b) Wohin geht der Impuls?

A2. Ein Flugzeugflügel erzeugt seinen Auftrieb, in dem er die anströmende Luft nach unten ablenkt.

- a) Wie viele  $\text{m}^3$  Luft muss ein Flugzeug mit einer Masse von 1000 kg pro Sekunde nach unten ablenken, damit es im Horizontalflug genügend Auftrieb besitzt (Annahme: Geschwindigkeit der senkrecht nach unten strömenden Luft betrage 10 m/s)?
- b) Erklären Sie, warum schnellere Flugzeuge kleinere Flügel haben.

A3. Auf ein Glasdach mit einer Neigung von  $45^\circ$  fällt ein 4 g schweres Hagelkorn mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s. Der vollkommen elastische Stoss mit dem Glasdach dauere 1 ms.

Welche Kraft wirkt während der Stosszeit auf das Dach?

A4. Beim Abwaschen lässt sich beobachten, wie das Wasser beim Auftreffen auf den Trogboden um  $90^\circ$  abgelenkt wird.

Welche Kraft wirkt auf den Trogboden, wenn der Wasserstrahl einen Durchmesser von 1 cm und eine Geschwindigkeit von 7 m/s hat?

(Hinweis: Wassermenge pro Zeit betrachten und Symmetrie des abfließenden Wassers ausnutzen)

A5. Ein Auto mit einer Masse von 1200 kg fährt mit 50 km/h einem anderen Auto mit einer Masse von 700 kg und einer Geschwindigkeit von 30 km/h hinten auf.

Welche Geschwindigkeit haben die beiden Autos, wenn es sich um einen inelastischen Stoss handelt (und die Deformation der Autos vernachlässigt wird)?

A6. Simulieren Sie mit dem Computer einen Ball, welcher aus einer Höhe von 1 m auf den Boden fällt. Schreiben Sie dafür ein Programm (Programmiersprache frei wählbar). Implementieren Sie zuerst den vollkommen elastischen Fall. Fügen Sie danach noch eine zur Deformationsgeschwindigkeit proportionale Dämpfung ein.

## Lösungen

L1.

$$(a) F(t) = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} [p_0 \cdot e^{-\lambda t}] = -\lambda p_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

(b) Impuls wird auf den Boden übertragen.

L2.

$$(a) F_A = \frac{\Delta p}{\Delta t} = v \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t} = v \rho \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{F_A}{v \rho} = \underline{760.47 \text{ m}^3}$$

(b) Der Flügel erfasst durch die höhere Geschwindigkeit pro Zeiteinheit ein grösseres Luftvolumen. Zudem wird dieses mit einer höheren Geschwindigkeit nach unten abgelenkt.

$$L3. \Delta p = \sqrt{2} \cdot mv \rightarrow F = \sqrt{2} \cdot \frac{mv}{\Delta t} = \underline{113 \text{ N}}$$

L4. Der Gesamtimpuls nach dem Auftreffen auf den Trogboden ist Null (Vektorsumme!).

$$F = \frac{\Delta m \cdot v}{\Delta t} = \frac{\rho \cdot \Delta V \cdot v}{\Delta t} = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot \Delta s \cdot \rho \cdot v}{4 \cdot \Delta t} = \frac{1}{4} \pi \cdot d^2 \rho v^2 = \underline{4 \text{ N}}$$

L5.

$$v = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B} = \frac{1200 \text{ kg} \cdot (50/3.6) \text{ m/s} + 700 \text{ kg} \cdot (30/3.6) \text{ m/s}}{1200 \text{ kg} + 700 \text{ kg}}$$

$$= \underline{11.84 \text{ m/s}} = \underline{42.6 \text{ km/h}}$$

L6. Der folgende Programmcode wurde in Ruby geschrieben:

```
# Program Push v1.0 #
# Created by Stephan Scheidegger #
# ----- #
# Calculation of the velocity of a falling ball
including elastic pushes #
# using an Euler algorithm #
# Use command ruby push.rb > filename.txt to create
output file #

# Input section #

v0 = 0.00 # m/s #
g = 9.81 # m/s2 #
h0 = 1.0 # m #
rd = 0.05 # m, radius of ball #
rh = 1.293 # kg/m3, density of air #
A = 0.01 # m2, cross section area of ball #
m = 0.1 # kg, mass of ball #
D = 100000 # N/(m*kg), elastic constant of ball divided
by the mass m, corresponding to Hooks law #
y = 100 # 1/s, attenuation constant describing friction
in deformed ball #
cw = 0.45 # no unit #
dt = 0.002 # s #
z = 40000 # Numbers of steps #

# setting initial values #

v = v0
h = h0
t = 0
time = 0

puts "#{0} #{v} #{h}"

# main routine #

for i in 1..z

  s = h
  t = time

  if (h > rd)
    u = v + (-g-(cw*rh*A/(2*m))*v*Math.sqrt(v*v))*dt
    h = s + v*dt
    time = t + dt
    puts "#{time} #{u} #{h}"
    v = u
    s = h
  end
end
```



```

else
  dz = dt/1000
  u = v + (-g-y*v+D*(rd-s))*dz
  h = s + v*dz
  time = t + dz
  puts "#{time} #{u} #{h}"
  v = u
  s = h
end

end

gets

```

Für  $h(t) > r$  wurde zusätzlich noch der Luftwiderstand berücksichtigt. Da die Luftwiderstandskraft immer der Bewegung entgegenwirkt, muss beim quadratischen Geschwindigkeitsterm  $v \cdot |v|$  oder  $\text{sgn}(v) \cdot v^2$  gesetzt werden.

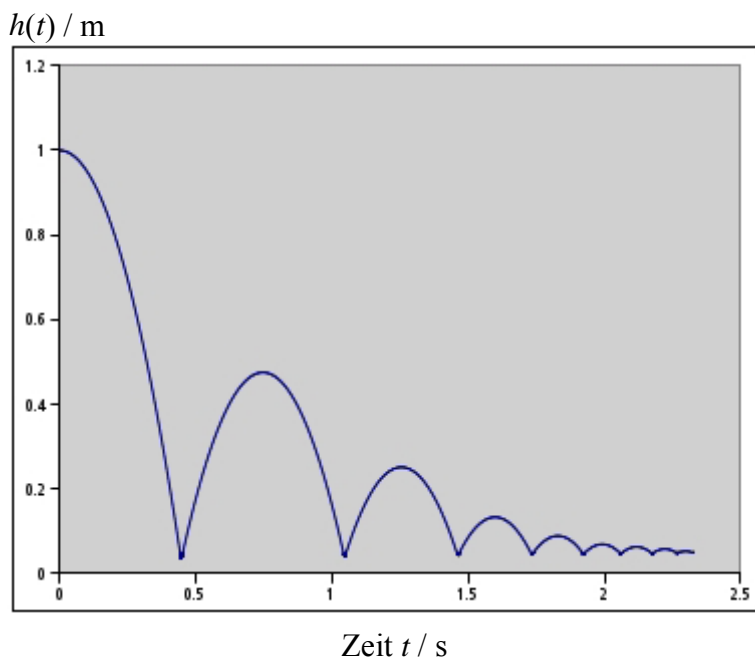


Fig.6. Zeitlicher Verlauf der Höhe eines Balls: Die Parameterwerte sind dem Programmcode zu entnehmen.

## 232 Computersimulation von Impulsänderungen

*Theorie*

In diesem Abschnitt soll anhand eines einfachen Beispiels in die Computersimulation mit Systemdynamikprogrammen eingeführt werden.

*Ziel*

Dazu wird ein Triebwerk betrachtet, dessen Schubkraft von der Geschwindigkeit  $v = v(t)$  gegenüber dem umgebenden Medium (e.g. Luft) abhängig ist:

$$\frac{dp}{dt} = \beta(u - v(t)) \quad (\text{Eq.26})$$

Der Faktor  $\beta$  hat die Einheit Masse pro Zeit. Somit kann  $\beta(u - v)$  als Masse interpretiert werden, welche pro Zeitschritt  $dt$  auf die Differenzgeschwindigkeit  $u - v$  gebracht wird (wobei  $u$  konstant sein soll).

Die Gleichung Eq.26 ist wiederum eine Differentialgleichung, wobei die Impulsfunktion  $p = p(t) = mv(t)$  mit der Geschwindigkeit  $v = v(t)$  verknüpft ist. Die Masse  $m$  ist die bewegte Masse, also Triebwerksmasse plus die Masse des angetriebenen Objektes (e.g. Flugzeug). Die Gleichung (Eq.26) kann nur mit dem Impuls geschrieben werden:

*DGL für Impuls*

$$\frac{dp}{dt} = \beta \cdot \left( u - \frac{p}{m} \right) \quad (\text{Eq.27})$$

Die Gleichung kann analytisch gelöst werden. Dafür kann folgende Substitution gemacht werden:  $\xi(t) = u - p/m$ . Die Ableitung ergibt  $\dot{\xi} = -\dot{p}/m$ . Durch Einsetzen in Eq.25 ergibt sich:

*Analytische Lösung*

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{\beta}{m} \cdot \xi \quad (\text{Eq.28})$$

Gesucht ist nun eine Funktion  $\xi(t)$ , welche beim Ableiten bis auf die Multiplikation mit einem Vorfaktor wieder die gleiche Funktion ergibt.

Dafür kommt  $\xi(t) = c \cdot e^{-\frac{\beta}{m}t}$  in Frage. Nun muss die Substitution wieder rückgängig gemacht werden. Mit  $p(t) = mu - m\xi(t)$  resultiert:

$$p(t) = mu - mc \cdot e^{-\frac{\beta}{m}t} \quad (\text{Eq.29})$$

Nun gilt es noch die Konstante  $c$  zu bestimmen. Dafür wird  $t = 0s$  gesetzt. Der Impuls  $p(t = 0s) = p(0s) = p_0$  ist der Anfangswert. Somit wird Eq.29 zu:

$$p(t) = mu - (mu - p_0) \cdot e^{-\frac{\beta}{m}t} \quad (\text{Eq.30})$$

In diesem Beispiel kann also eine analytische Lösung von Eq.28 bzw. Eq.27 gefunden werden. Für kompliziertere Systeme stösst man im Allgemeinen schnell an Grenzen. Deshalb soll hier exemplarisch der alternative Weg über die numerische Berechnung aufgezeigt werden.

Grundsätzlich kann mittels eines einfachen Eulerverfahrens unter Verwendung eines Tabellenkalkulationsprogramms die Lösung numerisch ermittelt werden, analog zur Simulation des freien Falls mit Luftwiderstand und des schiefen Wurfs mit Luftwiderstand. Für komplexe Systeme empfiehlt sich aber die Verwendung von spezialisierter Systemdynamiksoftware, da die graphische Oberfläche den Überblick enorm erleichtert.

Ausgangspunkt für die Programmierung sind Speichergrößen. Diese werden auf der graphischen Oberfläche mit rechteckigen Kästchen dargestellt (Fig.7). In diese Kästchen hinein oder aus ihnen heraus führen Flüsse (durch dicke Pfeile dargestellt), d.h. also zeitliche Änderungen der Speichergrößen. Kreise symbolisieren Hilfsgrößen. Dies können Konstanten, aber auch andere Größen sein, welche aus den aktuellen Werten von Speichergrößen berechnet werden. Einfache Pfeile stellen die Verbindungen zwischen den Rechengrößen dar.

Während dem Zeichnen auf der Oberfläche werden im Hintergrund die Gleichungen für den numerischen Algorithmus programmiert. Zur numerischen Berechnung stehen bei vielen Systemdynamikprogrammen zwei verschiedene Verfahren zur Auswahl: Das Euler-Verfahren, welches der Berechnungsmethode beim freien Fall mit Luftwiderstand (Abschnitt 221) entspricht, und das Runge-Kutta-Verfahren, welches die Differenzengleichung mittels Taylorreihen-Entwicklung bis zur  $n$ -ten Ableitung entwickelt. Die Eigenschaften der Verfahren und die numerischen Fehler werden später im Kapitel 400 besprochen.

*Bestimmung  
der  
Konstanten;  
Anfangswert*

*Numerische  
Lösung*

*Tabelle für  
Euler-  
Verfahren*

*graphische  
Oberfläche*

*Runge-Kutta-  
Verfahren*

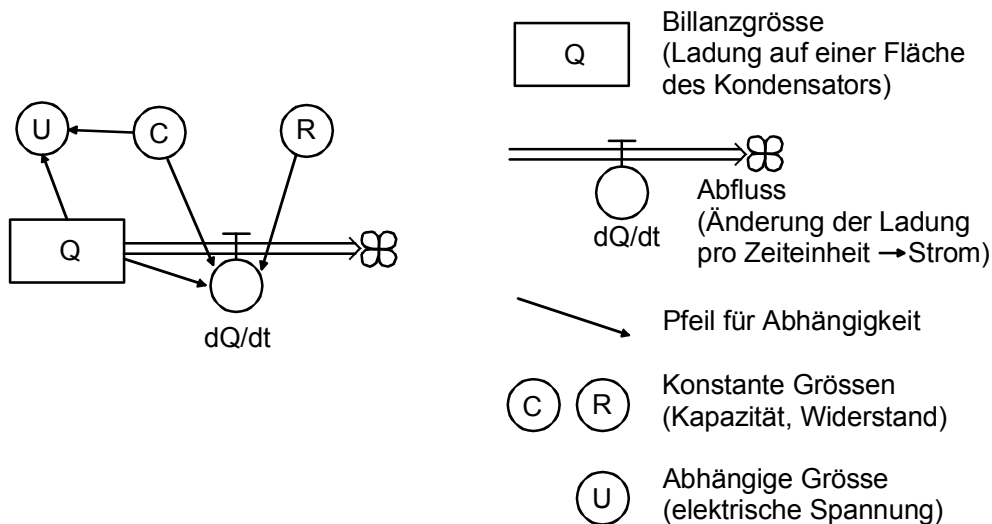


Fig.7. Flussdiagramm bei einem Systemdynamikprogramm: Beispiel für die Simulation der Kondensatorentladung.

### Aufgaben

A1. Programmieren Sie mittels eines graphischen Modelleditors (Vensim, Dynasys, Stelle etc.) eine Simulation zu Eq.26. Überprüfen Sie die Simulation: Welche Möglichkeiten der Überprüfung bieten sich an?

A2. Erweitern Sie ihr Modell unter Annahme sinnvoller Parameter-werte für ein Flugzeug

- a) mit Luftwiderstand.
- b) Für einen Steigflug mit einer Steiggeschwindigkeit von  $v_{\text{climb}} = 0.1 \cdot v(t)$ .

Vergleichen Sie die Resultate mit Aufgabe 1: Wie lassen sich die Unterschiede bezüglich der Geschwindigkeit charakterisieren? Woher kommt oder wohin geht der Impuls?

L1. Das zu Eq.26 entsprechende Flussdiagramm ist in Fig.8 gezeigt.

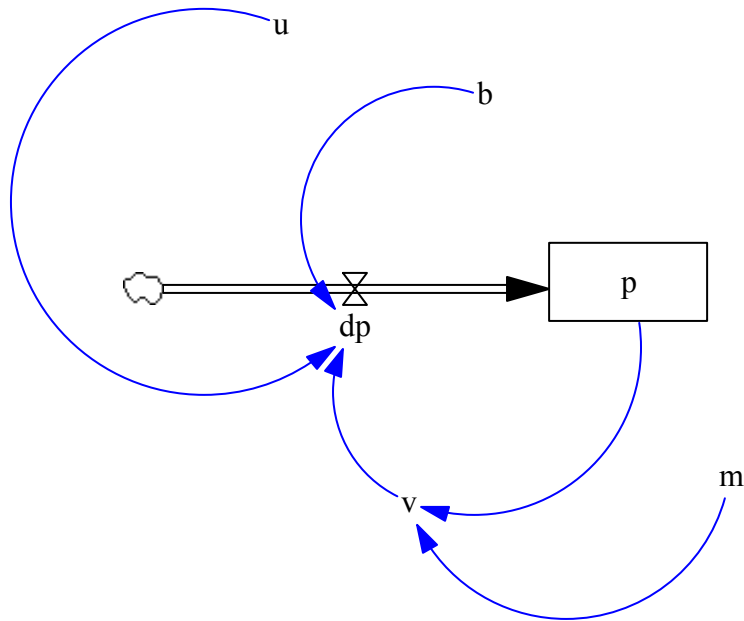


Fig.8. Flussdiagramm für Simulation von Eq.26, erstellt mit Vensim<sup>3</sup>:  $\beta = b$

Für die Kontrolle der Simulation eignet sich die Darstellung der Geschwindigkeit. Dafür kann die Gleichgewichtsgeschwindigkeit  $v_{eq}$  berechnet werden. Es gilt im Gleichgewicht:

*Kontrolle der Simulation*

$$\frac{dp}{dt} = 0 = \beta \cdot (u - v_{eq}) \quad (\text{Eq.31})$$

somit ist die Gleichgewichtsgeschwindigkeit gegeben durch  $v_{eq} = u$ . Zu diesem Resultat gelangt man auch, wenn in der Lösungsfunktion (Eq.30)  $t = \infty$  gesetzt wird. Streng genommen wird also das Gleichgewicht erst im Unendlichen erreicht.

*Gleichgew.-  
Geschwindigkeit*

Generell kann für die Kontrolle der Simulation die Lösungsfunktion (Eq.30) herangezogen werden.

<sup>3</sup> Vensim Version 5: Ventana Systems Inc., Harvard, MA

Die Geschwindigkeitsfunktion ist in Fig.9 dargestellt (die Parameter-werte sind in Bildlegende gegeben).

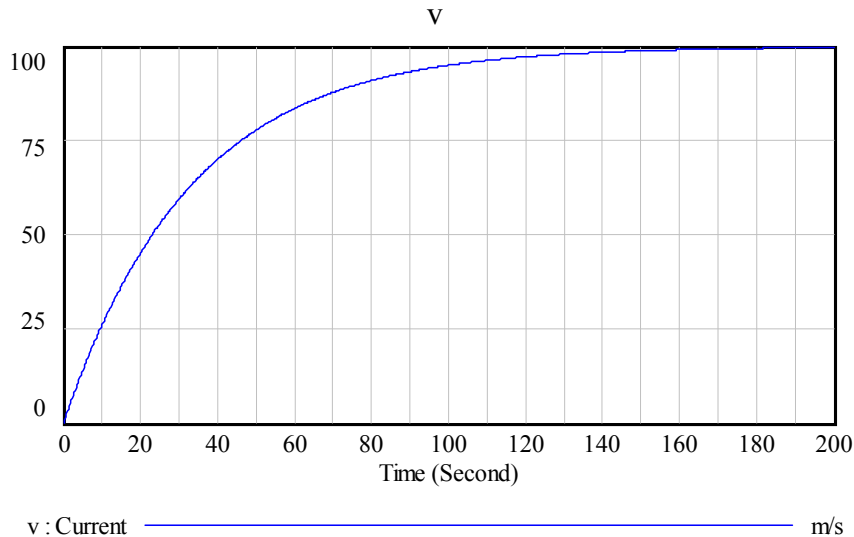


Fig.9. Geschwindigkeitsfunktion bei Schubkraft gemäss Eq.26: Anfangsimpuls  $p_0 = 0Ns$ ;  $\beta = 30kg/s$ ,  $u = 100m/s$ ,  $m = 1000kg$

L2. Die Berücksichtigung des Luftwiderstandes erfolgt über die Luftwiderstandskraft. Die Systemgleichung Eq.26 muss nun entsprechend angepasst werden:

*Simulation mit  
Luftwiderstand*

$$\frac{dp}{dt} = \beta(u - v) - c_w \frac{\rho A}{2} \cdot v^2 \quad (\text{Eq.32})$$

Für die Luftdichte kann bei Standardatmosphäre  $\rho = 1.293kg/m^3$  angenommen werden. Die Querschnittsfläche ist etwas schwieriger zu bestimmen. Wird von einem Kleinflugzeug mit einer Masse von 1000 kg ausgegangen, so kann in grober Näherung eine Fläche von 3 m<sup>2</sup> ausgegangen werden. Für das in Fig.10 gezeigte Simulationsergebnis wird von einem  $c_w$ -Wert von 0.3 ausgegangen.

*Parameter-  
Werte*

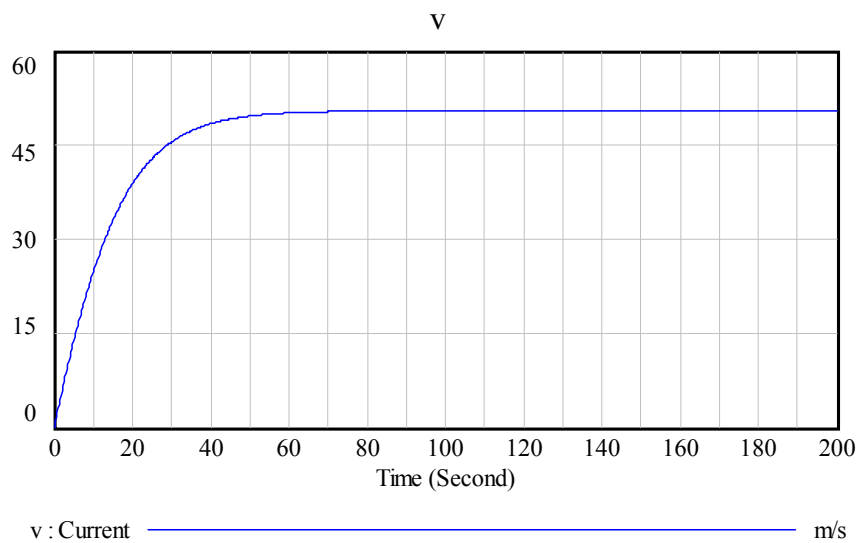


Fig.10. Geschwindigkeitsfunktion bei Simulation mit Luftwiderstand.

Die Gleichgewichtsgeschwindigkeit wird bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes herab gesetzt. Zudem dauert es etwas länger, bis eine entsprechende Geschwindigkeit erreicht wird, als dies bei Fig.9 der Fall ist.

*Auswirkungen auf die Geschwindigkeit*

Bis jetzt wurde von einer horizontalen Bewegung ausgegangen. Im Steigflug mit dem Steigwinkel  $\alpha$  wirkt aber zusätzlich eine Gewichtskraftkomponente  $F_D$ , der beschleunigenden Kraft entgegen:  $F_D = F_G \cdot \sin \alpha = mg \cdot \sin \alpha$ . Der Steigwinkel  $\alpha$  lässt sich aus den Geschwindigkeitskomponenten bestimmen. Es gilt gemäss dem Geschwindigkeitsdreieck:  $\alpha = \arcsin(v_{\text{climb}} / v(t))$  mit  $v$  = Geschwindigkeit in Bewegungsrichtung. Da bei Aufgabe 2 die Steiggeschwindigkeit in einem festen Verhältnis zur Vorwärtsgeschwindigkeit steht, ist der Steigwinkel konstant. Für Luftwiderstand und Steigflug wird Eq.26 zu:

*Simulation des Steigfluges*

$$\frac{dp}{dt} = \beta(u - v) - c_w \frac{\rho A}{2} \cdot v^2 - mg \cdot \sin \alpha \quad (\text{Eq.33})$$

Die Gleichgewichtsgeschwindigkeit nimmt weiter ab (auf 38.58 m/s für die oben angenommenen Werte).

Der Zugewinn des Flugzeugs an Impuls erfolgt durch Impulsübertragung an die Luft.

## 233 Simulation eines Raketenfluges

*Theorie*

Raketen erzeugen ihren Schub durch Ausstossen von Masse. Bei Verbrennung von Treibstoff besteht die ausgestossene Masse aus den heissen Verbrennungsgasen. Somit sind Raketen klassische Beispiele für Systeme mit veränderlicher Masse.

Sei  $m_0$  die Masse der Rakete zu Beginn und werde in einem kleinen Zeitschritt  $dt$  die Masse  $dm$  mit der Geschwindigkeit  $u$  aus-gestossen, so ist nach diesem Zeitschritt die neue Masse der Rakete gegeben durch  $m = m_0 - dm$ . Für das Aufstellen des Impulssatzes soll das Bezugssystem gewählt werden, in welchem sich die Rakete vor dem Start befindet. Der Gesamtimpuls nach dem ersten Ausstoss ist gegeben durch:  $0 = -dm \cdot (u - v_1) + (m_0 - dm) \cdot v_1$  (Fig.11).

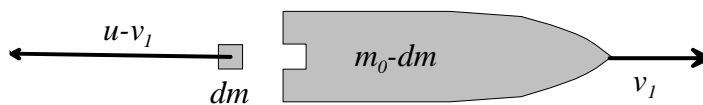


Fig.11. Prinzip des Raketenantriebes: Durch Ausstossen der Masse  $dm$  wird die Rakete auf die Geschwindigkeit  $v_1$  beschleunigt.

Die Geschwindigkeit  $v_1$  nach dem Ausstoss ist somit gegeben durch:

$$v_1 = \frac{dm}{m_0} \cdot u \quad (\text{Eq.34})$$

Der Impulszuwachs ist  $dp = mv_1 = u \cdot dm$ . Der Impulssatz liesse sich nun für jeden Schritt analog anwenden.

Wird nun eine senkrecht nach oben startende Rakete mit Luftwiderstand betrachtet, verwendet man am besten Eq.19 aus dem Abschnitt 231: Die zeitliche Ableitung des Impulses  $\dot{p} = \dot{m} \cdot v + m \cdot \dot{v}$  ist gleich der Bilanz der Impulsströme (mit  $F_s =$  Schubkraft):

$$\frac{dp}{dt} = \dot{m} \cdot v + m \cdot \dot{v} = F_s + F_G + F_w \quad (\text{Eq.35a})$$

$$= u \cdot \dot{m} + F_G + F_w$$

*Systeme mit veränderlicher Masse*

*Prinzip des Raketenantriebs*

*Impulszuwachs*

*Simulation mit Gewichtskraft und Luftwiderstand*



Hier ist  $u$  eine feste Gas-Ausstossgeschwindigkeit (quasi Laborsystem-unabhängig). Die Impulsströme sind die wirkenden Kräfte sowie der von der Rakete abgehende Impulsstrom, welcher an den aus dem Triebwerk austretenden Massestrom gekoppelt ist. Der Term  $\dot{m} \cdot v$  kommt auf der linken Seite der Gleichung Eq.35a kann nach rechts genommen werden:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot (u - v) + F_G + F_w \quad (\text{Eq.35b})$$

Nun muss noch berücksichtigt werden, dass die Masse pro Zeit abnimmt, also  $\dot{m}$  negativ ist. Mit  $-\dot{m} \cdot u = -(-|\dot{m}| \cdot u) = |\dot{m}| \cdot u$  und unter der Berücksichtigung der Richtung von  $F_G = -mg$  und  $F_w$  resultiert:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = (u - v) \cdot \frac{dm}{dt} - m(t) \cdot g - c_w \frac{\rho A}{2} \cdot (v(t))^2 \quad (\text{Eq.36})$$

### Aufgaben

A1. Implementieren Sie die Systemgleichung Eq.35 in ein Systemdynamikprogramm. Wählen Sie selbst sinnvolle Parameter und testen Sie die Simulation.

A2. Simulieren Sie den Fall, dass nach Aufbrauchen des Treibstoffs das Triebwerk abstellt. Wie kann dieses Problem in der Simulation umgesetzt werden?

A3. Stellen Sie eigene Fragen zum Problem (Erweiterung des Systems z.B. für Raketen, die aus der Atmosphäre hinaus ins Weltall fliegen. Versuchen Sie, diese anhand der Simulation zu beantworten.

Lösungen

L1 / L2.

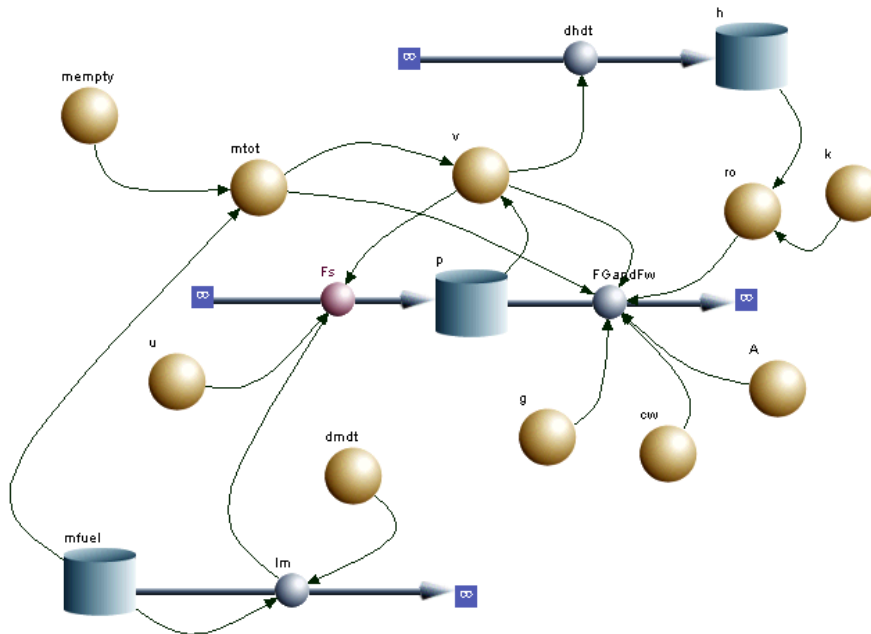


Fig.12. Flussdiagramm für Simulation des Raketenfluges (erstellt mit Berkeley Madonna): Zusätzlich zur Geschwindigkeit  $v$  wird noch die Höhe  $h = h(t)$  berechnet.

Der Simulation liegen folgende Systemgleichungen und Parameter-werte zugrunde (Programm-Output Berkeley Madonna):

<pre>{Top model}  {Reservoirs} d/dt (h) = + dhdt   INIT h = 0 d/dt (p) = + Fs - FGandFw   INIT p = 0 d/dt (mfuel) = - Im   INIT mfuel = 0.05  {Flows} dhdt = v Fs = (u-v)*Im FGandFw = mtot*g+(cw*ro*A/2)*v*abs(v)   Im = IF mfuel&gt;0 THEN dmdt   ELSE 0</pre>	<pre>{Functions} mempty = 0.05 mtot = mempty+mfuel u = 2000 dmdt = 0.005 v = p/mtot cw = 0.1 A = 0.001 ro = 1.293*exp(-k*h) g = 9.81 k = logn(2)/6600 {Globals} {End Globals}</pre>
--	---

Die folgenden Resultate (Fig.13 & 14) wurden mit einem Batch Run erstellt:  
mempty = Batch Run (0.02; 0.06; 0.1; 0.14; 0.18)

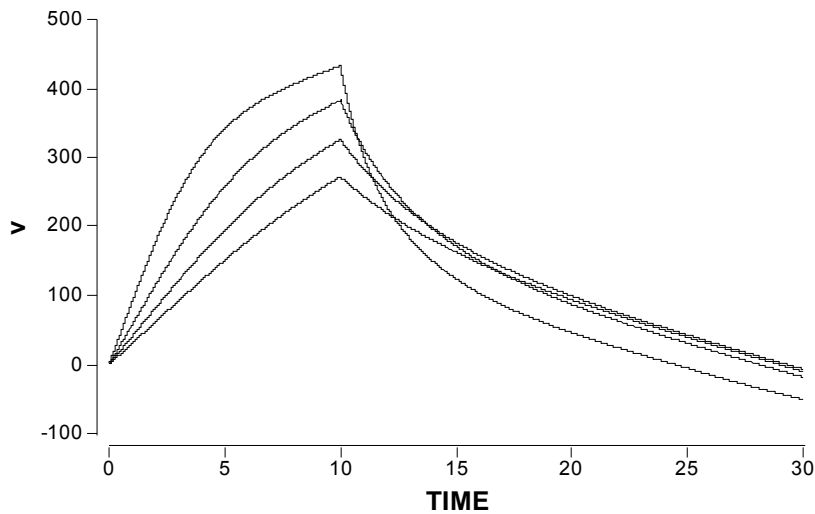


Fig.13. Geschwindigkeit  $v(t)$ . Numerik: Schrittweite  $\Delta t = 0.1$  s, Runge-Kutta-Verfahren

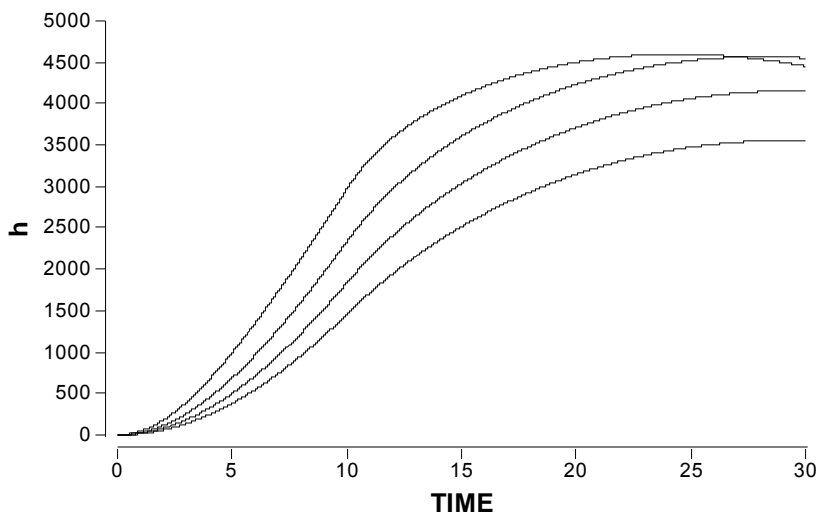
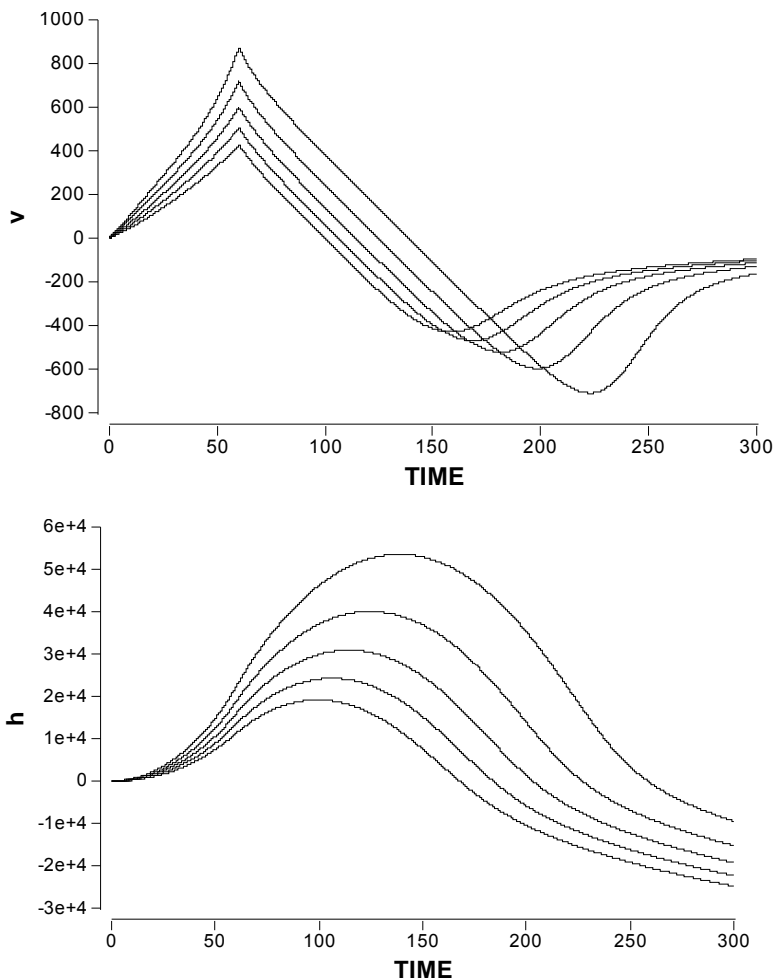


Fig.14. Höhe  $h(t)$ . Numerik: Schrittweite  $\Delta t = 0.1$  s, Runge-Kutta-Verfahren

L3. Mit der Simulation können eine ganze Reihe von Fragestellungen bearbeitet werden. Beispiele dafür sind die maximale Flughöhe, Flugdauer oder die Simulation kann auf Abschusswinkel kleiner als  $90^\circ$  zum Boden erweitert werden. Dann kann analog zu Abschnitt 222 die Flugweite untersucht werden. Eine andere Möglichkeit ist die Simulation einer in den Weltraum fliegenden Rakete. Dabei nimmt die Erdanziehung ab und vor

allein die Luftdichte und damit der Luftwiderstand wird kleiner. Das folgende Modell simuliert eine Rakete, welche in die obere Atmosphäre steigt (wobei angenommen wird, dass bis auf die Maximalhöhe sich noch keine wesentliche Änderung der Erdanziehung ergibt). Für die Höhenabhängigkeit der Dichte wurde  $\rho_0 = 1.293 \cdot \exp(-k \cdot h)$  mit  $k = \ln(2)/6600\text{m}$  verwendet.

Batch Run mempty = (400; 500; 600; 700; 800)



Zu beachten ist, dass die Geschwindigkeit noch innerhalb der Atmosphäre deutlich in den Überschallbereich geht und somit das Modell für den Luftwiderstand angepasst werden müsste (strömungs-abhängige Änderung des  $c_w$ -Wertes, siehe Kapitel 600). Sinkt die Rakete deutlich unter Meeresniveau, so wird die Dichtezunahme der Atmosphäre als einer Abnahme der (Gleichgewichts-) Geschwindigkeit im Diagramm sichtbar.

## 234 Simulation eines Zweikörperproblems

*Theorie*

Mit graphischen Modelleditoren lässt sich auch ein Zweikörperproblem, wie z.B. das Erde- Mond-System simulieren. Zur Vereinfachung soll vorerst der eine (in der regel schwerere Körper, also z.B. die Erde) als fest angenommen werden. Der Ansatz für die Modellierung kann wiederum über den Impuls erfolgen, wobei nun ein zweidimensionales Problem vorliegt, also die vektorielle Form der Gleichung  $\dot{\vec{p}} = dp / dt = \sum_i F_i$  zur Anwendung kommt. Unter Anwendung des Gravitationsgesetzes Eq.5 im Abschnitt 212 resultiert:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|r|} = -\gamma mM \cdot \frac{\vec{r}}{|r^3|} \quad (\text{Eq.1})$$

Dabei ist  $m$  die Masse des einen Körpers (z.B. Mond) und  $M$  die Masse des anderen (z.B. Erde). Zudem soll die Masse  $M$  im Ursprung des Koordinatensystems fixiert sein. Dies führt dazu, dass die Kraft auf die Masse  $m$  dem Ortsvektor  $\vec{r}$  entgegen gesetzt ist. Unter Annahme konstanter Massen kann nun für die Masse  $m$  die Beschleunigung komponentenweise geschrieben werden als:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{m} \cdot \frac{dp_x}{dt} = -\gamma M \cdot \frac{x}{|r^3|} \quad (\text{Eq.2})$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{1}{m} \cdot \frac{dp_y}{dt} = -\gamma M \cdot \frac{y}{|r^3|}$$

*Aufgaben*

A1. Implementieren Sie in einem graphischen Modelleditor ein Modell für das Erde.Mond-System. Berechnen Sie mit Hilfe des Modells die Umlaufbahn des Mondes (gem. Angaben in Formeln und Tafeln, DMK / DPK).

Wie lässt sich das Modell anhand der astronomischen Daten überprüfen?

Wie verhält sich die Umlaufbahn des Mondes in Abhängigkeit der Anfangsbedingungen?

Was ändert sich, wenn anstelle eines  $r^2$ -Gesetzes für die Gravitation eine andere Potenz gewählt wird (z.B.  $r^{-1}$ )?

*Systeme mit  
veränderlicher  
Masse*

Lösungen

L1. Als Speichergrösse im Flussdiagramm bietet sich der Impuls in  $x$ - und  $y$ - Richtung an. Aus Eq.2 lässt aber auch direkt eine Struktur mit 4 Integratoren ableiten (Fig.1)

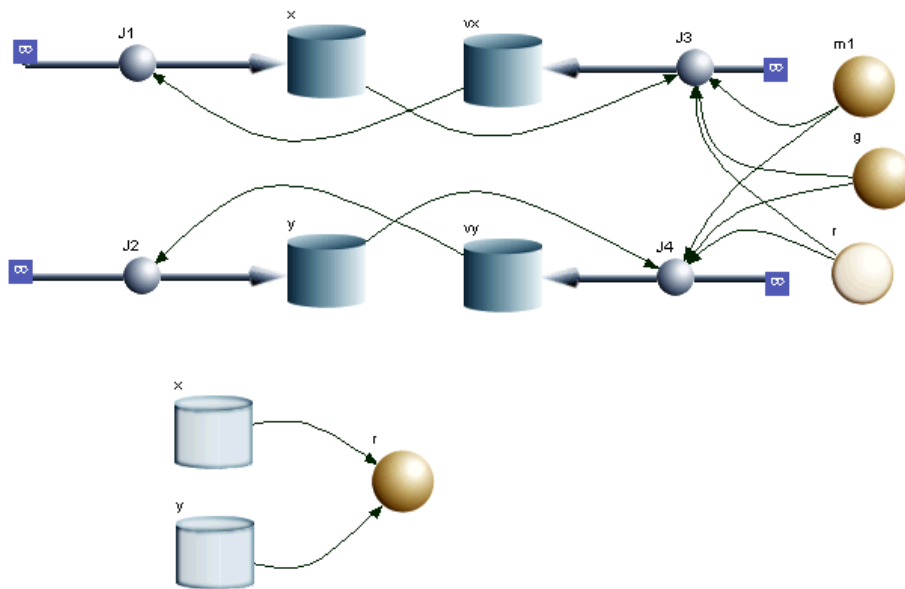


Fig.1. Modell in Flussdiagramm-Darstellung

Die Simulation lässt sich anhand der Abstände Erde-Mond und der Umlaufzeit überprüfen (Fig.2,3).

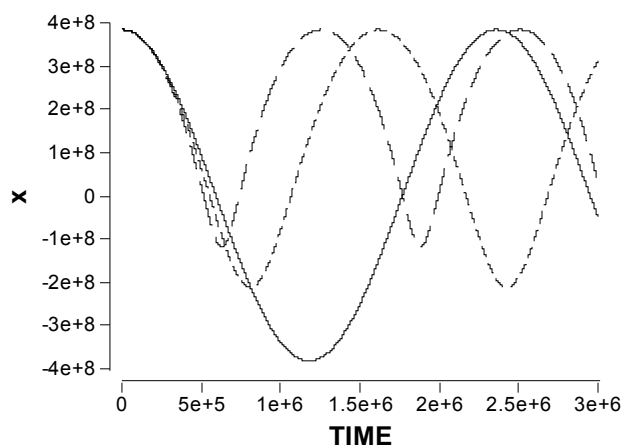


Fig.2.  $x$ -Koordinate in Abhängigkeit der Zeit: in Abhängigkeit der (Anfangs)-Geschwindigkeit  $v_y(0)$  bei  $x(0) = x_{\max} = 3.84 \cdot 10^5$  km.

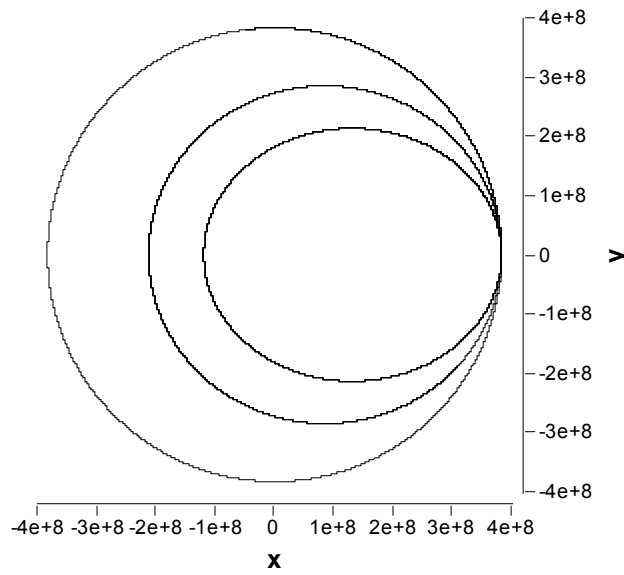


Fig.3. Umlaufbahn des Mondes in Abhängigkeit der (Anfangs)-Geschwindigkeit  $v_y(0)$  bei  $x(0) = x_{\max} = 3.84 \cdot 10^5$  km: Mit abnehmender Anfangsgeschwindigkeit werden die Bahnen elliptischer.

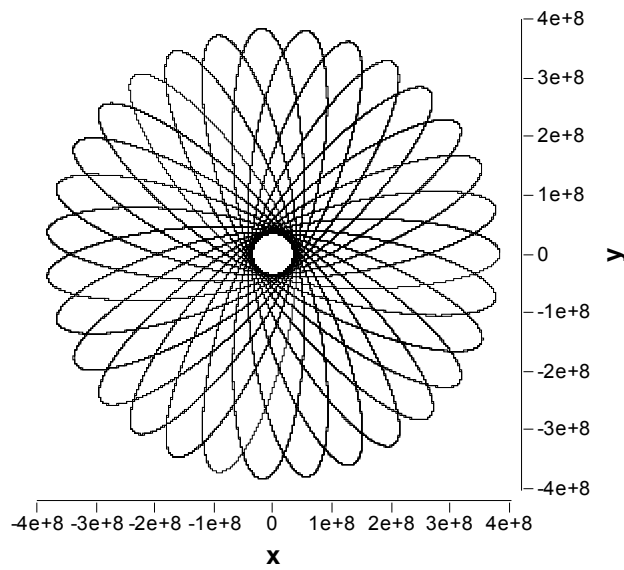


Fig.4 Hypothetische Umlaufbahn für ein  $r^{-1}$ -Gesetz: Die Gravitationskonstante und die Anfangsgeschwindigkeit wurden entsprechend angepasst ( $6.674 \cdot 10^{-17} \text{ m}^2/(\text{kg}\cdot\text{s}^2)$ ).

## 300 Arbeit, Energie und Potential

Um Bewegungen zu beschreiben, existieren zwei sehr unterschiedliche Ansätze: Im Kapitel 100 und 200 wurde von den Kräften als zentrale Grösse ausgegangen. Auch die Grössen Impuls und Arbeit lassen sich von Kräften ableiten. Ausgangspunkt für die Beschreibung von Bewegungen ist in diesem Fall eine Bewegungsgleichung, welche aufgrund der von NEWTON gefundenen Prinzipien aufgestellt werden kann.

Einen alternativen Zugang bietet die Energiebetrachtung eines physikalischen Problems. Viele Fragestellungen in der Physik sind über den Begriff Energie besser zugänglich.

*Inhalt*

Die Lernziele sind:

1. Energieerhaltungssatz für verschiedene Beispiele aufstellen und zur Lösung verwenden können
2. Definitionen für kinetische und potentielle Energie auswendig kennen
3. Begriff Potential selber definieren können
4. Einfache Probleme mit Potentialen lösen können
5. Integralrechnung auf einfache physikalische Probleme anwenden können

*Lernziele*



Fig.1. Flusskraftwerk bei Laufenburg



## 310 Arbeit & Leistung

### 311 potentielle & kinetische Energie

#### Theorie

Als Ausgangspunkt dient die physikalische Definition der Arbeit, eine Grösse, welche sich wie der Impuls aus der Kraft ableiten lässt. Für eine über den Weg  $\vec{s} = \Delta\vec{r}$  wirkende, konstante Kraft  $F$  gilt für die Arbeit  $W$ :

$$W = \vec{F} \bullet \vec{s} \quad (\text{Eq.1})$$

Die Arbeit ist eine skalare Grösse (SI-Einheit Joule  $J = Nm$ ). Die vektoriellen Grössen Weg und Kraft werden über ein Skalarprodukt verknüpft. Für die Beträge lässt sich auch schreiben:  $W = F \cdot s \cdot \cos\varphi$ . Dabei ist  $\varphi$  der Winkel zwischen Kraft und Weg.

Zwei mechanische Formen von Energie lassen sich besonders einfach aus der Definition der Arbeit (Eq.1) ableiten. Die potentielle Energie  $E_{pot}$  entspricht der Arbeit, welche im Schwere- bzw. Gravitationsfeld beim Heben einer Masse  $m$  auf die Höhe  $h$  verrichtet wird:

$$E_{pot} = W = F \cdot s = mgh \quad (\text{Eq.2})$$

Wird eine Masse eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel  $\alpha$  über die Wegstrecke  $s$  befördert, so resultiert aus Eq.1  $W = s \cdot mg \cdot \cos\varphi$ . Der Winkel  $\varphi$  kann durch den Neigungswinkel der Ebene ausgedrückt werden:  $\varphi = \alpha + 90^\circ$ . Somit wird  $\cos(\alpha + 90^\circ) = -\sin\alpha$  und  $W = (-)mg \cdot s \cdot \sin\alpha = (-)mgh$ .

Die kinetische Energie ist die in der (reibungsfreien) Bewegung eines Körpers mit der Masse  $m$  steckende Bewegungsenergie. Es ist die bei der Beschleunigung der Masse geleistete Arbeit. Wieder kann von der Definition der Arbeit (Eq.1) ausgegangen werden. Es gilt für die pro Wegstück geleistete Arbeit:  $dW = m\vec{a} \bullet d\vec{r}$ , wobei  $d\vec{r}$  ein kleines Wegstück sein soll, auf dem die Masse während dem Zeitschritt  $dt$  verschoben wird. Somit gilt:

$$\frac{dW}{dt} = m\vec{a} \bullet \frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{a} \bullet \vec{v} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m\vec{v} \bullet \vec{v} \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} mv^2 \right] \quad (\text{Eq.3})$$

*Definition der Arbeit*

*Arbeit als skalare Grösse*

*potentielle Energie*

*schiefe Ebene*

*kinetische Energie*

Die pro Zeitschritt  $dt$  geleistete Arbeit  $dW$  wird als Leistung bezeichnet. Auf beiden Seiten von Eq.3 steht eine zeitliche Ableitung. Das Weglassen dieser zeitlichen Ableitung entspricht einer Integration, es gilt also für die kinetische Energie  $E_{kin}$ :

*Leistung*

$$W = \frac{1}{2}mv^2 = E_{kin} \quad (\text{Eq.4})$$

*Aufgaben*

A1. Bei der Verbrennung von einem mol Oktan ( $C_8H_{18}$ ) werden 5471 kJ/mol freigesetzt. Wie schnell würde ein Motorrad mit einer Masse von 250 kg fahren, wenn diese Energie in die Beschleunigung des Motorrads umgesetzt würde?

A2. Eine Punktmasse ( $m = 2$  kg) bewege sich mit folgender Geschwindigkeit durch den Raum:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} m/s$$

- Berechnen Sie die kinetische Energie  $E_{kin}$ .
- Berechnen Sie die kinetische Energie nur für die Bewegung in x-Richtung ( $E_{kinx}$ ).
- Berechnen Sie die kinetische Energie nun für die Bewegung in y- ( $E_{kiny}$ ) und z-Richtung getrennt ( $E_{kinz}$ ).
- Berechnen Sie nun aus dem so gewonnen "Energievektor" den Betrag und vergleichen Sie diesen mit (a): Was ist ihre Schlussfolgerung?
- Zeigen Sie, dass folgende Beziehung stimmt:

$$\frac{1}{2}m(\vec{v} \bullet \vec{v}) = E_{kinx} + E_{kiny} + E_{kinz}$$

*Lösungen*

L1.

$$v = \sqrt{\frac{2E_{chem}}{m}} = \underline{209.2m/s}$$

L2.

$$(a) E_{kin} = \frac{1}{2}m \cdot (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \underline{21J}$$

(bc)

$$E_{kin,x} = \underline{4J}; \quad E_{kin,y} = \underline{16J}; \quad E_{kin,z} = \underline{1J}$$

(d)

$$|\vec{E}_{kin}| = \sqrt{E_{ki,x}^2 + E_{kin,y}^2 + E_{kin,z}^2} = \underline{16.5J \neq E_{kin}}$$

Energie als vektorielle Grösse macht keinen Sinn. Die Gesamtenergie ist die Summe der Bewegungsenergien in die einzelnen Raumrichtungen (skalare Erhaltungsgrösse: Energieerhaltung!).

$$(e) \frac{1}{2}m(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 \\ = E_{kin,x} + E_{kin,y} + E_{kin,z}$$

## 312 Leistung und Energieerhaltung

*Theorie*

Die Leistung  $P$  ist physikalisch definiert durch die pro Zeit  $dt$  geleistete Arbeit  $dW$  :

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cdot ds}{dt} = F \cdot v \quad (\text{Eq.5})$$

*Definition der Leistung*

Die Leistung ist somit die zeitliche Änderung der Energie (SI-Einheit  $W = J/s$ ). Die Energie ihrerseits ist eine Erhaltungsgrösse. Für ein geschlossenes System gilt deshalb:

*Energie-Erhaltung*

$$\sum_i E_i(t_1) = \sum_i E_i(t_2) \quad (\text{Eq.6})$$

Die Summe aller Teilenergien  $E_i$  im System ist als für zwei beliebige Zeitpunkte  $t_1$  und  $t_2$  konstant. Für ein abgeschlossenes System gilt auch:  $\dot{W} = P = 0$ . Es wird also vom System keine Arbeit nach aussen verrichtet oder von aussen Energie ins System hinein gebracht. Für ein offenes System lässt sich die zeitliche Änderung der Energie im System durch folgende Bilanz berechnen:

*Leistungs-Bilanz*

$$\frac{dW}{dt} = P_{in} - P_{out} \quad (\text{Eq.7})$$

Dabei ist  $P_{in}$  die ins System investierte Leistung und  $P_{out}$  die vom System abgegebene Leistung.

*Aufgaben*

A1. Eine Kugel mit einer Masse von 10 kg wird von einer 20 m hohen Mauer fallen gelassen.

- a) Wie gross wäre die Geschwindigkeit beim Auftreffen auf dem Boden?
- b) Wie gross wäre die Geschwindigkeit beim Auftreffen auf dem Boden, wenn das Experiment auf dem Mond stattfände?

A2. Wie viel Leistung erbringt eine Turbine bei einem Speicherkraftwerk, wenn durch diese pro Sekunde 100 Liter Wasser fliessen, welches aus einer Höhe von 1100 m über der Turbine stammt?

A3. Das Mehrzweckflugzeug PC-12 der Pilatus-Werke ist mit einer Propellerturbine vom Typ Pratt&Whitney mit einer Leistung von 1180 kW ausgerüstet. Die maximale Reisegeschwindigkeit auf der Dienstgipfelhöhe von 9150 m beträgt 500 km / h. Das maximale Startgewicht ist 4500 kg und die maximale Steiggeschwindigkeit beträgt 9.85 m/s.

- a) Wie gross ist die gesamte mechanische Energie des beladenen Flugzeugs, wenn es mit Höchstgeschwindigkeit auf der Dienstgipfelhöhe fliegt?
- b) Wie lange dauert es, bis das beladene Flugzeug aus dem Stand die Dienstgipfelhöhe und die Maximalgeschwindigkeit erreicht hat (Annahmen?)?
- c) Warum stimmt die in Aufgabe b gerechnete Zeit nicht mit der tatsächlich benötigten Zeit überein? Ist die berechnete Zeit zu gross oder zu klein?

A4. Ein Triebwerk mit einer Standleistung von  $250\text{kW}$  beschleunige einen Wagen mit einer Masse von  $500\text{kg}$ . Dabei solle sich die vom Triebwerk erzeugte Leistung in Abhängigkeit der Geschwindigkeit reduzieren:

$$P(v) = P_0 - \mu v^3$$

mit  $\mu = 0.3\text{Ws}^3 / \text{m}^3$ . Modellieren Sie den Prozess mit einem Systemdynamikprogramm und stellen Sie den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit dar.

A5. Mit einem graphischen Modelleditor (Berkeley-Madonna oder äquivalent) soll ein elastischer Stoss zwischen zwei Massen modelliert und mittels Simulation untersucht werden. Der Stoss soll auf der Impulsebene modelliert werden. Diese hat zwei Speicher für die beiden Massen. Parallel dazu soll die Energieebene mitmodelliert werden. Diese hat drei Speicher: Die kinetische Energie der beiden Massen sowie die elastische Energie während der Deformation beim Stoss. Die elastische Deformationsenergie wird durch die Kraft und den Weg, während diese Kraft wirkt, bestimmt. Die elastische Kraft soll durch das folgende lineare Gesetz modelliert werden:  $F_D = D \cdot (x_1 - x_2)$  für  $x_i$  sei die Position des  $i$ -ten Körpers. Die Kraft soll nur während des Stosses wirken, also wenn sich die Körper berühren (Analog A6, Abschnitt 231). Wie kann die Simulation überprüft werden?

*Lösungen*

L1.

(a)

$$E_{kin} = E_{pot} = mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\rightarrow v = \sqrt{2gh} = \underline{19.8m/s}$$

$$(b) v = \sqrt{2g_{mond} \cdot h} = \underline{8.1m/s}$$

L2.

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}[gh \cdot m(t)] = gh \cdot \frac{dm}{dt} = \rho gh \cdot \frac{dV}{dt} = \underline{1.08MW}$$

L3.

$$(a) E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \underline{447 MJ}$$

$$(b) \Delta t = \frac{\Delta E}{P} = \underline{6.3 min.}$$

(c) Es wurde der Luftwiderstand vernachlässigt. Zudem bleibt das Gewicht nicht konstant, da Treibstoff verbrannt wurde. Auch lässt mit zunehmender Höhe die Leistung des Triebwerks nach, da die Luft-dichte abnimmt. Des Weiteren ist die Rotationsenergie aller rotieren-den Teile im Flugzeug (Turbine, Getriebe) nicht berücksichtigt). Der Luftwiderstand macht jedoch den grössten Anteil aus. Die berechnete Zeit ist zu klein. In der maximalewn Steiggeschwindigkeit sind bereits einige aerodynamische Faktoren enthalten, jedoch ist auch  $t = h/v_{climb} = 15.48 min.$  eine zu optimistische Abschätzung, da die maximale Steiggeschwindigkeit nur auf Meereshöhe erreicht wird.

L4.

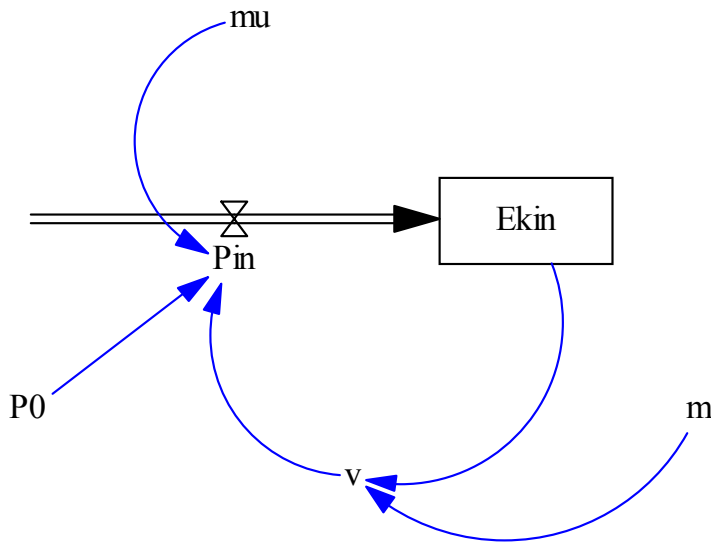


Fig.1. Flussdiagramm zu Aufgabe 4

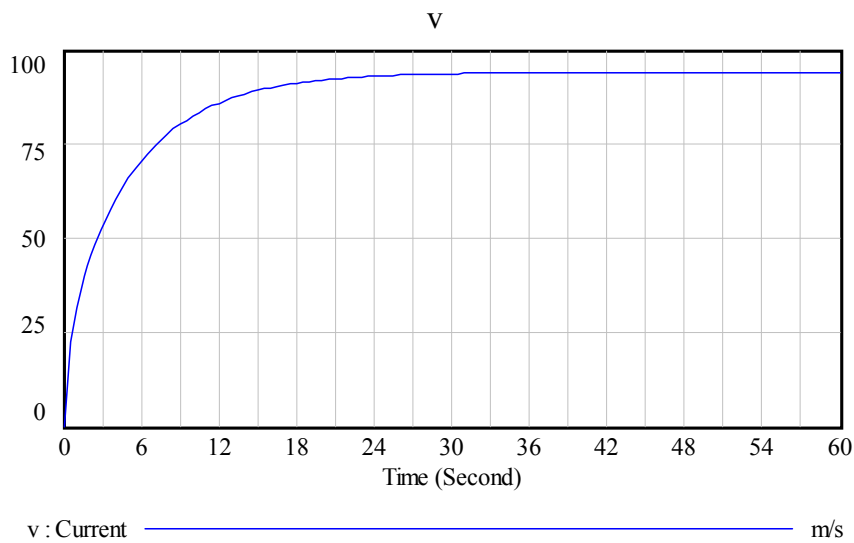
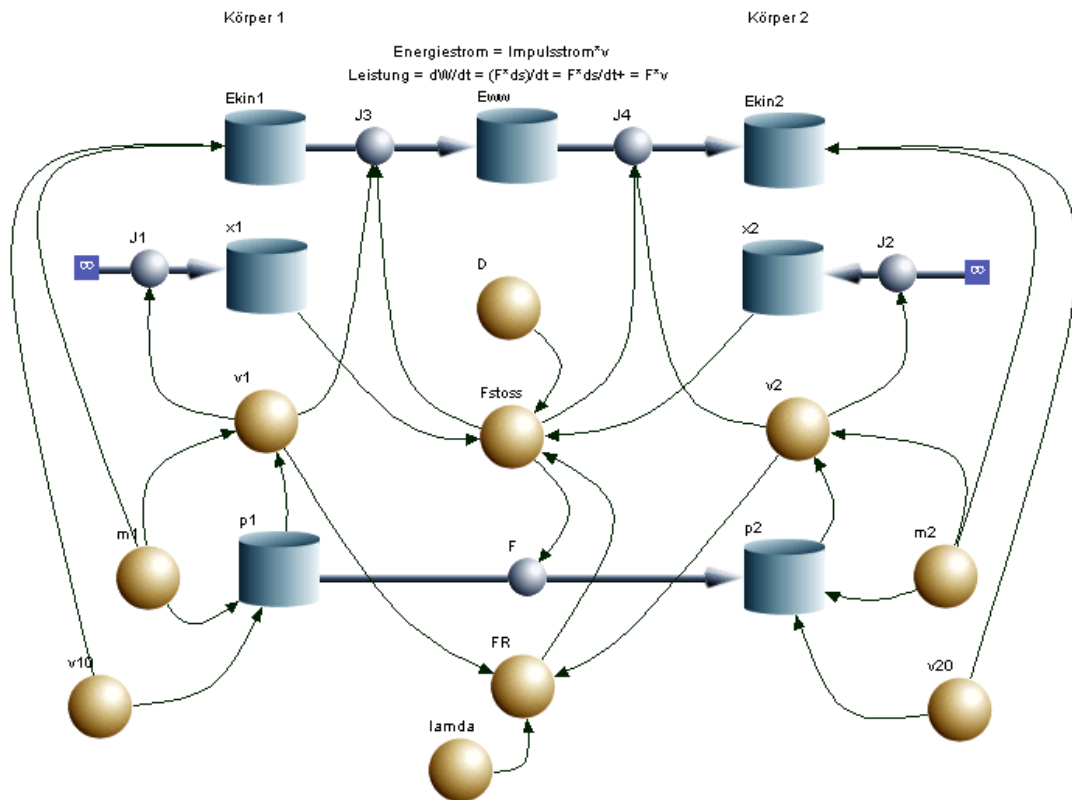


Fig.2. Zunahme der Geschwindigkeit bei Antrieb durch ein Triebwerk gemäss Aufgabe 4.

Anmerkung: Für  $t \rightarrow 0$  strebt die Beschleunigung gegen Unendlich:  $a = \dot{v} \rightarrow \infty$ . Somit kann ganz zu Beginn die umgesetzte Leistung nicht konstant sein, da unrealistisch hohe Kräfte entstünden. Die Simulation funktioniert trotzdem, da ein nicht unendlich kleines  $\Delta t$  genommen wird.

A5. Die Berkeley-Madonna- Flowchart hat die folgende Struktur:



Dieses Modell berücksichtigt auch Reibung. Dadurch lassen sich auch teilelastische Stösse untersuchen. Das Modell lässt sich anhand ein-facher Fälle (vollelastische Stösse) schnell überprüfen.

Impulsebene: Der Gesamt-Impuls vor dem Stoss muss gleich dem Gesamtimpuls nach dem Stoss sein.

(1) Für zwei gleiche Massen gilt für  $v_1(vor) = -v_2(vor)$  :

$$v_1(vor) = -v_2(vor) = -v_1(nach) = v_2(nach)$$

(2) zwei gleiche Massen gilt für  $v_1(vor) = v_1(0)$  und zwei gleiche Massen gilt für  $v_2(vor) = 0$  m/s:

$$v_1(nach) = 0 \text{ m/s und } v_2(nach) = v_1(0)$$

Dies lässt sich auch gut an den Orts-Zeit-Diagrammen (Fig.A und B) erkennen.

Energie-Ebene: Gesamt-Energie vor und nach dem Stoss ist erhalten.



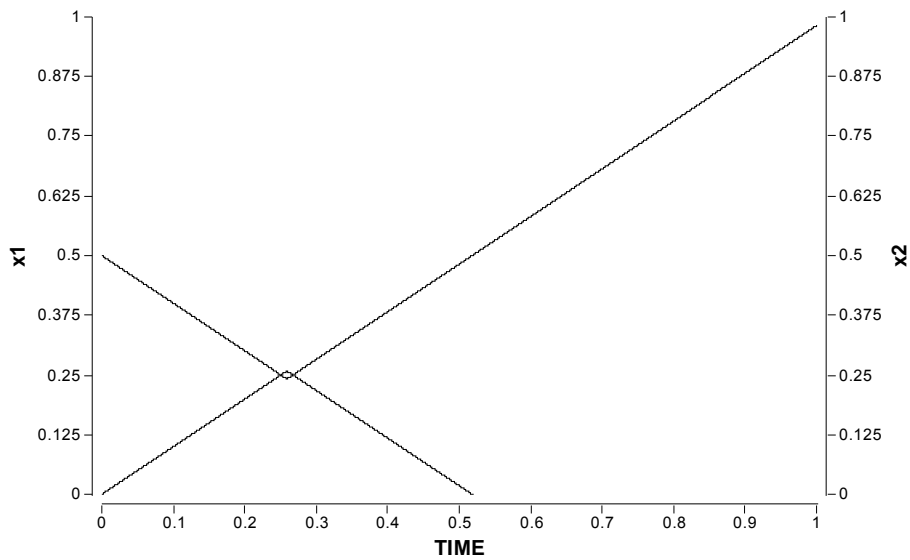


Fig. A. Ort als Funktion der Zeit bei zwei Massen mit je 0.5 kg und den Anfangsgeschwindigkeiten  $v_1 = -v_2 = 1$  m/s.

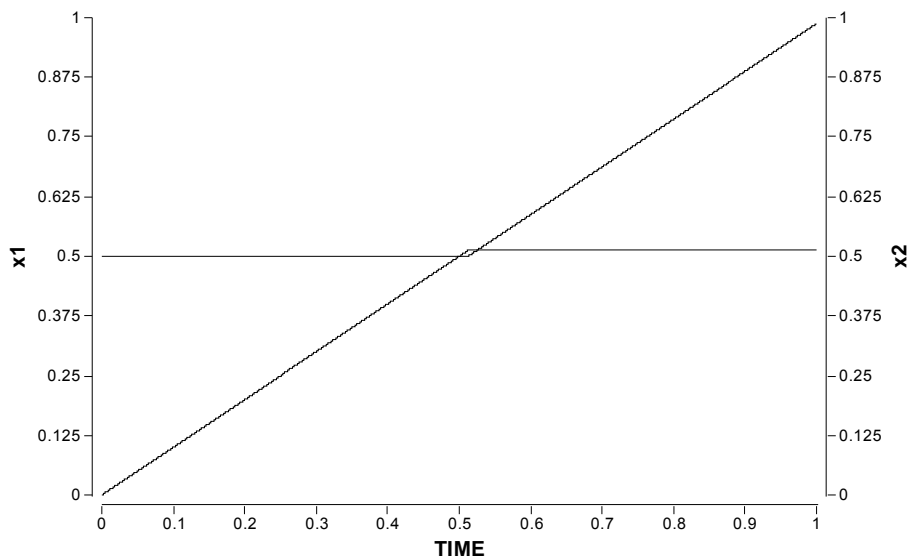


Fig. B. Ort als Funktion der Zeit bei zwei Massen mit je 0.5 kg und den Anfangsgeschwindigkeiten  $v_1 = 1$  m/s und  $v_2 = 0$  m/s.

Die Massen durchdringen sich beim Stoss leicht. Dies lässt sich durch Anpassen der Koordinaten (Koordinatentransformation für die elastische Kraft) vermeiden.

## 320 Felder & Potentiale

### 321 Gravitationspotential

#### Theorie

In diesem Abschnitt soll die potentielle Energie im Gravitationsfeld berechnet werden. Dabei wird von einer kugelförmigen, grossen Masse  $M$  mit dem Radius  $r_1$  ausgegangen. Eine kleine Masse  $m$  soll nun von der Oberfläche der Grossen Kugel auf einen bestimmten Abstand  $r_2$  gebracht werden. Da sich die beiden Massen gravitativ anziehen, muss dafür die Arbeit  $W$  verrichtet werden:  $W = \vec{F} \bullet \vec{s}$ . Dabei ist  $\vec{s}$  der Streckenvektor. Weil die Masse  $m$  radial von der grossen Kugel entfernt werden soll, gilt wegen  $\varphi = 180^\circ$   $W = F \cdot s \cdot \cos \varphi = -F \cdot \Delta r = -F \cdot (r_2 - r_1)$ .

Da nun die Gravitationskraft nur über ein praktisch unendlich kleines Wegstück  $dr$  konstant ist, müsste die Kraft immer wieder neu berechnet werden. Dies kann man sich als ein schrittweises Vorgehen vorstellen. Für jeden Schritt müsste der Beitrag zur Arbeit berechnet werden durch:

$$dW = F(r) \cdot dr \quad (\text{Eq.8})$$

Konkret für die ersten Schritte würde die Rechnung wie folgt aussehen (mit einer Endlichen Schrittweite  $\Delta r$ ):

1. Schritt:  $\Delta W_1 = F(r_1) \cdot \Delta r$
2. Schritt:  $\Delta W_2 = F(r_1 + \Delta r) \cdot \Delta r$
3. Schritt:  $\Delta W_3 = F(r_1 + 2 \cdot \Delta r) \cdot \Delta r$

Die gesamte Arbeit ergäbe sich durch aufsummieren:  $W = \sum_i \Delta W_i$  (Fig.3).

*Arbeit im  
Gravitations-  
feld*

*schrittweise  
Berechnung*

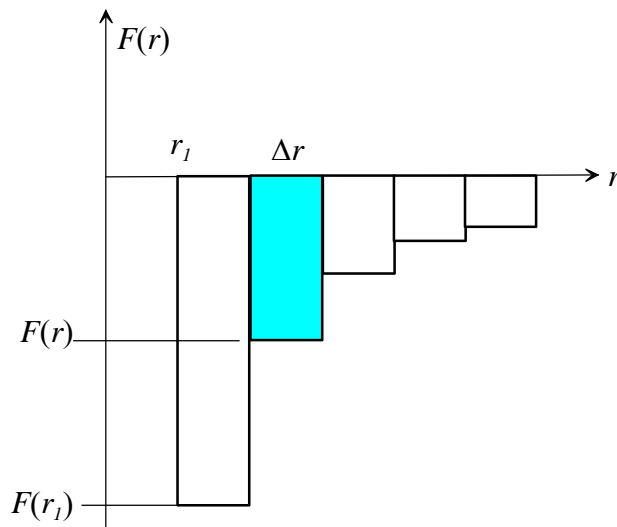


Fig.3. Konzept zur Berechnung der Arbeit im Gravitationsfeld: Die Kraft wird hier wegen  $\cos 180^\circ = -1$  negativ genommen (Anziehung).

Für die praktisch unendlich kleinen Schritte  $dr$  ist das Berechnen einer solchen Summe ein aussichtsloses Unterfangen. Glücklicherweise steht an dieser Stelle ein mathematisches Hilfsmittel zur Verfügung: Der Grenzwertübergang für  $\Delta r \rightarrow 0$  (also für  $\Delta r \rightarrow dr$ ) führt die Summe auf ein sogenanntes Integral. Dafür wird folgende Schreibweise verwendet:

*Summation  
durch Integral*

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left[ \sum_i \Delta W_i \right] = \int dW \quad (\text{Eq.9})$$

Rechnerisch ist das Integral von grossem Nutzen, weil es die Umkehroperation zur Ableitung darstellt. Dies sei an dieser Stelle an folgendem Beispiel gezeigt:

*Rechnen mit  
Integralen*

Sei  $f(x)$  eine Funktion mit dem Definitionsbereich  $D$ , so kann die Fläche unter der Kurve (also zwischen Kurve und x-Achse) zwischen den Grenzen  $a$  und  $b$  wie in Fig.4 angenähert werden.

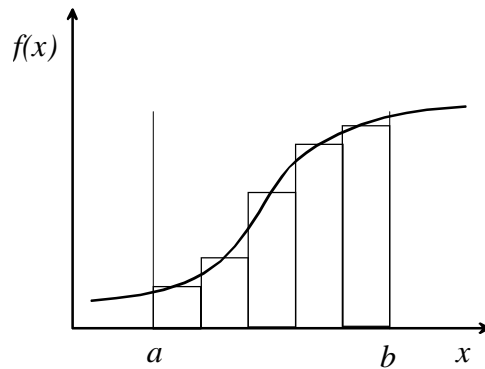


Fig.4. Approximation für Fläche unter einer Kurve

Die Fläche eines jeden Rechtecks berechnet sich aus der Breite  $\Delta x$  mal die Höhe, welche durch den Funktionswert  $f(x)$  gegeben ist (Fig.5).

*Fläche unter einer Kurve*

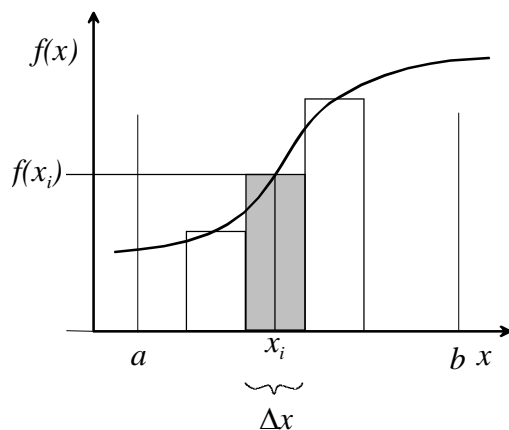


Fig.5. Flächenelement

Nun kann für die approximative Berechnung der Fläche  $A$  zwischen  $a$  und  $b$  die Summe aller Rechteckflächen gebildet werden:

*Approximation durch Summe*

$$A \approx \sum_i f(x_i) \cdot \Delta x$$

Die Stelle  $x_i$  berechnet sich aus dem Startwert  $a + \frac{\Delta x}{2} = x_a$  plus die

Anzahl Schritte  $i \cdot \Delta x$ . Die Approximation wird mit kleiner werden-der Schrittweite  $\Delta x$  genauer. Somit liegt es auf der Hand, die folgende Grenzwertbildung zu betrachten:

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \sum_i f(x_a + i \cdot \Delta x) \cdot \Delta x \right]$$

Diese Grenzwert- und Summenbildung wird Integration genannt. Dafür wurde eine spezielle Notation eingeführt:

$$A(x) = \int_a^b f(x) dx$$

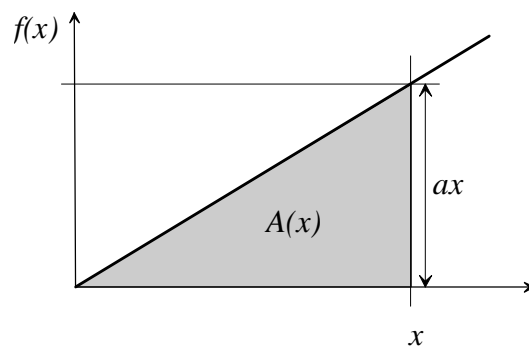
Wobei  $a$  und  $b$  die Grenzen der Integration darstellen. An dieser Stelle wird auf eine mathematisch exakte Behandlung dieser Summen verzichtet und eine einfache intuitive Betrachtung angestellt. Dafür soll die Fläche  $A$  unter den Funktionen der Form  $f(x) = ax^n$  ermittelt werden. Für  $n = 0$  suchen

wir also  $A(x) = \int_0^x a \cdot dx$ . Da  $a$  konstant ist, ist aber die gesuchte Fläche

direkt die Rechtecksfläche  $A(x) = a \cdot x$ .

Für  $n = 1$  ist  $f(x) = ax$  eine Gerade. Die Fläche unter dieser Gerade ist die Dreiecksfläche:

$$A(x) = \frac{1}{2} ax \cdot x = \frac{1}{2} ax^2$$



*Beispiel:  
Fläche unter  
einer Geraden*

Für  $n = 2$  kann die Fläche unter der Kurve abgeschätzt werden. Sie ist sicher kleiner als die Dreiecksfläche:

$$A < \frac{1}{2} \cdot ax^2 \cdot x = \frac{1}{2} \cdot ax^3$$

*Fläche unter  
einer Parabel*

Betrachtet man die Beispiele für  $n \in \{0,1\}$ , so liegt der Verdacht vor, dass die Fläche durch folgende Funktion gegeben sein könnte:

$$A = \frac{1}{3} \cdot ax^3$$

Dies lässt sich empirisch durch eine numerische Integration testen. Es lässt sich die Summe für ein kleines, aber diskretes  $\Delta x$  ausführen:  $A(x + \Delta x) = A(x) + f \cdot \Delta x = \sum f(x_i) \cdot \Delta x$  (Euler-Methode, s. 221).

Die Differenz  $\sum_i f(x_i) \cdot \Delta x - \frac{1}{3}ax^3$  sollte für  $\Delta x \rightarrow 0$  verschwinden (Fig.6). Es lässt sich dabei feststellen, dass für  $\Delta x \rightarrow 0$  die numerisch integrierte Funktion sich  $\frac{1}{3}ax^3$  nähert.

*Numerische  
Berechnung  
von Integralen*

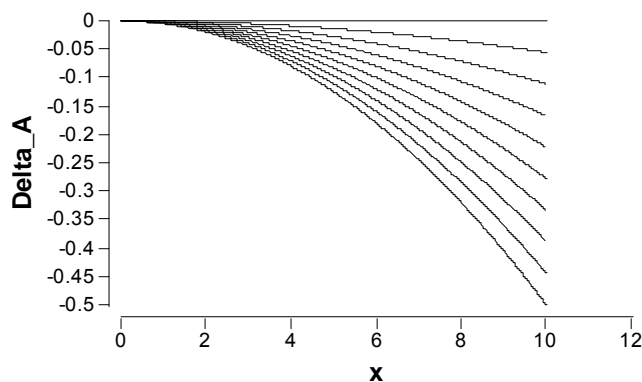


Fig.6. Differenz  $\sum_i f(x_i) \cdot \Delta x - \frac{1}{3}ax^3$  für  $f(x) = x^2$  ( $a = 1$ ) für variierendes  $\Delta x$  zwischen  $10^{-2}$  bis  $10^{-5}$ : Für kleine Integrations-Schritte (hier Euler-Verfahren) verschwinden die Differenzen.

Rechnerisch lässt sich folgende Überlegung machen: Sei  $dA(x) = f(x) \cdot dx = f \cdot dx = dA$ , so ist die Ableitung von  $A(x)$  ja gerade  $dA/dx = f(x)$ . Die Ableitung ist also gerade die Umkehrung der Integration und umgekehrt. Somit gilt folgende Integrationsregel:

*Umkehrung  
der Ableitung*

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$$

*Regel für  
Potenz-  
funktionen*

Dieser Sachverhalt gilt allgemein: Es ist eine deutliche Erleichterung bei der Berechnung von Integralen, dass die Integration die Umkehroperation der Ableitung ist:

$$\int dx[f'(x)] = \int dx \left[ \frac{d}{dx}(f(x)) \right] = f(x)$$

Die zur Stammfunktion addierte Konstante  $c$  fällt beim Ableiten weg. Das Integral (5) ist also nur bis auf eine beliebige Konstante  $c$  bestimmt: Es handelt sich um ein unbestimmtes Integral, da mit beliebig vielen Konstanten auch beliebig viele Stammfunktionen zu einem Integral existieren.

Wenn nun aber die in Abschnitt 311 gestellte Aufgabe (Flächenberechnung unter einer Kurve) gelöst werden soll, so erstreckt sich die Integration über einen bestimmten Bereich, der zwischen den Grenzen  $a$  und  $b$  liegt. Für die folgende Überlegung soll nur der positive Teil der  $x$ -Achse betrachtet werden. Um die Fläche zwischen diesen Grenzen zu erhalten, muss von  $0$  bis  $b$  integriert und die Fläche zwischen  $0$  und  $a$  wieder abgezählt werden. Wie im Beispiel in Abschnitt 311 muss also bis zur oberen Grenze  $b$  integriert werden. Dann wird der Wert  $b$  für die Grenze eingesetzt. Nun muss die Fläche bis zur unteren Grenze  $a$  wieder abgezählt werden, was durch das abzählen des Integrals bis  $a$  geschieht:

*Grenzen der  
Integration*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx = A(b) - A(a)$$

Das Integral (6) ergibt einen definierten Zahlenwert, es handelt sich also um ein bestimmtes Integral. Der resultierende Zahlenwert ist aber nicht einfach die Fläche unter der Kurve. Wird die Funktion  $f(x)$  negativ, so nimmt auch  $F(x)$  negative Werte an. In diesen Fällen muss für eine Flächenberechnung das Integral bei den Nullstellen von  $f(x)$  zerlegt und stückweise berechnet werden. Hingegen unproblematisch ist die Ausdehnung der Integration auf die negative  $x$ -Achse.

*bestimmtes  
Integral*

Dieses Rechenverfahren soll nun für die Berechnung der potentiellen Energie im Gravitationsfeld angewandt werden. Gemäss Eq.9 muss folgendes Integral berechnet werden:

*Anwendung auf  
Berechnung  
der Arbeit*

$$W = \int_{r_1}^{r_2} dW = \int_{r_1}^{r_2} F(r) \cdot dr \quad (\text{Eq.10})$$

Um das Integral auswerten zu können, muss das Kraftgesetz für die Gravitation bekannt sein. Entsprechend Abschnitt 222 gilt:

*Gravitations-  
Kraft*

$$F(r) = \gamma \frac{mM}{r^2} \quad (\text{Eq.11})$$

Dieses Kraftgesetz gilt nicht nur für Punktmassen, sondern auch für Kugeln, da das Feld radialsymetrisch verläuft (Experiment in Abschnitt 322). Eingesetzt in Eq.11 ergibt sich:

*Feld um  
kugelförmige  
Masse*

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{mM}{r^2} dr = \gamma mM \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr \quad (\text{Eq.12})$$

Da die Massen und  $\gamma = 6.6731 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2$  konstant sind, können sie vor das Integral gezogen werden (analog zu einer ganz normalen Summe!). Somit reduziert sich die Berechnung des Integrals auf die Suche einer Stammfunktion zu  $f(r) = r^{-2}$ . Durch Anwenden der Integrationsregel für Potenzfunktionen ergibt sich:

$$\begin{aligned} W &= \gamma mM \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = -\gamma mM \left[ \frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} \\ &= -\gamma mM \left[ \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right] \end{aligned} \quad (\text{Eq.13})$$

Für viele Aufgabenstellungen in der Physik hat es sich als günstig erwiesen, ein sogenanntes Potential zu definieren. Das Gravitations-potential ist definiert als:

*Potential*

$$V(r) = -\gamma \frac{M}{r} \quad (\text{Eq.14})$$

Für das Potential muss wie bei der potentiellen Energie ein Bezugs-punkt festgelegt werden. Dieser wird im Unendlichen gewählt: Für  $r = \infty$  gilt  $E_{pot} = 0$  (Fig.7).

*Bezugs-  
Punkte*

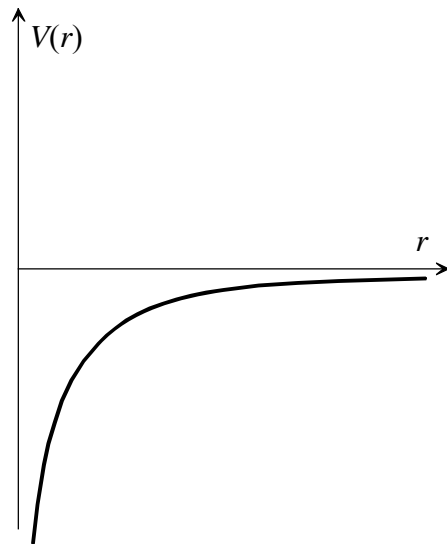
Das Gravitationspotential kann als Integral des Gravitationsfeldes  $G = G(r)$  aufgefasst werden: Die Gravitationskraft ist gegeben durch:



$$F(r) = m \cdot G(r) \quad (\text{Eq.15})$$

und somit:

$$V(r) = \int G(r) \cdot dr \quad (\text{Eq.16})$$



*Gravitations-  
Potential*

Fig.7. Potential  $V(r)$  in Abhängigkeit des Abstands  $r$ .

Die Arbeit lässt sich nun durch eine Potentialdifferenz darstellen:

$$W = m \cdot [V(r_2) - V(r_1)] \quad (\text{Eq.17})$$

Dies entspricht im Wesentlichen der Differenz der potentiellen Energie:

$$W = mV(r_2) - mV(r_1) = E_{pot}(r_2) - E_{pot}(r_1) \leftrightarrow mgh_2 - mgh_1.$$

*potentielle  
Energie*

### Aufgaben

A1. Überprüfen Sie durch numerische Integration (Euler-Verfahren), ob die Integration die Umkehrung der folgenden Ableitungsregeln ist:

$$\text{a) } \frac{d}{dx} [\ln|x|] = \frac{1}{x} \qquad \text{b) } \frac{d}{dx} [e^{cx}] = c \cdot e^{cx}$$

$$\text{c) } \frac{d}{dx} [\sin(\omega t)] = \omega \cdot \cos(\omega t)$$

Verwenden Sie dazu für Teilaufgabe (a) und (b) Tabellenkalkulation und für Teilaufgabe (c) Berkeley Madonna.

A2. Eine Raumsonde soll mittels einer riesigen Kanone in den Weltraum geschossen werden. Die Masse der Erde ist  $M = 5.974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  und der Radius  $r_1 = 6.378 \cdot 10^6 \text{ m}$ .

- Wie gross müsste die Abschussgeschwindigkeit sein, um die Raumsonde ins unendliche zuschiessen (Fluchtgeschwindigkeit)?
- Wie realistisch ist ein solcher Schuss von der Erde aus?

A3. Betrachten Sie folgendes Integral:

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}(t)) \bullet \vec{v}(t) dt = \int_C \vec{F}(\vec{r}(t)) \bullet \dot{\vec{r}}(t) dt$$

Dabei sei  $\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{r})$  eine vom Ortsvektor  $\mathbf{r}$  abhängige Kraft. Sie können sich dabei vorstellen, dass sich ein Körper mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  auf dem Pfad  $C$  bewege und am Ort  $\mathbf{r}$  befindet und auf diesen Körper eine Kraft  $\mathbf{F}$  wirke.

- Wie hängt dieses Integral mit der Arbeit bzw. der Leistung zusammen? Betrachten Sie dafür eine Kraft, welche in Richtung der Geschwindigkeit zeigt (wirkt).
- Welchen Wert nimmt das Integral an, wenn sich ein Körper in einem homogenen Kraftfeld auf einem quadratischen Pfad bewege, bei dem zwei Seiten exakt senkrecht zum Kraftfeld stehen?
- Welchen Wert nimmt das Integral für einen Mond an, wenn sich dieser kreisförmig oder elliptisch um den Zentralplaneten (z.B. Erde) bewegt?

*Lösungen*

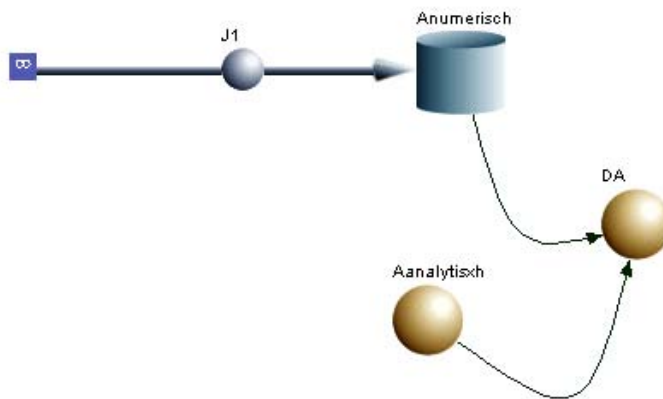
L1. Die folgenden Integrationsregeln gelten tatsächlich:

a)  $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln|x|$  für  $x \neq 0$

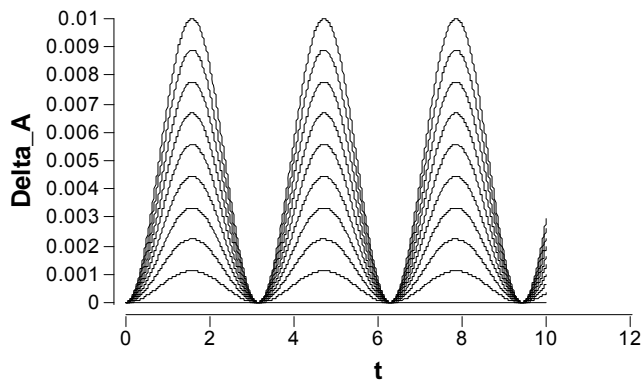
b)  $\int e^{cx} dx = \frac{1}{c} \cdot e^{cx}$

c)  $\int \cos(\omega t) \cdot dt = \frac{1}{\omega} \cdot \sin(\omega t)$

Mit Berkeley Madonna lässt sich folgende Integrator-Struktur im Flussdiagramm bilden (J1 = cos(2\*time)):



Für die Integration von  $\cos(2x)$  ergibt sich folgendes Diagramm für die Differenz ( $\Delta t$  zwischen  $10^{-2}$  bis  $10^{-5}$ ):



L2

(a) Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}mv^2 = W = m \cdot [V(r_2) - V(r_1)]$$

$$\text{für } r = \infty : V(\infty) = -\gamma \frac{M}{\infty} = 0$$

also gilt:

$$\frac{1}{2}mv^2 = -mV(r_1) = +\gamma \frac{mM}{r_1}$$

für die Fluchtgeschwindigkeit resultiert:

$$v = \sqrt{2\gamma \frac{M}{r_1}}$$

Die Masse der Sonde spielt hier keine Rolle.

Für einen Abschuss von der Erde aus ergibt sich:

$$v = \sqrt{2 \cdot 6.673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5.974 \cdot 10^{24} \text{kg}}{6.378 \cdot 10^6 \text{m}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 6.673 \cdot 5.974}{6.378} \cdot 10^{-11+18} \frac{\text{Nm}}{\text{kg}}} = 11.2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

(b) Die Fluchtgeschwindigkeit liegt weit oberhalb der Schallgeschwindigkeit. Abgesehen von der riesigen Beschleunigung, welche in einem realistisch langen Kanonenrohr notwendig wäre, würde ein gewaltiger Luftwiderstand resultieren.

L3.

(a) Steht der Kraftvektor parallel zur Geschwindigkeit, resultiert aus dem Skalarprodukt im Integral:

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}(t)) \bullet \vec{v}(t) dt = \int_C F \cdot v \cdot \cos(0) dt = \int_C F \cdot v(t) dt$$

Wird nun die Geschwindigkeit  $v$  durch die Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit ersetzt, kann das Integral über die Zeit in ein Integral über den Weg ersetzt werden:

$$\int_C F \cdot v dt = \int_C F \cdot \frac{dr}{dt} dt = \int_C F \cdot dr = \int_C dW$$

Somit wird also über alle Arbeitsbeiträge  $dW$  aufintegriert. Betrachtet man nur einen bestimmten Zeitpunkt, lässt man also die Integration weg, resultiert die Definition der Leistung  $P$ :

$$F(\vec{r}(t)) \cdot v = F \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{F \cdot dr}{dt} = \frac{dW}{dt} = P$$

(b) Das Integral kann in eine Summe mit vier Summanden für jede Seite aufgespalten werden:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}(\vec{r}(t)) \bullet \vec{v}(t) dt &= \int_{C1} F \cdot v \cdot \cos(90^\circ) dt + \int_{C2} F \cdot v \cdot \cos(0^\circ) dt \\ &- \int_{C3} F \cdot v \cdot \cos(90^\circ) dt - \int_{C4} F \cdot v \cdot \cos(0^\circ) dt \\ &= 0 + \int_{C2} F \cdot v \cdot \cos(0^\circ) dt - 0 - \int_{C2} F \cdot v \cdot \cos(0^\circ) dt = 0 \end{aligned}$$

Die Minuszeichen ergeben sich durch einen Wechsel von  $180^\circ$  auf  $0^\circ$  resp. Von  $270^\circ$  auf  $90^\circ$ . Die beiden übriggebliebenen Terme sind dem Betrag nach gleich, da mit derselben Kraft die gleich lange Strecke  $C2$  bzw.  $C4$  zurück gelegt wird (jedoch in entgegengesetzter Richtung).

(c) Im Fall einer Kreisbahn steht der Vektor der Gravitationskraft immer senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor: Das Integral wird null, es wird keine Arbeit verrichtet! Bei einer elliptischen Bahn wird das Integral ebenfalls null, dies analog zu (b) aus Symmetriegründen.

## 322 elektrisches Potential &amp; elektrische Spannung

*Theorie*

An dieser Stelle folgt ein Abschnitt zur Elektrostatik. Der Grund dafür ist die mathematische Beschreibung, welche völlig analog zu Gravitationsfeld und Gravitationspotential ist.

Entsprechend dem Gravitationsfeld  $\vec{G} = \vec{F}_G / m$  (Kraft pro Masse) definiert man das elektrische Feld:

*Definition des elektrischen Feldes*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q} \quad (\text{Eq.18})$$

Die Einheit ist Newton pro Coulomb (N/C). Die elektrische Kraft ergibt sich demnach durch die Ladung  $q$  und das elektrische Feld:  $\vec{F}_E = q\vec{E}$ . Im Unterschied zur Gravitation gibt es aber zwei Sorten von Ladungen, positive und negative. Somit treten anziehende und auch abstossende Kräfte auf. Analog zu Eq.16 kann das elektrische Potential definiert werden:

*elektrisches Potential*

$$\varphi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (\text{Eq.19})$$

Hier wurde mit dem Skalarprodukt noch berücksichtigt, dass sowohl das Feld wie auch das Wegelement  $d\vec{r}$  Vektoren sind (was natürlich für die allgemeine Formulierung beim Gravitationspotential auch der Fall ist).

Die elektrische Spannung  $U_{AB}$  zwischen den beiden Punkten A und B ist definiert als Arbeit pro Ladung:  $U_{AB} = W_{AB} / q$ . Sie kann durch das elektrische Potential ausgedrückt werden:

*elektrische Spannung*

$$U_{AB} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = \varphi_A - \varphi_B \quad (\text{Eq.20})$$

Die Definition der elektrischen Spannung vereinfacht die Berechnung von elektrischer Energie und Leistung (SI-Einheit  $Nm/C = V$ , Volt). Entsprechend der Definition der Spannung ist die von einer Ladung verrichteten oder an diese abgegebene Arbeit beim Durchlaufen der Spannung  $U_{AB}$ :

$$W = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = qU_{AB} \quad (\text{Eq.21})$$

Dabei kann  $E_{pot} = q\varphi$  als die potentielle Energie eines geladenen Teilchens im statischen elektrischen Feld betrachtet werden. Die elektrische Leistung ist die Arbeit pro Zeitintervall, also:

*elektrische  
Leistung*

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}[qU] = U \frac{dq}{dt} = UI \quad (\text{Eq.22})$$

Dabei wird angenommen, die Spannung bleibe konstant. Die Grösse Ladung pro Zeit wird als elektrische Stromstärke bezeichnet (SI-Einheit  $C/s = A$ , Ampère).

Die gemachten Definitionen sollen nun für zwei Spezialfälle konkretisiert werden.

Ein erster Spezialfall ergibt sich für das homogene Feld. Als homogenes Feld wird ein Feld bezeichnet, welches an allen Orten die selbe Richtung und Stärke aufweist:  $\vec{E}(\vec{r}) = \text{const.}$ . Ein solches Feld kann sich zwischen zwei parallelen, leitenden Platten (Plattenkondensator) ausbilden (Experiment 1). Die elektrische Feldstärke  $E$  zwischen den Platten ist

*homogenes  
Feld*

wegen  $U = \int_0^d E \cdot ds = E \cdot d$  durch die anliegende Spannung  $U$  und den Plattenabstand  $d$  gegeben:

*Platten-  
kondensator*

$$E = \frac{U}{d} \quad (\text{Eq.23})$$

Die auf den Metallplatten gespeicherte Ladung hängt vom Fassungsvermögen dieser Platten ab, die sogenannte Kapazität  $C$ . Diese Kapazität ist gegeben durch die Fläche  $A$  der Platten, dem Abstand  $d$  und im Vakuum durch die elektrische Feldkonstante  $\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} C^2/(Nm^2)$ :

*Kapazität*

$$C = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \quad (\text{Eq.24})$$

Die SI-Einheit der Kapazität ist Ladung pro elektrische Spannung  $C/V = F$  und wird mit Farad abgekürzt. Die im Kondensator gespeicherte Ladung  $Q$  ist:

*gespeicherte  
Ladung*

$$Q = CU \quad (\text{Eq.25})$$

Die im Kondensator gespeicherte Energie hängt von Spannung und Ladung ab. Gemäss Eq.22 gilt für die Leistung  $P = UI$  und für die Arbeit  $W = QU$ . Bei Entladung (Experiment 2) ändert sich jedoch nicht nur die Ladung, sondern auch die Spannung. Spannung und gespeicherte Ladung sind aber von einander abhängig:  $U = Q/C$ . Die während dem Zeitschritt  $dt$  geleistete Arbeit  $dW$  beträgt  $U \cdot dq = (q/C) \cdot dq$ . Für die bei einer Entladung freigesetzte Energie gilt:

*gespeicherte  
Energie*

$$\begin{aligned} W &= \int dW = \frac{1}{C} \int_0^Q q \cdot dq = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} \\ &= \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 \end{aligned} \quad (\text{Eq.26})$$

Ein zweiter Spezialfall bilden elektrische Felder um Punktladungen oder homogen geladene Kugeloberflächen mit der Ladung  $Q$  (Coulomb-Feld, Experiment 3). Analog zum Gravitationsfeld in Abschnitt 321 ist das Feld radialsymmetrisch und das Potential kann unter Verwendung von Eq.18 und dem Coulom-Gesetz (Abschnitt 222) einfach berechnet werden:

*Coulomb-Feld*

$$\phi(r) = -\int E(r) \cdot dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \quad (\text{Eq.27})$$

Für die elektrische Spannung gilt:

$$U_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[ \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right] = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[ \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right] \quad (\text{Eq.28})$$



### Experiment 1

Wenn zwei elektrisch leitenden Platten mit Ladungen unterschiedlichen Vorzeichens aufgeladen werden, bildet sich zwischen diesen ein elektrisches Feld aus. Im Falle von grossen, ebenen Platten ist dieses Feld zwischen den Platten homogen, d.h. Feldstärke und Richtung sind ortsunabhängig bzw. konstant (Fig.7).

*Experiment zum homogenen Feld*

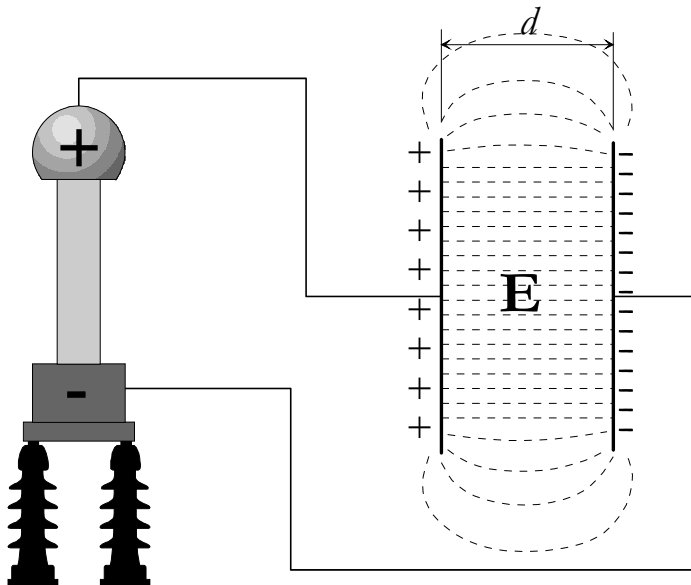


Fig.7. Feld zwischen zwei leitenden Platten.

### Experiment 2

Die in einem Kondensator gespeicherte Energie wird bei der Entladung freigesetzt. Je höher die Spannung, desto mehr Energie steht zur Verfügung. Diese kann bei Hochspannung als Blitzentladung eindrücklich sichtbar gemacht werden. Dafür wird ein Hochspannungskondensator mit einem Van der Graff – Generator oder einer Influenzmaschine (Fig.8) aufgeladen. Wird ein bestimmter Spannungswert überschritten, so entlädt sich der Kondensator über eine Funkenstrecke.

*Experiment zur Energie des geladenen Kondensators*

*Influenz-  
Maschine*

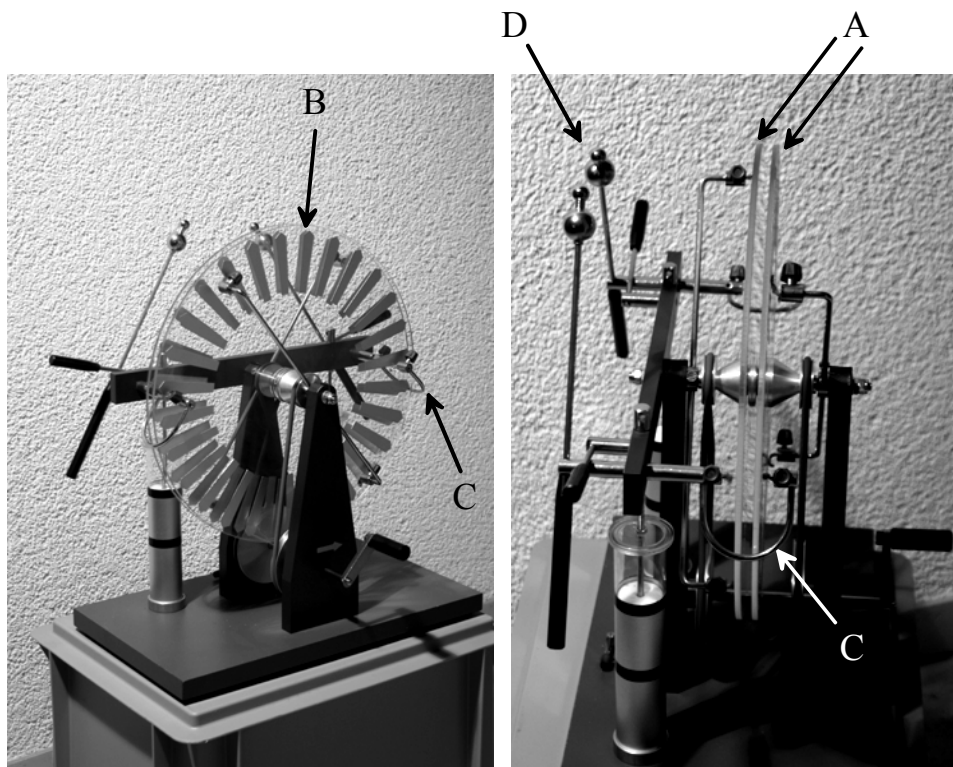


Fig.8. Influenz-Maschine: Auf zwei sich in Gegenrichtung drehenden Plexiglasscheiben (A) sind Streifen aus Alu-Folie (B) aufgeklebt. Initial werden durch Kupferbesen elektrische Ladungen auf die Folien gebracht. Befinden sich auf der einen Seite positive Ladungen, so ziehen diese auf der Gegenseite (Folie auf der anderen Scheibe) wegen dem von ihnen aus-gehenden elektrischen Feld negative Ladungen an (Influenz-Effekt). Durch die entgegen gesetzte Drehrichtung der beiden Plexiglasscheiben werden die Ladungen getrennt. Über metallische Bügel (C) werden die Ladungen abgegriffen und zu einer Funkenstrecke (D) geleitet. Die Spannung über den Polen beträgt bis zu 160 kV.

*Experiment 3*

Die radiale Symmetrie des Coulomb-Feldes lässt sich mit einem Van der Graaf – Generator schön zeigen. Bewegliche Fäden laden sich an der Oberfläche einer Konduktorkugel auf und werden radial abgestossen.

*Experiment  
zum Coulomb-  
Feld*

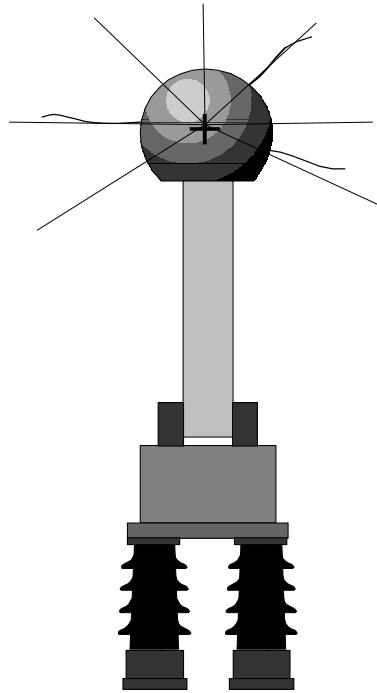


Fig.9. Experiment zur radialen Symmetrie des Coulomb-Feldes. Die Ladungsverteilung auf der Konduktorkugel muss homogen sein. Flächen gleichen Potentials sind Kugelflächen.

### Aufgaben

A1. Auf einer metallischen Kugel mit einem Radius  $r = 5 \text{ cm}$  befinde sich die Ladung  $Q = 12 \mu\text{C}$ .

- a) Welche elektrische Spannung herrscht zwischen Kugeloberfläche und einem Punkt in 2 m Entfernung?
- b) Welche Ladung müsste auf die Kugel gebracht werden, damit die Spannung zwischen Oberfläche und der 5 m entfernten Umgebung 1 MV beträgt?

A2. Welche Geschwindigkeit würde ein Proton im Vakuum maximal erreichen, welches von der Oberfläche der mit  $+20 \mu\text{C}$  geladenen Konkurrentkugel mit einem Radius von 10 cm eines Bandgenerators abgestossen würde?

A3. Ein geladenes Teilchen durchläuft in x-Richtung ein sich änderndes elektrisches Feld  $E(x) = b \cdot x^{2/3}$ . Welche kinetische Energie gewinnt oder verliert das Teilchen, wenn es sich von  $x = 0$  bis  $x = a$  bewegt hat?

A4. Ein Elektroauto mit einer Masse von 300 kg soll seine Energie aus einem Kondensator beziehen. Dieser habe eine Kapazität von 700 F. Die am Kondensator anliegende Spannung beim Laden betrage 24 V. Welche maximale Geschwindigkeit könnte damit das Elektroauto erreichen?

A5. Die Energiedichte des elektrischen Feldes im Vakuum ist gegeben durch:

$$w_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Zeigen Sie ausgehend von Eq.26, dass für die Kapazität gilt:  $C = \epsilon \frac{A}{d}$ .

A6. Gegeben sei das elektrische Feld  $\vec{E} = (kx, 0, E_z)$  mit  $E_z = \text{konstant}$ . Berechnen Sie die Arbeit, wenn die Ladung  $q$  (a) entlang der x-Achse von 0 m bis  $x$  m und (b) entlang der z-Achse von 0 m bis  $z$  m verschoben wird.

## Lösungen

L1.

$$(a) U_{AB} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{1}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[ \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right] \approx \underline{2.1MV}$$

$$(b) Q = \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot U_{AB}}{\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}} = \underline{5.6\mu C}$$

L2.

$$E_{kin} = E_{pot} \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = q[\varphi_A - \varphi_B] = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[ \frac{1}{r_A} \right]$$

$$v = \sqrt{\frac{2qQ}{4\pi\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{r_A}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} C \cdot 20 \cdot 10^{-6} C}{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} As/(Vm) \cdot 1.6 \cdot 10^{-27} kg} \cdot \frac{1}{0.1m}}$$

$$= \underline{1.897 \cdot 10^7 m/s}$$

L3.

$$E_{kin} = W = \int_0^a F(x) \cdot dx = q \int_0^a E(x) \cdot dx = qb \int_0^a x^{2/3} dx$$

$$= \left[ \frac{3bq}{5} \cdot x^{5/3} \right]_0^a = \frac{3bq}{5} \cdot a^{5/3}$$

L4.

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}CU^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{CU^2}{m}} = \underline{36.7m/s}$$

$$L5. \frac{CU^2}{2} = \frac{w_E \cdot V}{2} \rightarrow C = \frac{\epsilon_0 \cdot E^2 \cdot V}{U^2} = \epsilon_0 \cdot \frac{V}{d^2} = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

$$L6. (a) W = q \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = q \int kx \cdot dx = \frac{qk}{2} \cdot x^2$$

$$(b) W = q \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = q \int E_z \cdot dz = qE_z \cdot z$$

## 323 Rechnen mit Potentialen

*Theorie*

In Abschnitt 322 führte der Begriff des Potentials zur skalaren Grösse der elektrischen Spannung. Für viele praktische Anwendungen ist das Rechnen mit der elektrischen Spannung vorteilhaft. Auch in der Mechanik vereinfachen skalare Grössen unter Umständen sehr. Am Schluss dieses Kapitels soll deshalb aufgezeigt werden, wie mit Potentialen in der Mechanik gerechnet werden kann.

Das Potential  $V(\vec{r}) = V(x, y, z)$  ist eine skalare Grösse. Gegenüber den vektoriellen Kraftfeldern  $(\vec{G}(\vec{r}), \vec{E}(\vec{r}))$  hat dies den Vorteil, dass bei Überlagerung von Potentialen nicht vektoriell addiert werden muss. Bei Existenz verschiedener Potentiale  $V_1(\vec{r})$  und  $V_2(\vec{r})$  ist das resultierende Potential die Superposition beider Potentiale, also:

*Superposition  
von  
Potentialen*

$$V(\vec{r}) = V_1(\vec{r}) + V_2(\vec{r}) \quad (\text{Eq.29})$$

Das entsprechende Kraftfeld kann aber aus dem Potentialfeld berechnet werden. Dafür muss das Potential nach den Raumrichtungen abgeleitet werden. Die einzelnen Komponenten des Kraftfeldvektors (Gravitationsfeldvektors) sind gegeben durch:

*Kraftfelder*

$$\begin{aligned} G_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} ; G_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ G_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{Eq.30})$$

Für diese räumlichen Ableitungen wird folgende Kurzschreibweise eingeführt:

*Gradient  
Nabla-  
Operator*

$$\vec{G} = -\nabla V = -\text{grad}V \quad (\text{Eq.31})$$

Die Abkürzung *grad* steht für Gradient. Der Nabla-Operator  $\nabla$  ist ein Vektor, dessen einzelne Vektorkomponenten die räumlichen Ableitungen beinhalten:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \quad (\text{Eq.32})$$

mit  $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$  bzw.  $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$  etc..

Wird dieser Operator auf eine skalare Funktion angewendet, so entsteht ein Vektorfeld. Die Gravitationskraft ist gegeben durch:  $\vec{F} = m\vec{G} = -m\nabla V$

Ein Vorteil von Potentialen besteht darin, dass physikalische Probleme über eine Energiebetrachtung gelöst werden können. An dieser Stelle sei anhand eines ganz einfachen Beispiels aufgezeigt, wie mittels eines zur Newtonschen Mechanik alternativen Ansatzes mechanische Probleme angegangen werden können. Dieser Ansatz wird Lagrange-Mechanik genannt.

Als einfaches Beispiel dient hier die Atwoodsche Fallmaschine (Fig.10).

*Lagrange-Mechanik*

*Atwoodsche Fallmaschine*

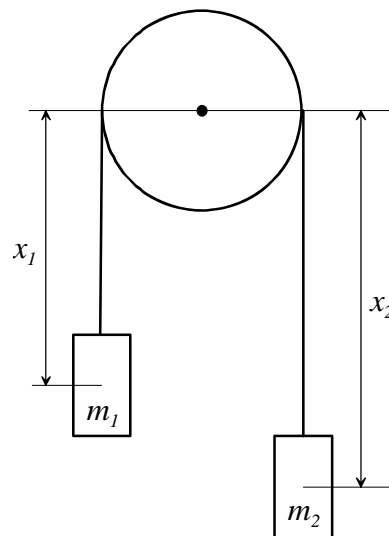


Fig.10. Atwoodsche Fallmaschine.

Gemäss Newtonscher Mechanik können die Kräfte im System betrachtet werden. Für die Beschleunigung  $\ddot{x}_1$  der Massen  $m_1$  und  $m_2$  gilt:

$$(m_1 + m_2) \cdot \ddot{x}_1 = m_1 g - m_2 g \quad (\text{Eq.33})$$

und somit:

$$\ddot{x}_1 = \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g \quad (\text{Eq.34})$$

Die Lagrange-Mechanik betrachtet die Energie im System. Dabei wird die sogenannte Lagrange-Funktion definiert:

*Lagrange-Funktion*

$$L(\vec{\zeta}, \dot{\vec{\zeta}}, t) = E_{kin} - E_{pot} \quad (\text{Eq.35})$$

Dabei sind die Komponenten des Vektors  $\vec{\zeta}$  sogenannte generalisierte Koordinaten. Dies sind nicht zwingend Längen, müssen aber das System eindeutig beschreiben und von einander unabhängig sein. Die zeitlichen Ableitungen

*generalisiert  
Koordinaten*

$$\frac{d}{dt} \vec{\zeta} = \frac{d\zeta_i}{dt} = \dot{\zeta}_i$$

sind dem entsprechend die generalisierten Geschwindigkeiten. Die Lagrange-Funktion (Eq.35) erfüllt nun die folgende Bedingung (Lagrange-Gleichung 2.Art):

*Lagrange-Gleichungen*

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial \zeta_i} = 0 \quad (\text{Eq.36})$$

Für das Beispiel der Atwoodschen Fallmaschine bietet sich für  $\vec{\zeta}$  die folgende Wahl an:  $\zeta = x_1$ . Die Koordinate  $x_2$  ist bestimmt durch die Zwangsbedingung  $x_1 + x_2 = l$ , also  $x_2 = l - \zeta$ . Für die Lagrange-Funktion muss nun die kinetische und potentielle Energie berechnet werden. Für die kinetische Energie gilt:

*Lagrange-Funktion für die Atwoodsche Fallmaschine*



$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot \dot{\zeta}^2$$

Und für die potentielle Energie:

$$E_{pot} = -m_1 g \cdot x_1 - m_2 g \cdot x_2 = -m_1 g \cdot \zeta - m_2 g \cdot (l - \zeta)$$

Somit ergibt sich für die Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\zeta}^2 + (m_1 - m_2) g \cdot \zeta + m_2 g l \quad (\text{Eq.37})$$

Für das Einsetzen in Eq.36 muss nun die Lagrange-Funktion abgeleitet werden:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}} \right] = \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2) \cdot \dot{\zeta}] = (m_1 + m_2) \cdot \ddot{\zeta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \zeta} = (m_1 - m_2) g$$

Eingesetzt in Eq.36 ergibt dies:

$$(m_1 + m_2) \cdot \ddot{\zeta} - (m_1 - m_2) \cdot g = 0 \quad (\text{Eq.38})$$

Dies führt auf das genau gleiche Resultat (gebremster Fall) wie Eq.33. Natürlich ist für das einfache Beispiel der Atwoodschen Fallmaschine der Weg über die Lagrange-Mechanik verglichen mit der Newtonschen Mechanik unnötig kompliziert. Jedoch gibt es unzählige physikalische Probleme, bei denen der Zugang mittels Newtonscher Mechanik unmöglich ist.

Besonders günstig erweist sich die Erweiterung auf die Hamilton-Mechanik in Bezug auf die Quantenmechanik (Kapitel 900).

*Vorteil der  
Lagrange-  
Mechanik*

### Aufgaben

A1. Gegeben sei ein Potentialfeld  $V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ .

- Berechnen Sie das korrespondierende Kraftfeld.
- Für welche Koeffizienten  $a$ ,  $b$  und  $c$  sind die Flächen gleichen Potentials Kugelflächen?

A2. Eine Punktmasse  $m$  habe zu einer grossen Punktmasse  $M_1$  den Abstand  $r_1$  und zu einer anderen grossen Punktmasse  $M_2$  den Abstand  $r_2$ .

- Wie gross ist das Potential an der Stelle von  $m$ .
- Welche potentielle Energie hat  $m$ .

A3. Gegeben seien die Potentialfelder  $V_1(x, y) = \alpha_1 x + \beta_1 y$  und  $V_2 = \alpha_2 x^2 + \beta_2 y^2$ .

- Berechnen Sie das resultierende Potential.
- Berechnen Sie das resultierende Kraftfeld.

A4. Eine Ladung  $q$  mit der Masse  $m$  befinde sich in einem Potentialfeld  $\varphi(x) = \varphi_0 \cdot \cos(kx)$ .

- Berechnen Sie die elektrische Kraft, welche am Ort  $x$  auf die Ladung wirkt.
- Stellen Sie für die Ladung im Potentialfeld die Lagrange-Gleichung auf und Berechnen Sie die Beschleunigung.

A5. Folgendes Integral beschreibt die Arbeit über den Weg  $C$  (s. 321, A3):

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}(t)) \bullet \vec{v}(t) dt = \int_C \vec{F}(\vec{r}(t)) \bullet \dot{\vec{r}}(t) dt$$

Dabei sei  $\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{r})$  eine vom Ortsvektor  $\mathbf{r}$  abhängige Kraft.

Berechnen Sie dieses Integral für einen geschlossenen Pfad für ein Gravitationspotential  $V$ , und zwar (a) allgemein bzw. formal sowie (b) für  $V(x, y, z) = gz + c$  (mit  $g$  und  $c = \text{const.}$ ).

## Lösungen

L1.

(a)  $\vec{G} = -\text{grad}V$

$$G_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}[ax^2 + by^2 + cz^2] = -2ax$$

$$G_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}[ax^2 + by^2 + cz^2] = -2by \quad \vec{G} = -\begin{pmatrix} 2ax \\ 2by \\ 2cz \end{pmatrix}$$

$$G_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}[ax^2 + by^2 + cz^2] = -2cz$$

(b)  $a = b = c$

L2.

(a)  $V = V_1 + V_2 = -\gamma \frac{M_1}{r_1} - \gamma \frac{M_2}{r_2}$

(b)  $E_{pot} = mV = -\gamma \frac{mM_1}{r_1} - \gamma \frac{mM_2}{r_2}$

L3.

(a)  $V(x, y) = V_1(x, y) + V_2(x, y) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \beta_1 y + \beta_2 y^2$

(b)

$$G_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\alpha_1 - 2\alpha_2 x$$

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 - 2\alpha_2 x \\ -\beta_1 - 2\beta_2 y \end{pmatrix}$$

$$G_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\beta_1 - 2\beta_2 y$$

L4.

$$(a) F = qE = -q \frac{d\varphi}{dx} = q\varphi_0 \cdot k \cdot \sin(kx)$$

$$(b) L(\zeta, \dot{\zeta}, t) = E_{kin} - E_{pot} \quad \text{mit } \zeta = x$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\zeta}^2 - q\varphi(\zeta) = \frac{1}{2} m \dot{\zeta}^2 - q\varphi_0 \cdot \cos(k\zeta)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}} \right] = \frac{d}{dt} [m \dot{\zeta}] = m \ddot{\zeta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \zeta} = q\varphi_0 \cdot k \cdot \sin(k\zeta)$$

Lagrange-Gleichung:

$$m \ddot{\zeta} - q\varphi_0 \cdot k \cdot \sin(k\zeta) = 0$$

$$\ddot{\zeta} = \frac{q\varphi_0 \cdot k}{m} \cdot \sin(k\zeta) = \frac{F}{m}$$

Dies entspricht dem Resultat der Newtonschen Mechanik: Die Kraft von Teilaufgabe (a) durch die Teilchenmasse dividiert ergibt die Beschleunigung.

L5.

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{v}(t) dt = \int_C -m\vec{G}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{v}(t) dt = \int_C -m\nabla V(\vec{r}(t)) \cdot \vec{v}(t) dt$$

(a)

$$= -m \int_C \nabla V \cdot \vec{v} dt = -m \int_C \left( \frac{\partial V}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot v_z \right) dt$$

$$(b) -m \int_C \left( \frac{\partial V}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot v_z \right) dt = -m \int_C (g \cdot v_z) dt = -mg \int_C v_z dt = 0$$

da Weg (Pfad) geschlossen ist (und sofern keine weitere Arbeit verrichtet wird, z.B. durch Antrieb / Triewerk).