

## **800** Elektrodynamik

810 *Materie im elektrischen Feld*

820 *Schaltungen im Gleichstromkreis*

830 *Geladene Teilchen im Magnetfeld*

840 *Induktivitäten und Kapazitäten im Wechselstromkreis*

850 *elektromagnetische Feldgleichungen*

um was geht es?

Feldbegriff

neues Feld:  $B$ - Feld

Zusammenspiel von  $E$ - und  $B$ - Feld

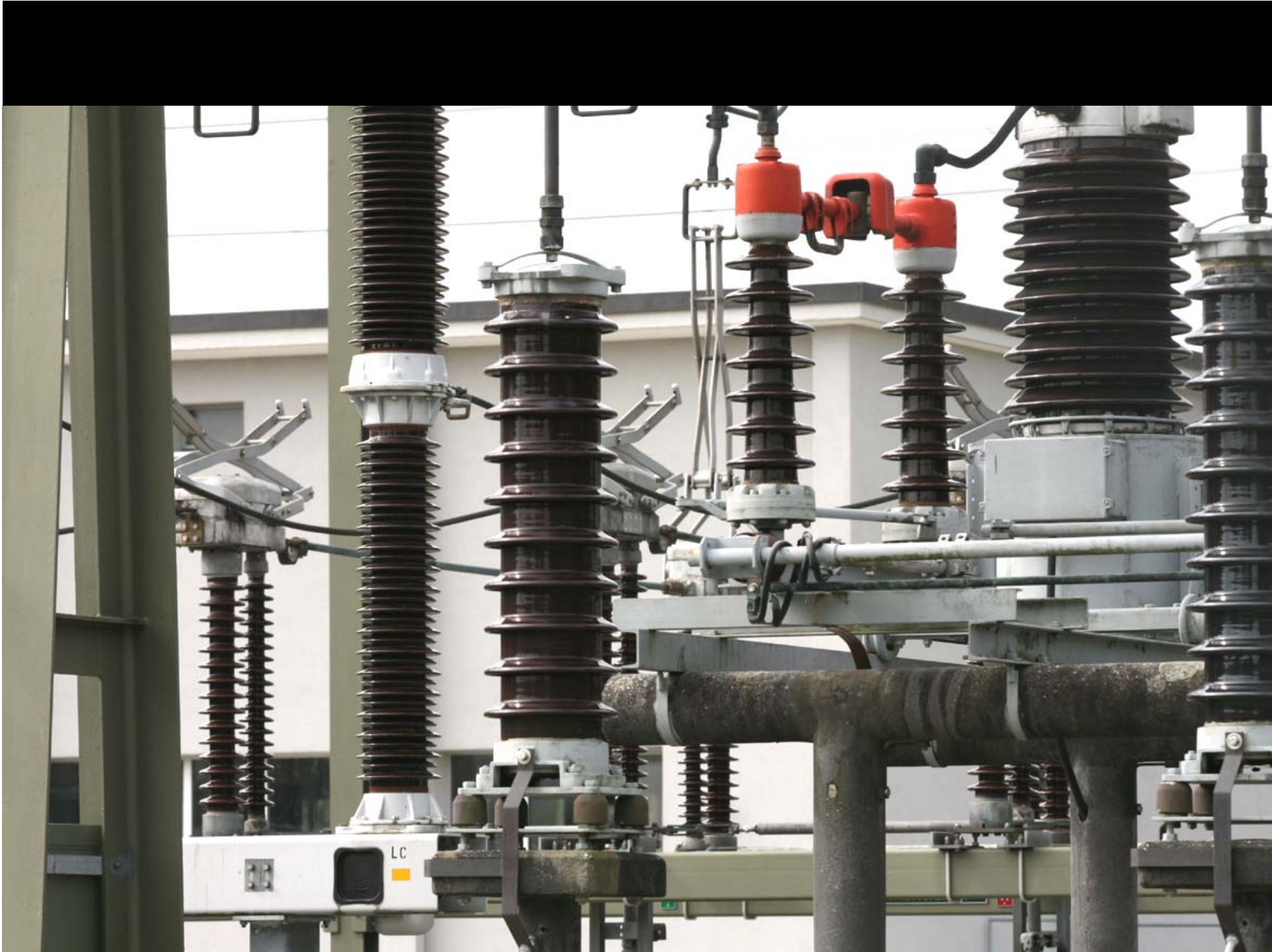
elektromagnetische Induktion

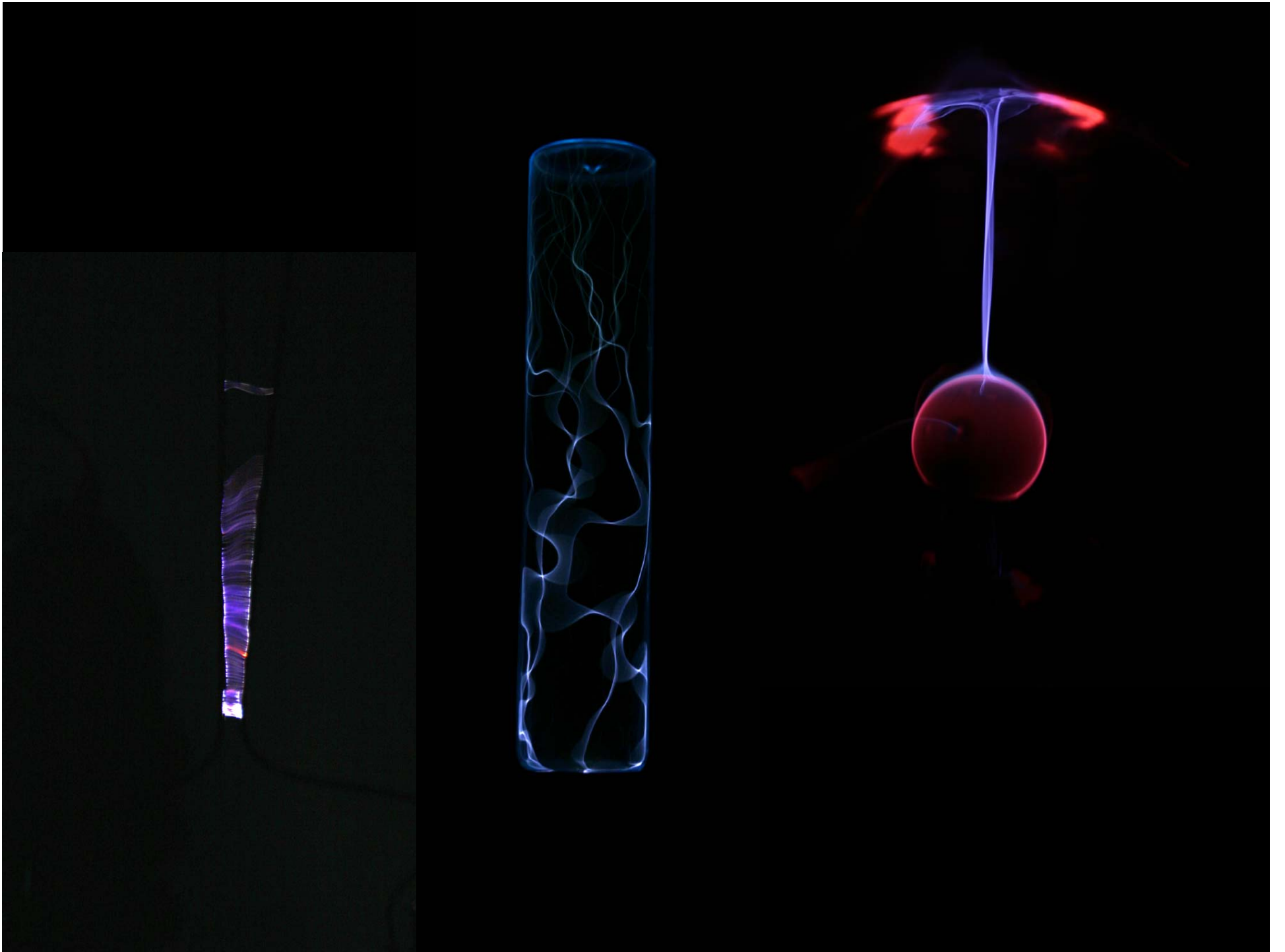
elektromagnetische Feldgleichungen

elektromagnetische Wellen

elektrische Schaltungen mit

Wechselspannung / Wechselstrom





# 811 elektrische Grundgrößen

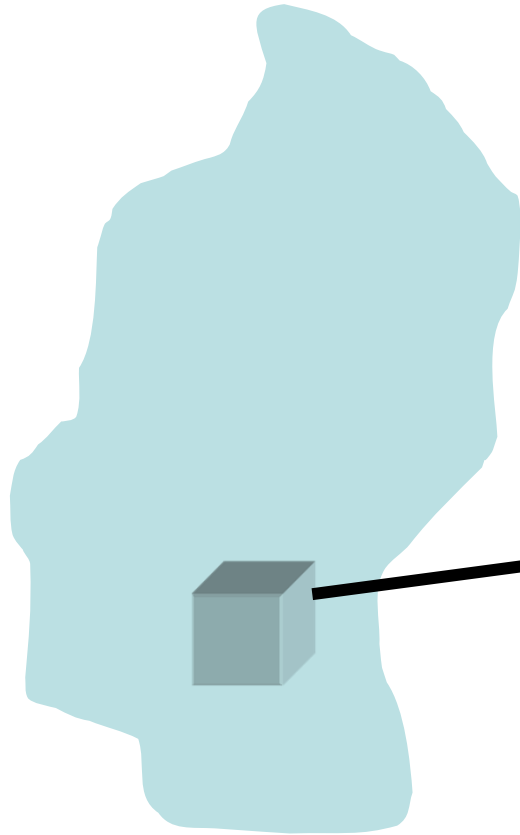


## 811 Ziele

- Grundgrößen der Elektrizität definieren und anwenden können
- elektrische Felder und Potentiale berechnen können

## 811 Theorie

elektrische Ladung  $q, Q$   
und Ladungsdichte

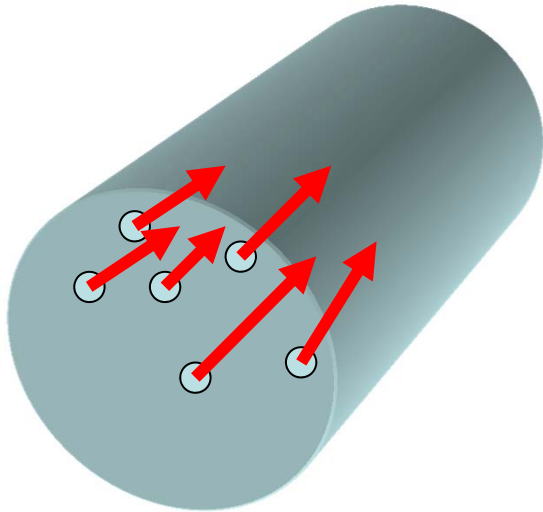


$$\rho = \frac{dQ}{dV}$$

$$Q = \int_V \rho(\vec{r}) \cdot d^3 r$$

## 811 Theorie

elektrischer Strom  $q, Q$   
und Stromdichte



$$\vec{j} = nq\vec{v}$$

$$I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{a}$$

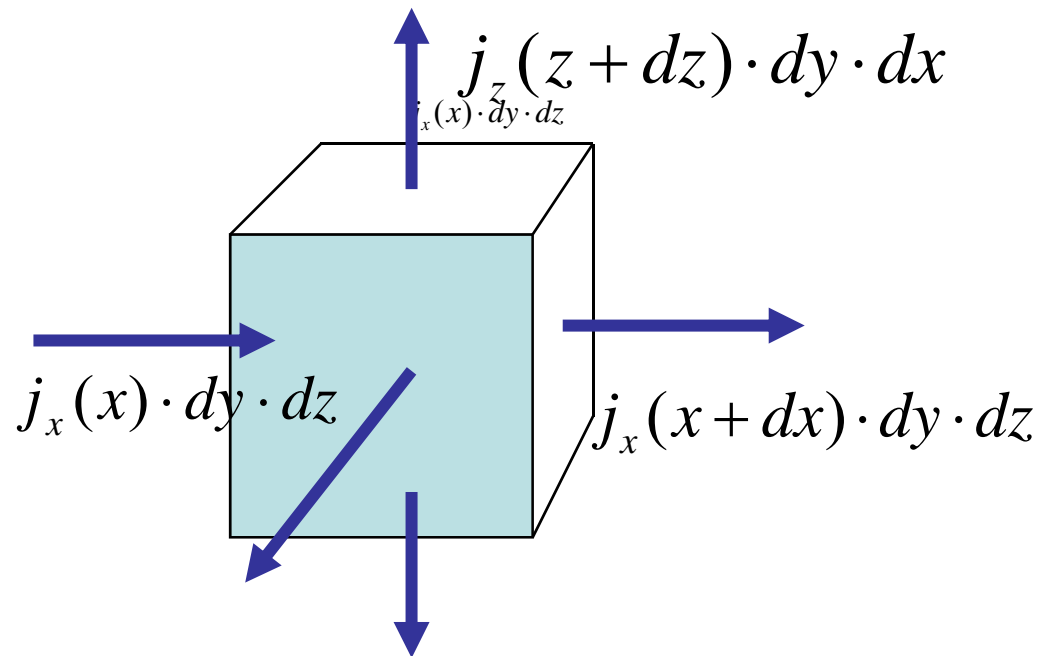


## 811 Theorie

Divergenz der Stromdichte

(741)

$$\vec{j} = nq\vec{v}$$

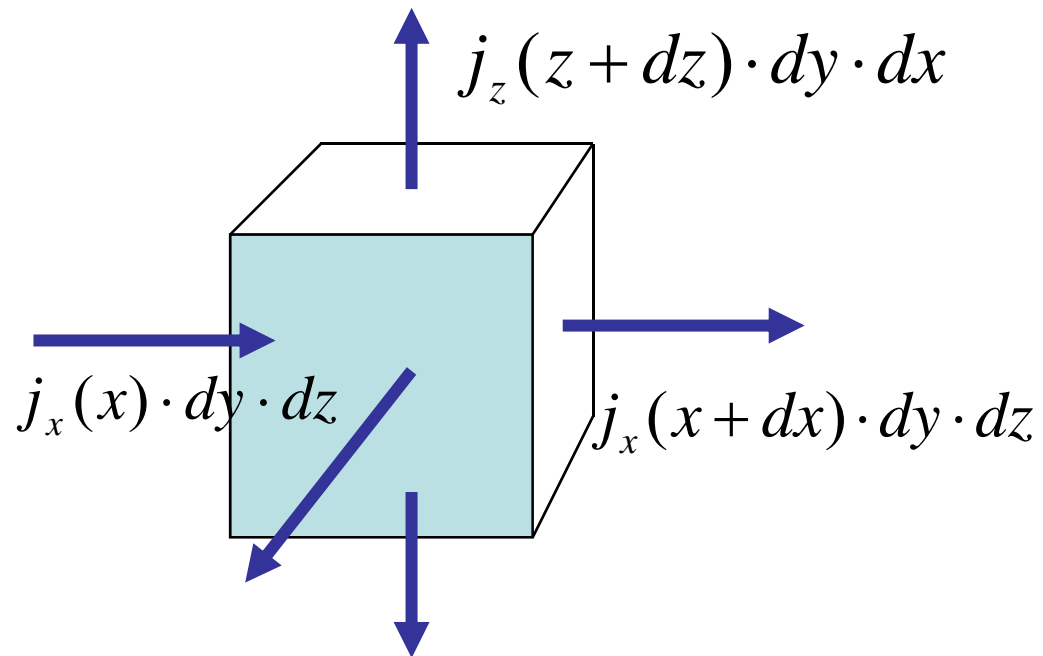


$$\begin{aligned} & j_x(x+dx) - j_x(x) \\ &= \left( \frac{\partial j_x}{\partial x} \right) \cdot dx \end{aligned}$$

# 811 Theorie

## Divergenz der Stromdichte

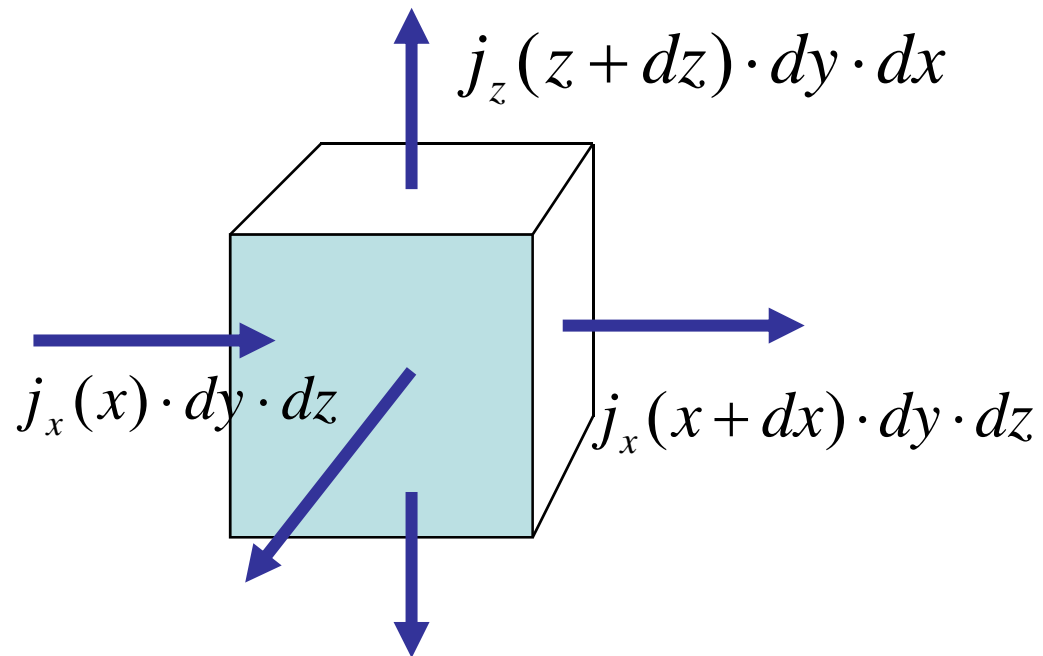
$$\vec{j} = nq\vec{v}$$



$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{j}) &= \nabla \cdot \vec{j} \\ &= \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}\end{aligned}$$

# 811 Theorie

## Kontinuitätsgleichung

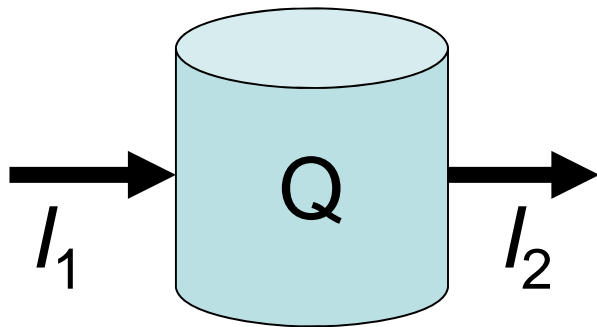


$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

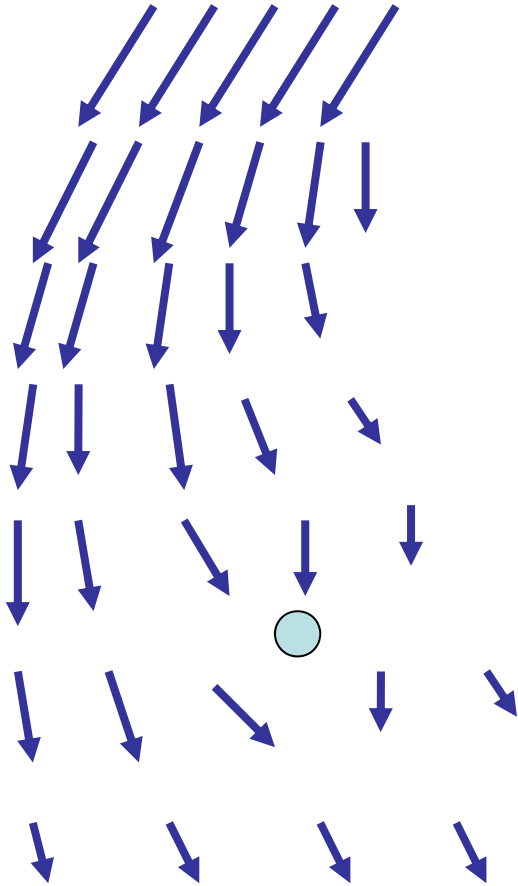
## 811 Theorie

Kontinuitätsgleichung: Wenn im betrachteten infinitesimalen Volumen keine Ladung entsteht, gilt Ladungserhaltung – die Abnahme der Ladungsdichte muss also gleich der Stromdichtebilanz sein!



# 811 Theorie

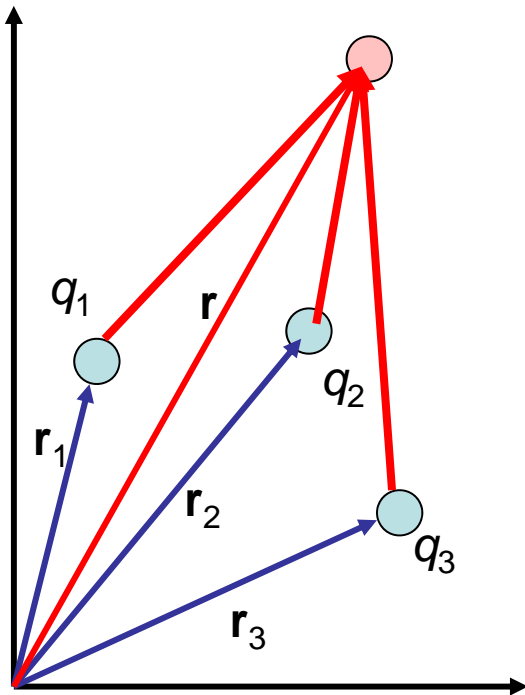
elektrisches Feld



$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \left( \frac{\vec{F}_E}{q} \right)$$

## 811 Theorie

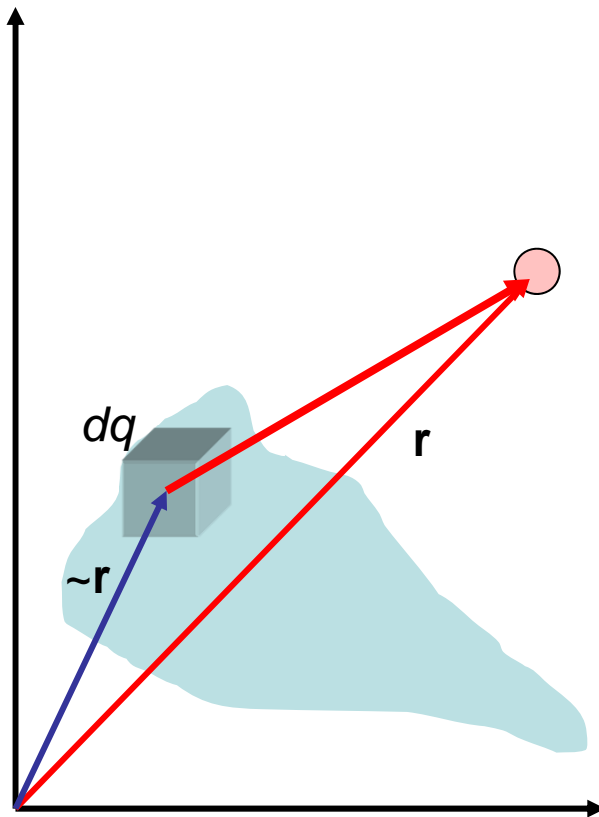
elektrisches Feld als Summe  
(Superposition) von Coulomb-  
Feldern



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n \left[ q_i \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \right]$$

## 811 Theorie

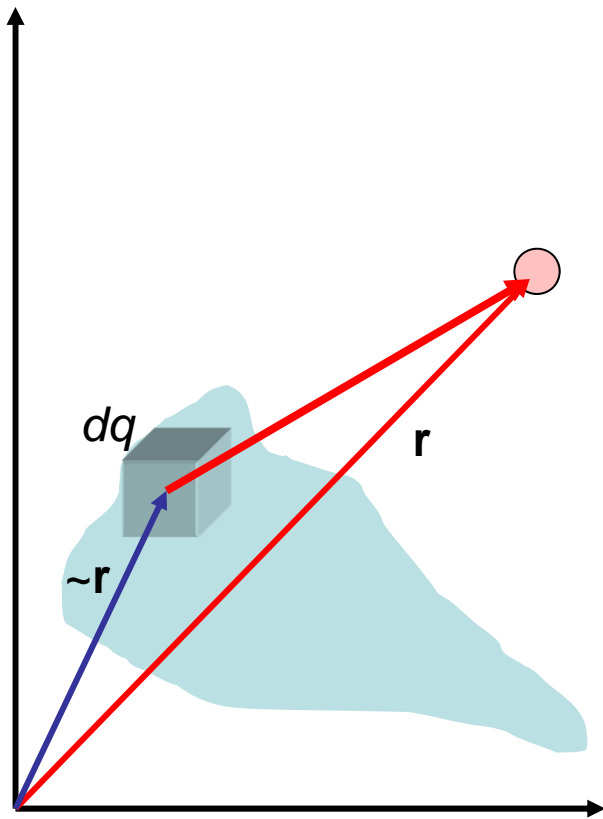
elektrisches Feld als Summe  
(Superposition) von Coulomb-  
Feldern: Kontinuierliche  
Variante (Integration)



$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{\tilde{r}}}{|\vec{r} - \vec{\tilde{r}}|^3} \cdot dq$$

## 811 Theorie

elektrisches Feld als Summe  
(Superposition) von Coulomb-  
Feldern: Kontinuierliche  
Variante (Integration)



$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}|^3} \cdot dq$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int \rho(\vec{r}) \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}|^3} d^3\vec{r}$$



$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \varphi(\vec{r})$$

## 811 Theorie

Elektrisches Feld und  
elektrisches Potential (323)

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \varphi(\vec{r})$$

## 811 Theorie

Elektrisches Feld und  
elektrisches Potential (323)

$$\nabla \varphi(\vec{r}) =$$

# 811 Theorie

## Elektrisches Feld und elektrisches Potential (323)

$$\nabla \varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right] \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right] \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right] \end{array} \right)$$

# 811 Theorie

## Elektrisches Feld und elektrisches Potential (323)

$$\nabla \varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right] \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right] \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right] \end{pmatrix} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{x}{r^3} \\ \frac{y}{r^3} \\ \frac{z}{r^3} \end{pmatrix}$$

## 811 Theorie

### Elektrisches Feld und elektrisches Potential (323)

$$\nabla \varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right] \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right] \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right] \end{array} \right) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \begin{array}{c} \frac{x}{r^3} \\ \frac{y}{r^3} \\ \frac{z}{r^3} \end{array} \right) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

# 812 Das Dielektrikum

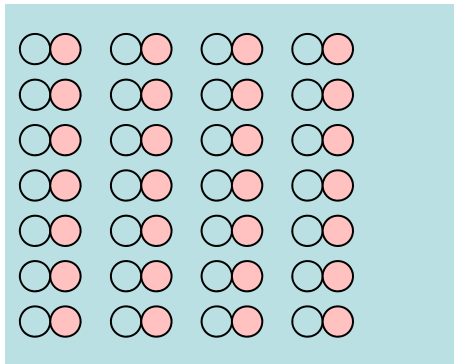


## 812 Ziele

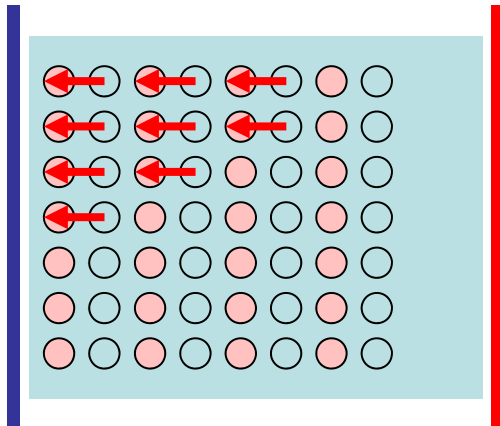
- Einfluss eines Dielektrikums auf das elektrische Feld beschreiben und berechnen können

# 812 Theorie

elektrische Polarisation



$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$$

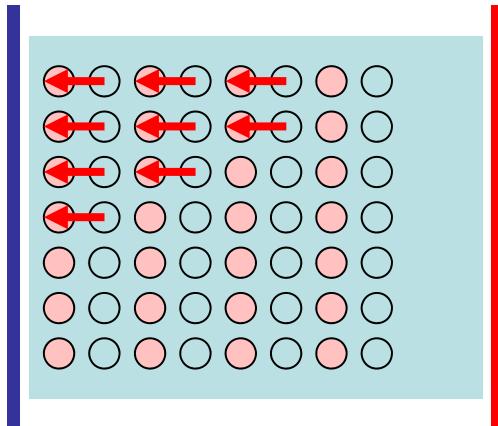
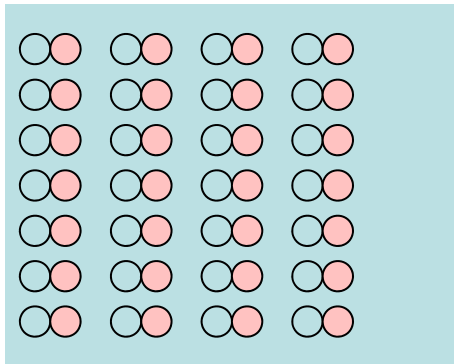


$$\varepsilon_r = 1 + \chi$$



# 812 Theorie

elektrische Polarisation



$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\varepsilon_r = 1 + \chi$$

$$\vec{P} = (\varepsilon_r - 1) \cdot \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\rightarrow \vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$$

# 812 Theorie

## Potential

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \quad \longrightarrow \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$$

## 812 Theorie

Kondensatoren (Zylinder,  
Platten) mit Dielektrikum:  
Kapazität  $C$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 \cdot l}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}$$



$$C = \frac{2\pi\varepsilon \cdot l}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}$$

$$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$



$$C = \varepsilon \cdot \frac{A}{d}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$$

## 812 Theorie

Energiedichte des  
elektrischen Feldes:

$$w_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot E^2 \quad \longrightarrow \quad w_E = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot E^2$$

# **821 Serie- und Parallelschaltungen von Kondensatoren**



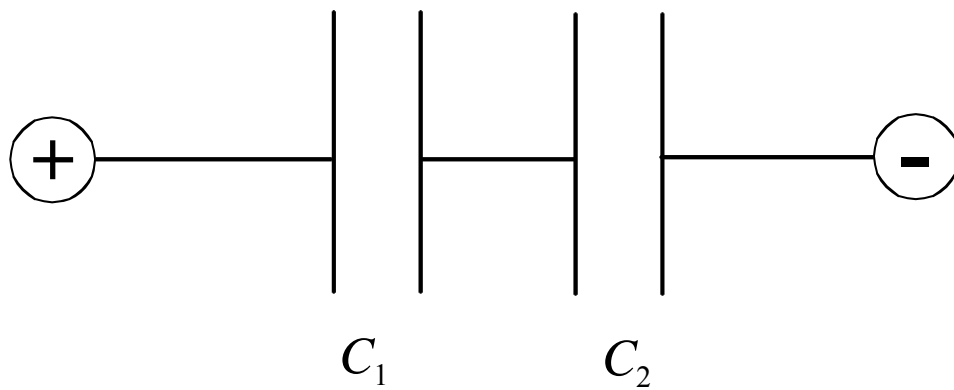
## 821 Ziele

- Kapazitäten in Parallel- und Serieschaltungen berechnen können
- Die Entladung eines Kondensators modellieren und simulieren können

# 821 Theorie

## Serieschaltung

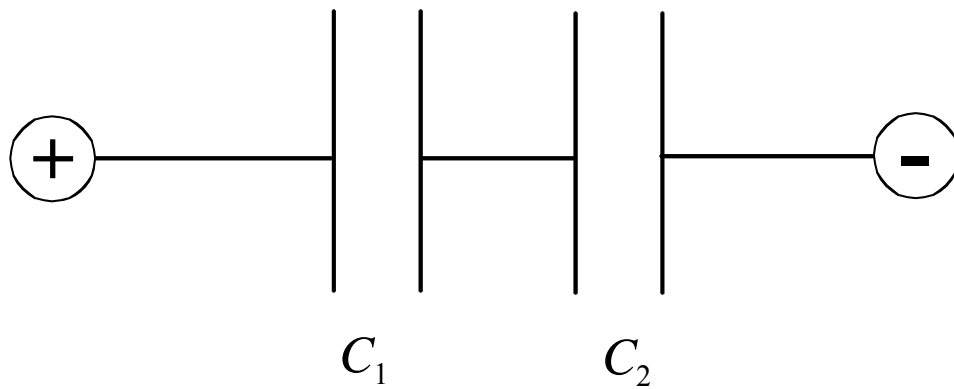
$$C = \varepsilon \cdot \frac{A}{d} = \varepsilon \cdot \frac{A}{d_1 + d_2}$$



# 821 Theorie

## Serieschaltung

$$C = \varepsilon \cdot \frac{A}{d} = \varepsilon \cdot \frac{A}{d_1 + d_2} = \left( \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \right)$$



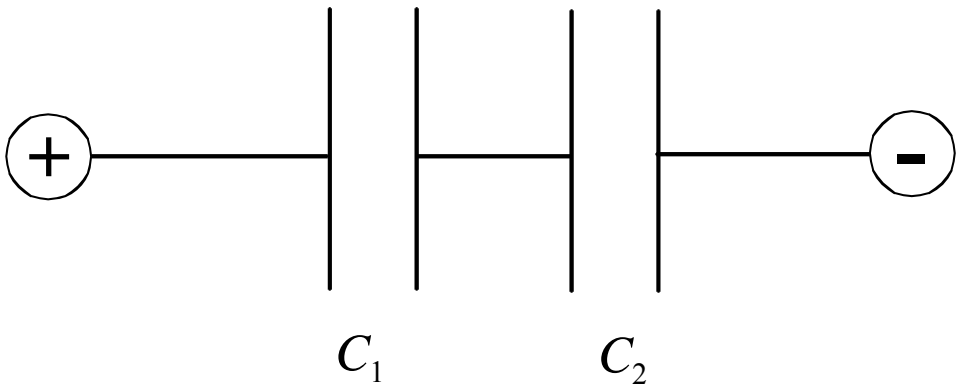


$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

# 821 Theorie

## Serieschaltung

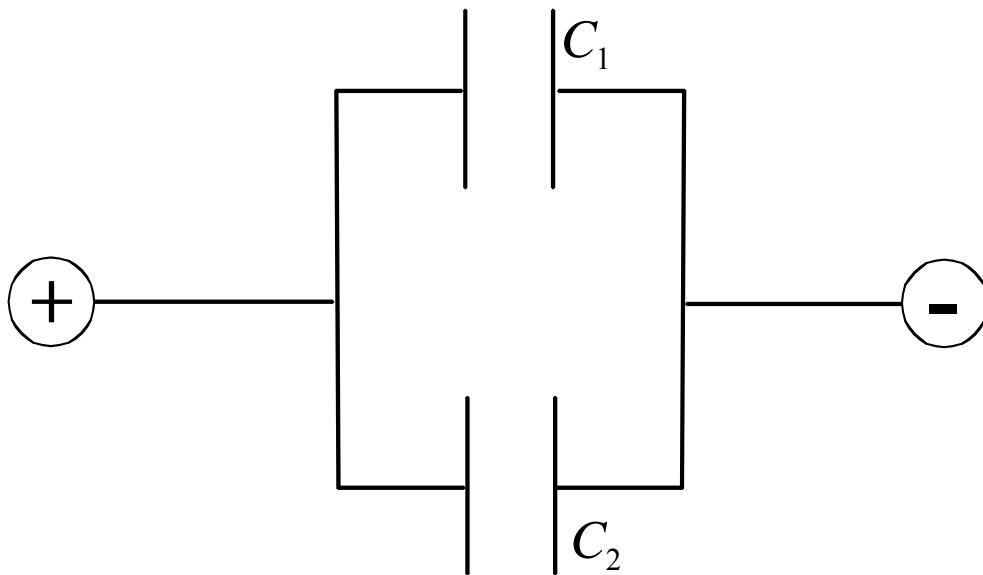
$$C = \varepsilon \cdot \frac{A}{d} = \varepsilon \cdot \frac{A}{d_1 + d_2} = \left( \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \right)$$



# 821 Theorie

## Parallelschaltung

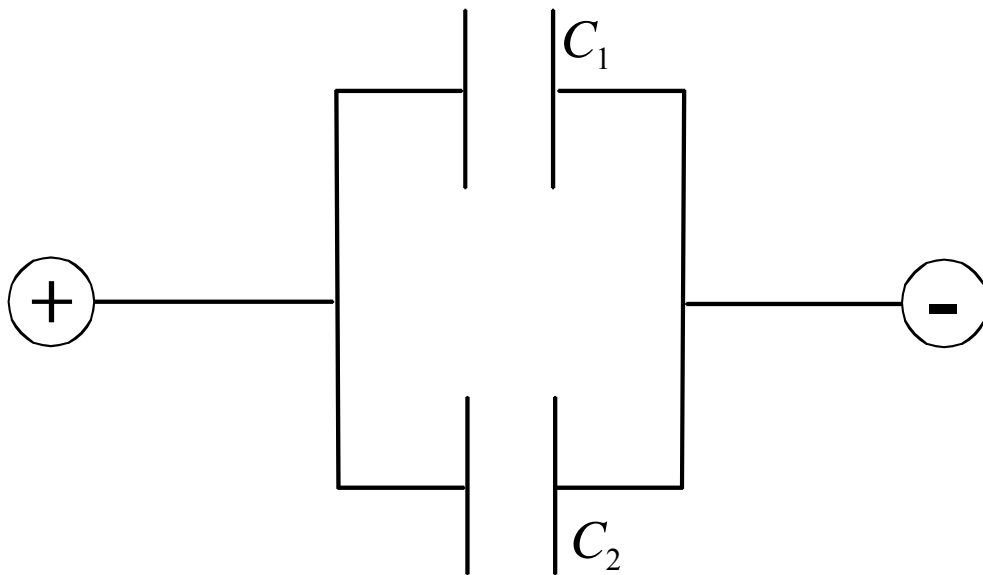
$$C = \varepsilon \frac{A}{d} = \varepsilon \cdot \frac{A_1 + A_2}{d}$$



# 821 Theorie

## Parallelschaltung

$$C = \varepsilon \frac{A}{d} = \varepsilon \cdot \frac{A_1 + A_2}{d} = C_1 + C_2$$

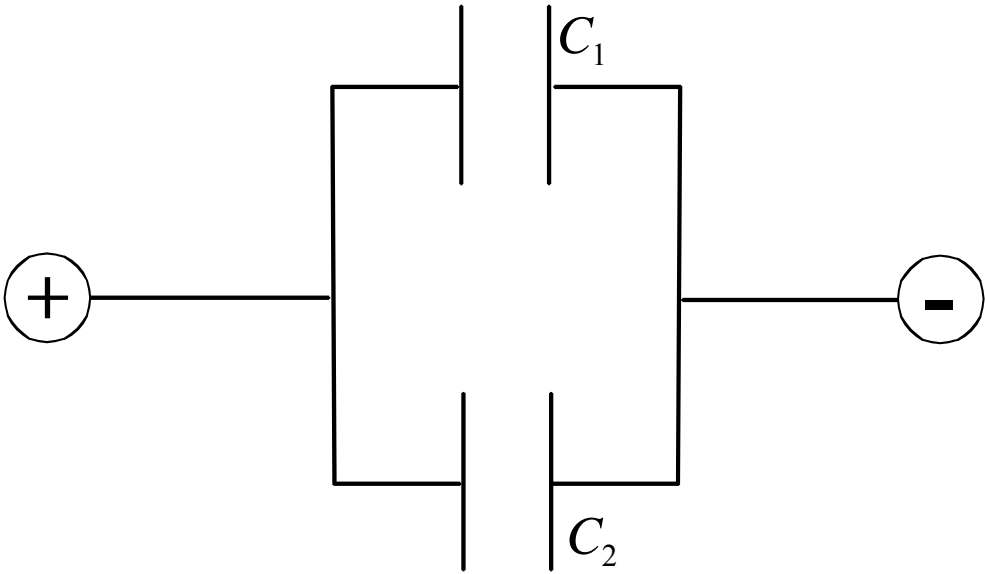


$$C = \sum_i C_i$$

## 821 Theorie

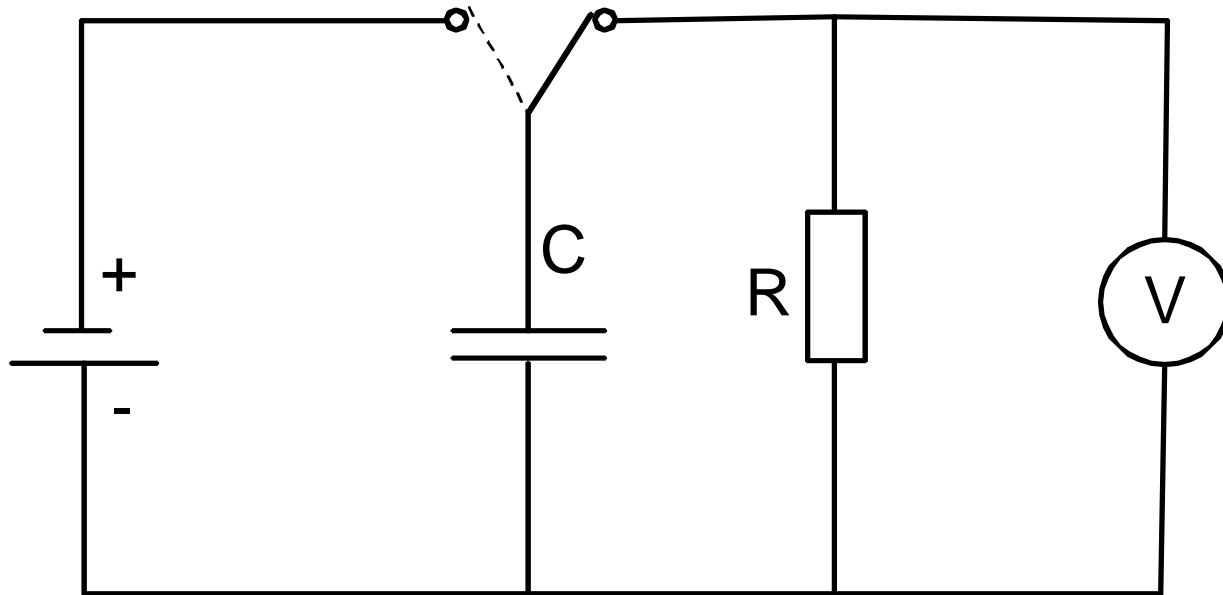
Parallelschaltung

$$C = \varepsilon \frac{A}{d} = \varepsilon \cdot \frac{A_1 + A_2}{d} = C_1 + C_2$$



# 821 Aufgaben

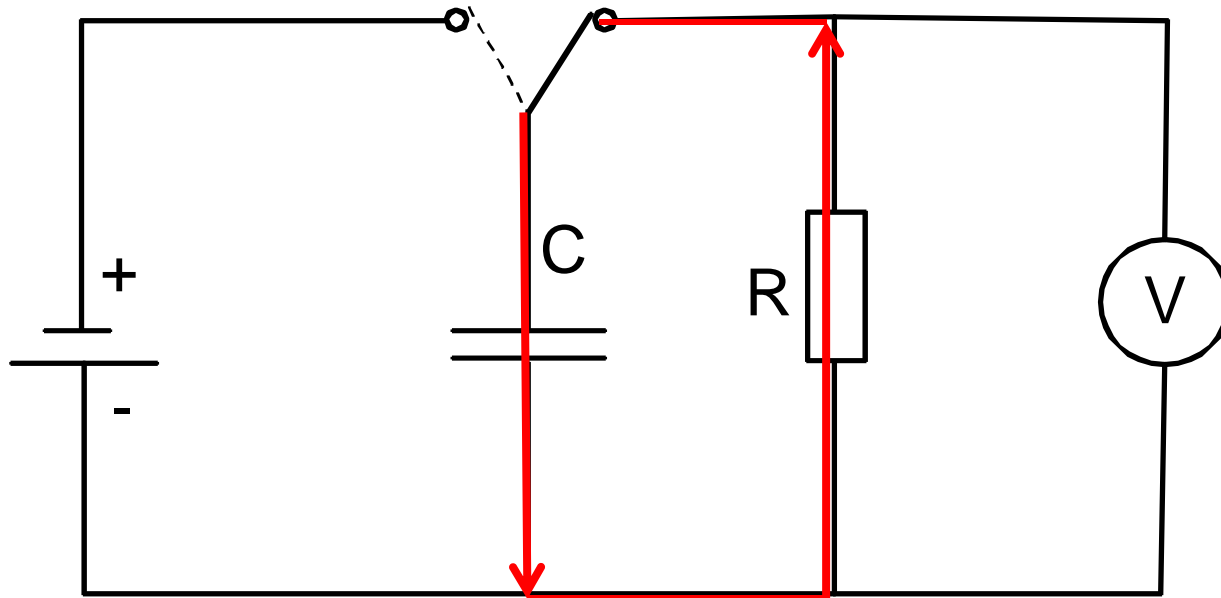
Entladung eines Kondensators



$$U_C + U_R = 0$$

## 821 Aufgaben

Entladung eines Kondensators

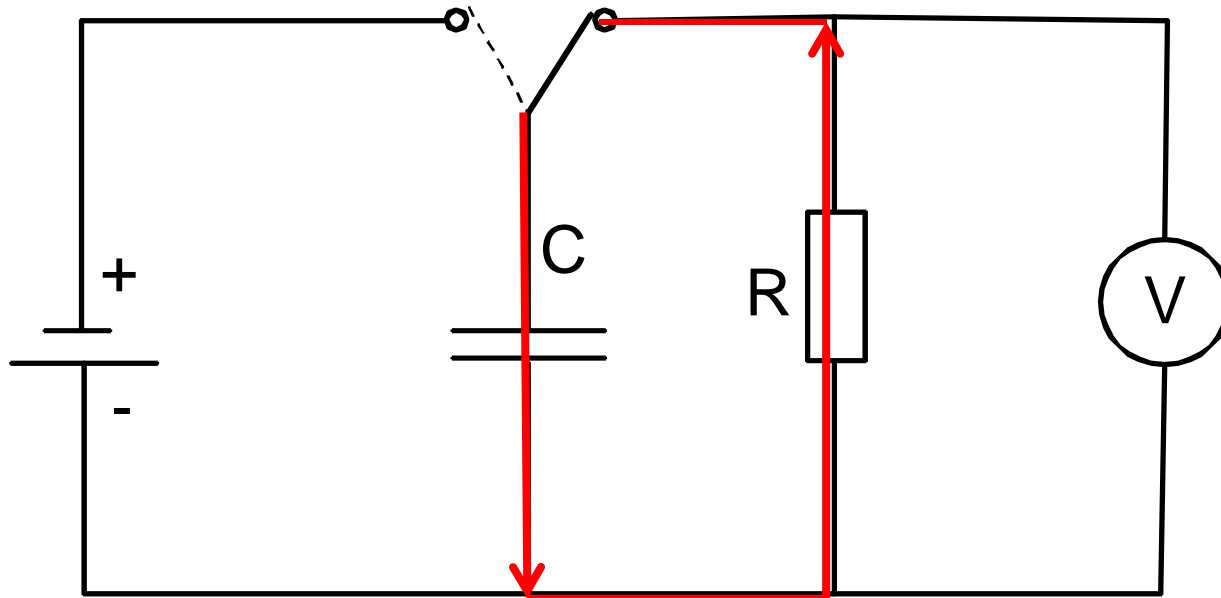


$$U_C + U_R = 0$$

**821** Aufgaben

Entladung eines Kondensators

$$Q / C + RI = Q / C + R \cdot dQ / dt = 0$$



$$U_C + U_R = 0$$

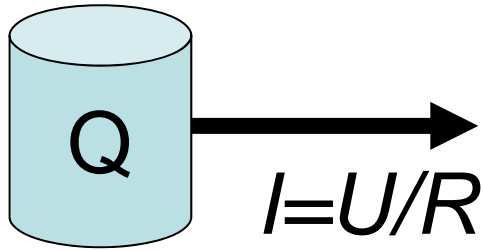
**821** Aufgaben

Entladung eines Kondensators

$$Q / C + RI = Q / C + R \cdot dQ / dt = 0$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC} Q$$

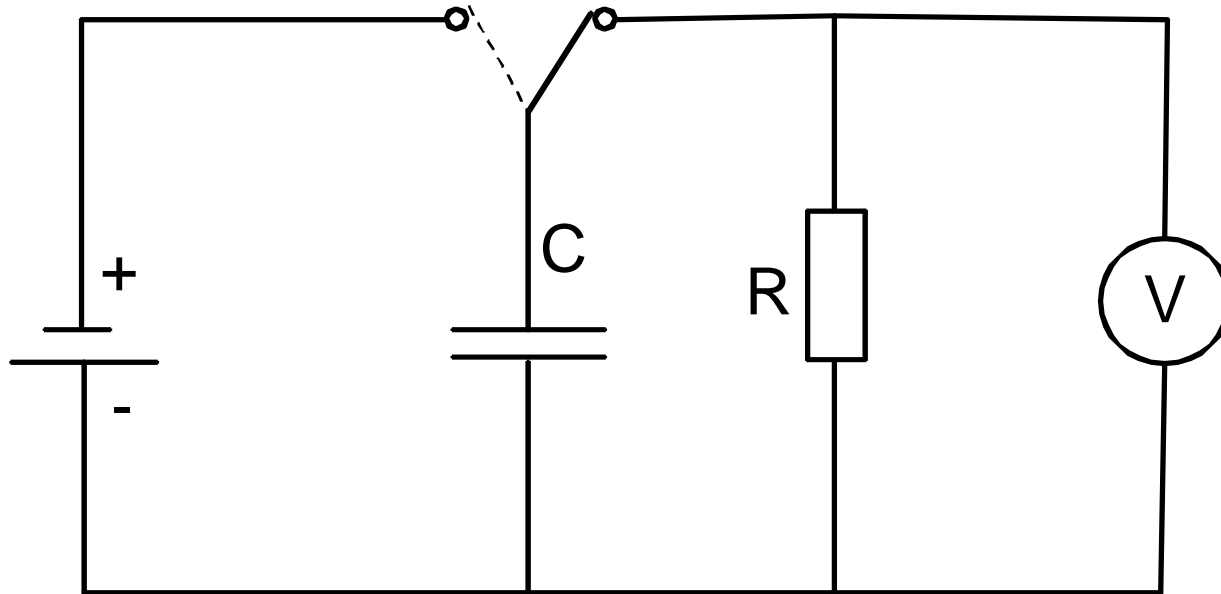


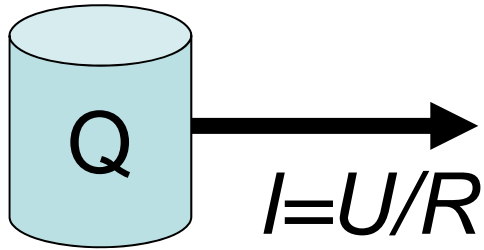


## 821 Aufgaben

Entladung eines Kondensators:

Analogie zu Wärmespeicher  
(721)

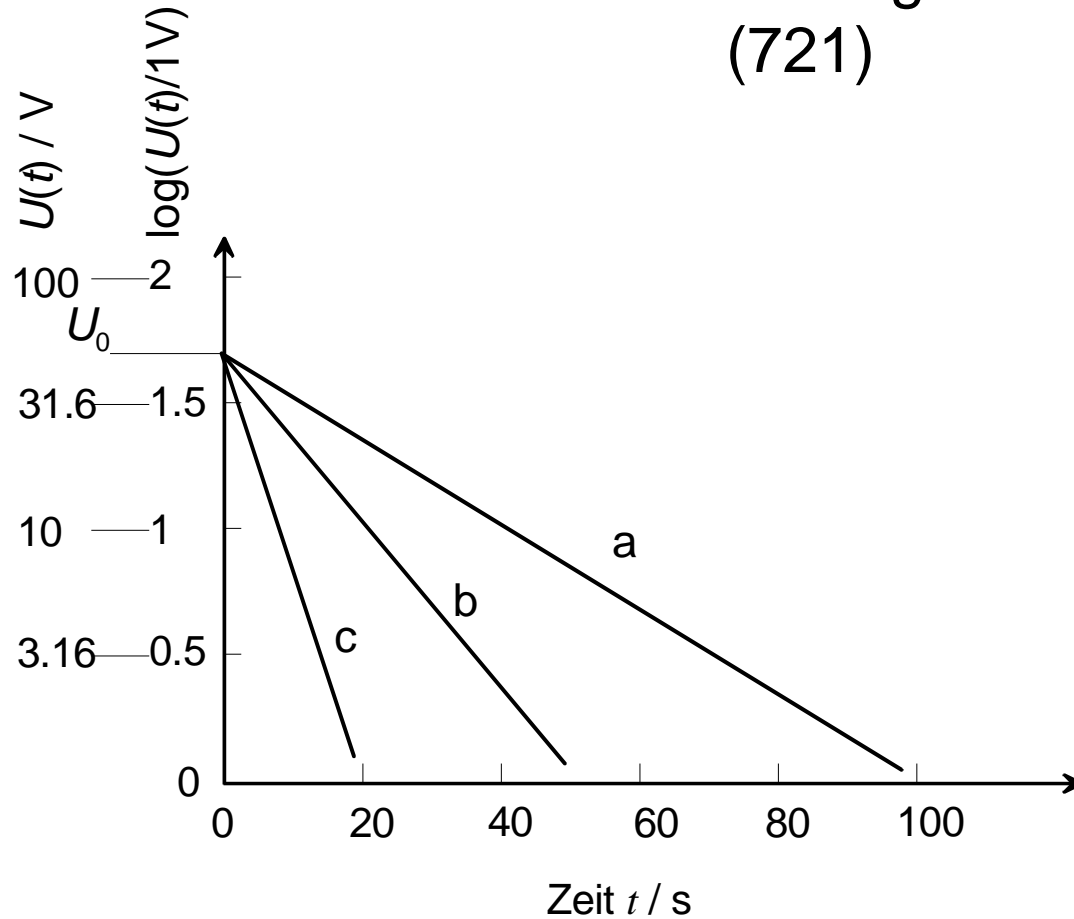




## 821 Aufgaben

Entladung eines Kondensators:

Analogie zu Wärmespeicher  
(721)



# **822 Serie- und Parallelschaltungen von Widerständen**



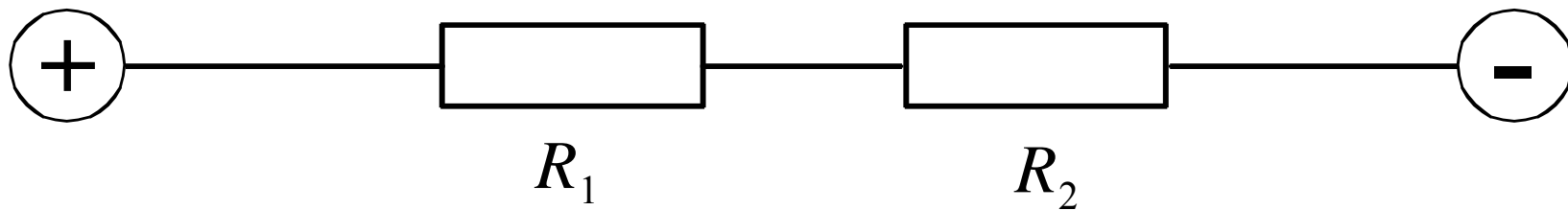
## 822 Ziele

- Widerstände in Parallel- und Serieschaltungen berechnen können
- Teilströme und Teilspannungen in elektrischen Schaltungen mit Widerständen bei Anliegen einer Gleichspannungsquelle berechnen können

## 822 Theorie

### Serieschaltung

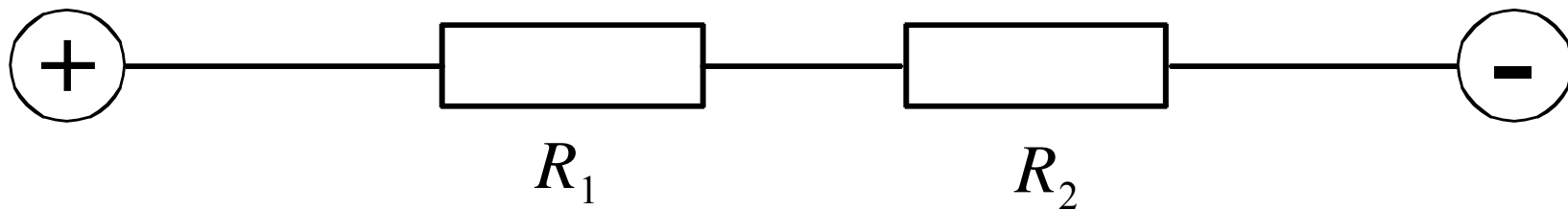
$$R = \rho \cdot \frac{l_1 + l_2}{A_{fil}}$$



## 822 Theorie

### Serieschaltung

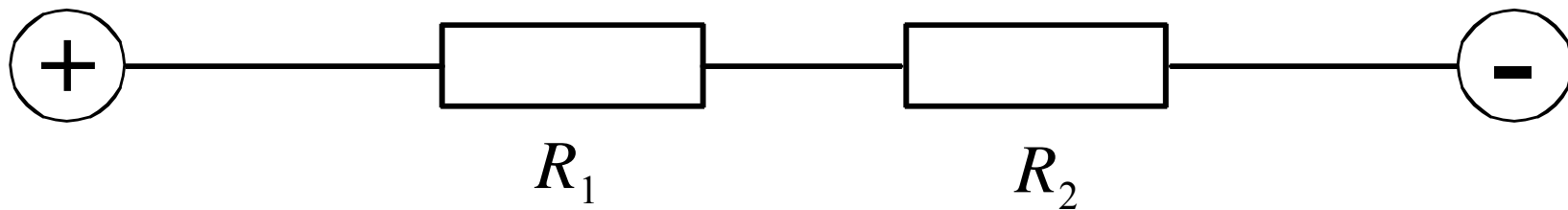
$$R = \rho \cdot \frac{l_1 + l_2}{A_{fil}} = \rho \cdot \frac{l_1}{A_{fil}} + \rho \cdot \frac{l_2}{A_{fil}}$$



## 822 Theorie

### Serieschaltung

$$R = \rho \cdot \frac{l_1 + l_2}{A_{fil}} = \rho \cdot \frac{l_1}{A_{fil}} + \rho \cdot \frac{l_2}{A_{fil}} = R_1 + R_2$$

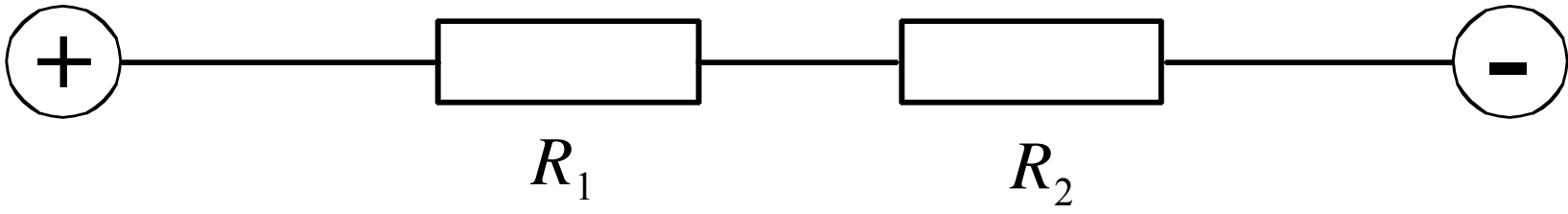


$$R = \sum_i R_i$$

# 822 Theorie

Serieschaltung

$$R = \rho \cdot \frac{l_1 + l_2}{A_{fil}} = \rho \cdot \frac{l_1}{A_{fil}} + \rho \cdot \frac{l_2}{A_{fil}} = R_1 + R_2$$

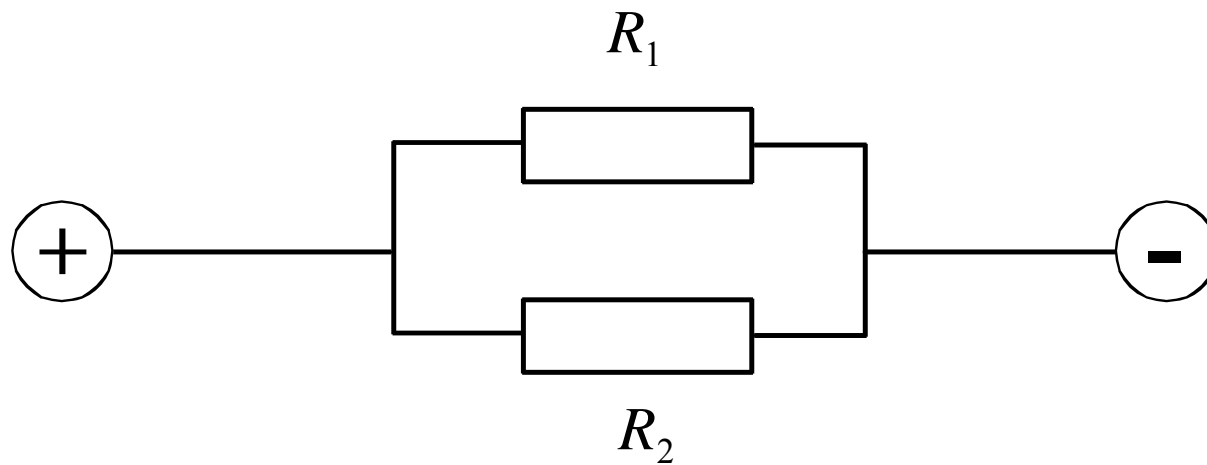




# 822 Theorie

## Parallelschaltung

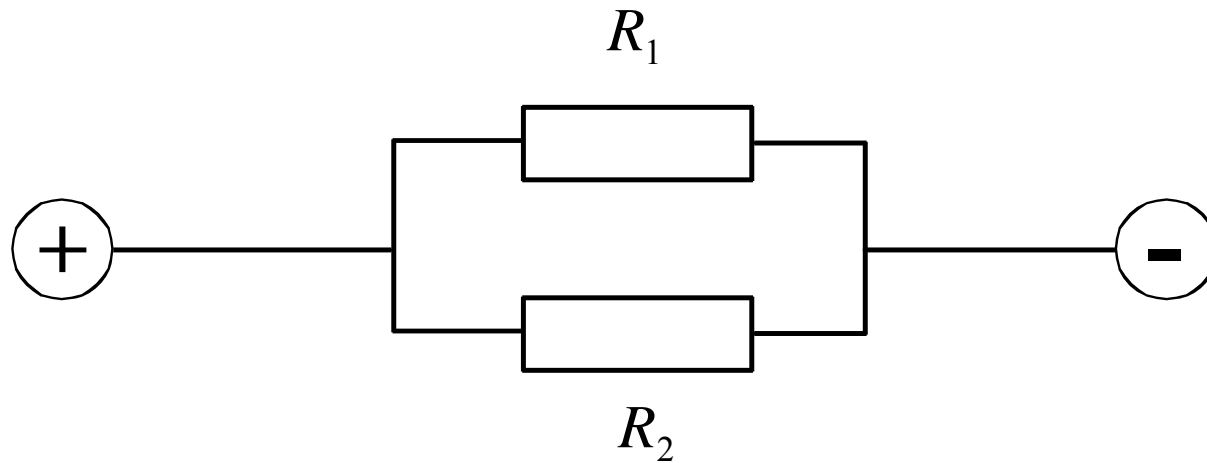
$$R = \rho \cdot \frac{l}{A_1 + A_2}$$



# 822 Theorie

## Parallelschaltung

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A_1 + A_2} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

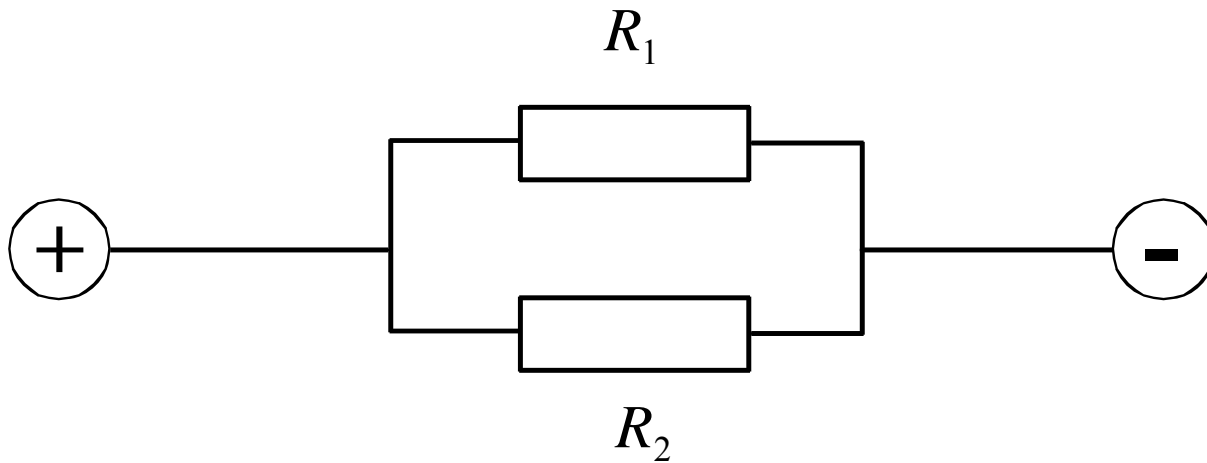


$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

## 822 Theorie

Parallelschaltung

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A_1 + A_2} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

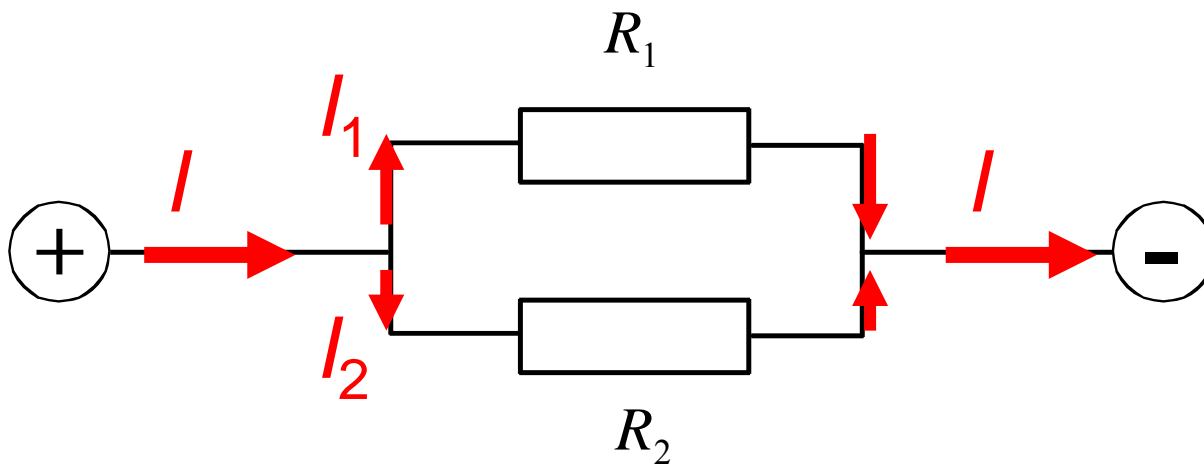


$$\sum_k I_k = 0$$

## 822 Theorie

Berechnung von Strömen und  
Spannungen:

Knotenregel

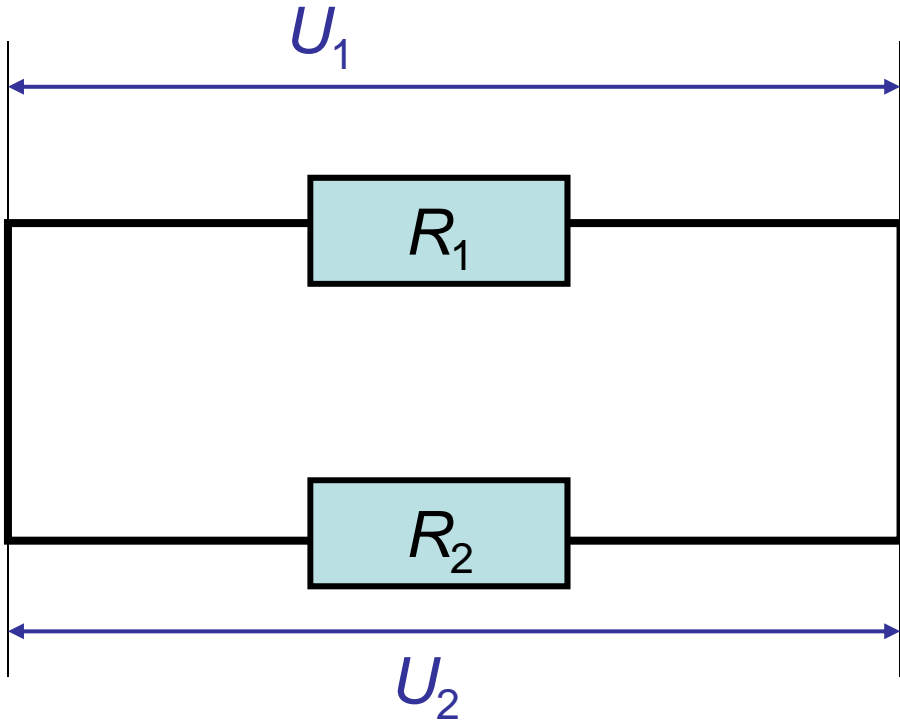


$$\sum_k U_k = 0$$

## 822 Theorie

Berechnung von Strömen und Spannungen:

Maschenregel



# 831 Die Lorentz-Kraft

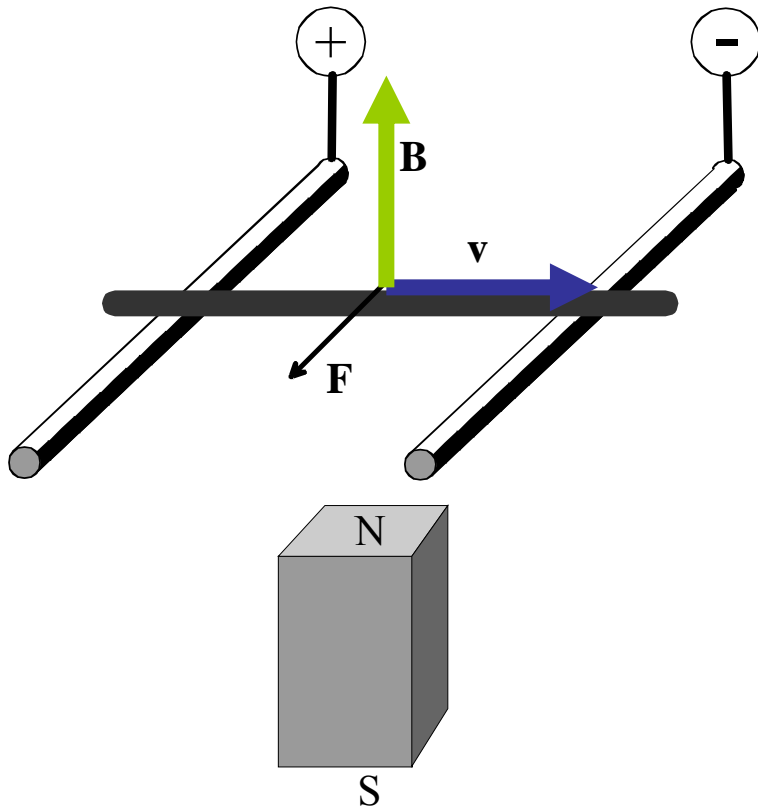


## 831 Ziele

- Lorenz-Kraft berechnen können
- Wechselwirkung zwischen geladenen Teilchen und Magnetfeldern modellieren können

## 831 Experiment

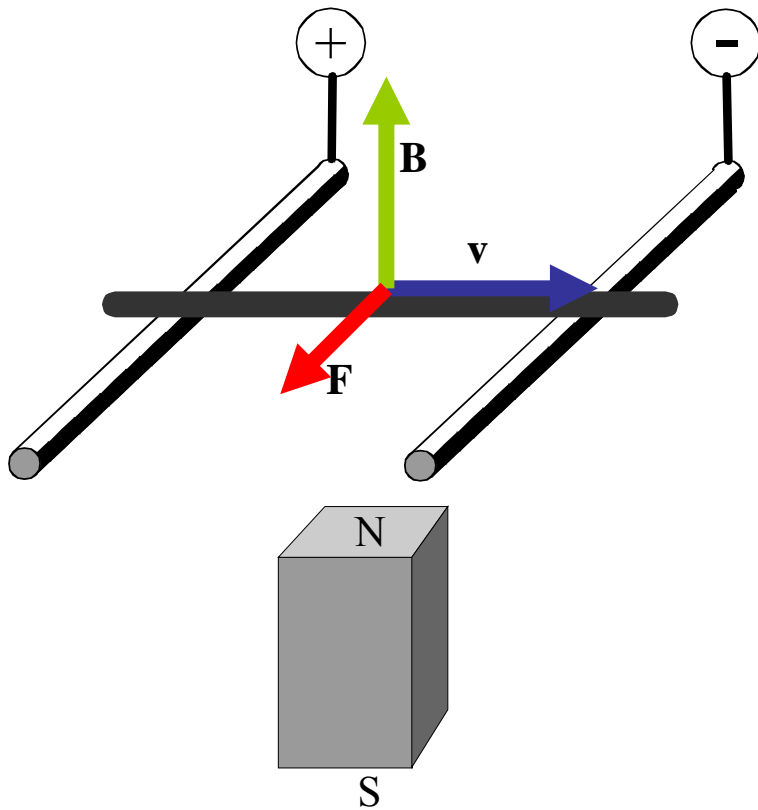
Magnet + Strom (bewegte Ladungen) = ?





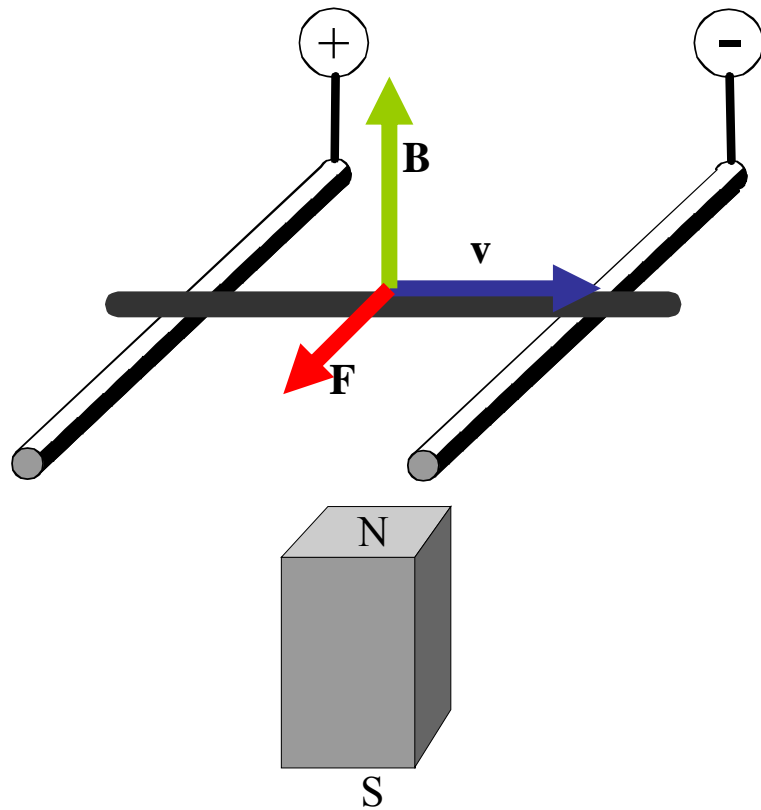
## 831 Experiment

Magnet + Strom (bewegte  
Ladungen) = Kraft  
(Beschleunigung, Bewegung)



# 831 Theorie

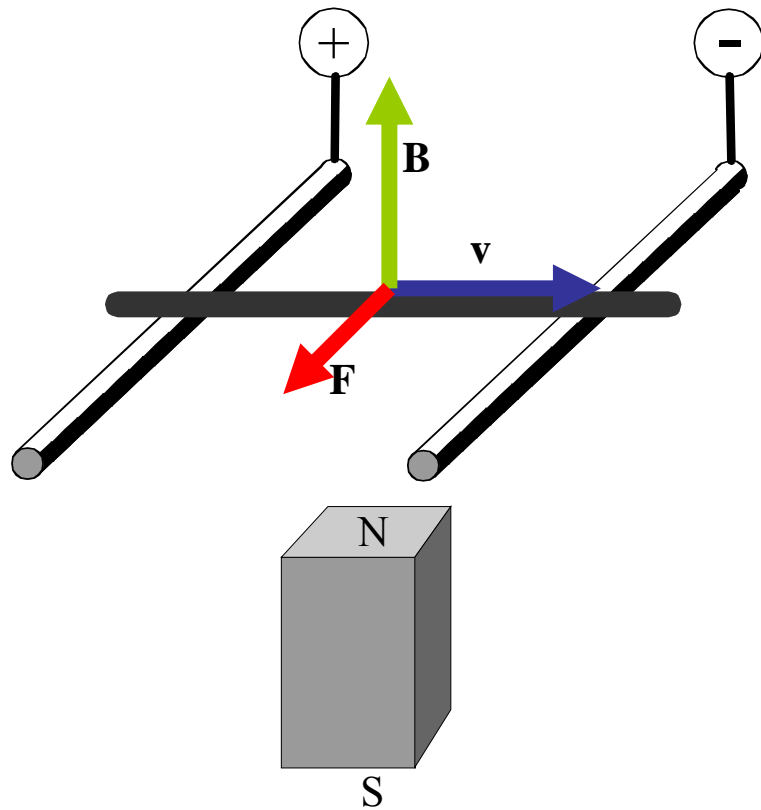
## Lorenz-Kraft



$$\vec{F}_B = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

# 831 Theorie

## Lorenz-Kraft



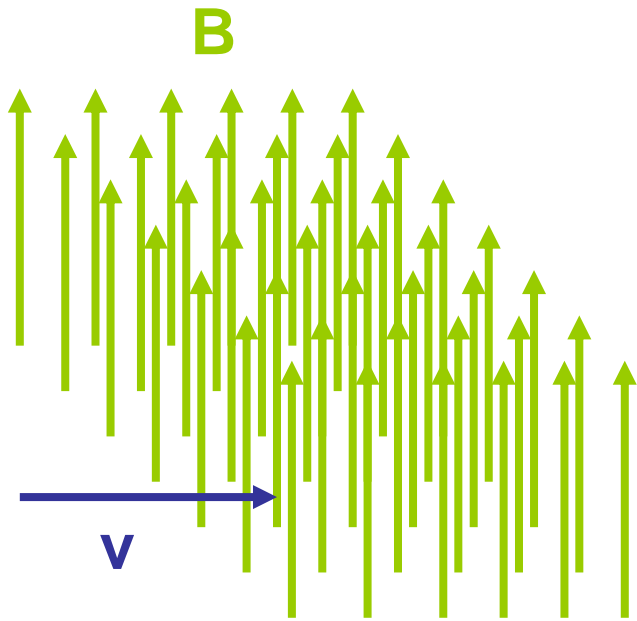
$$\vec{F}_B = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$[B] = \frac{N \cdot s}{C \cdot m} = T$$

## 831 Theorie

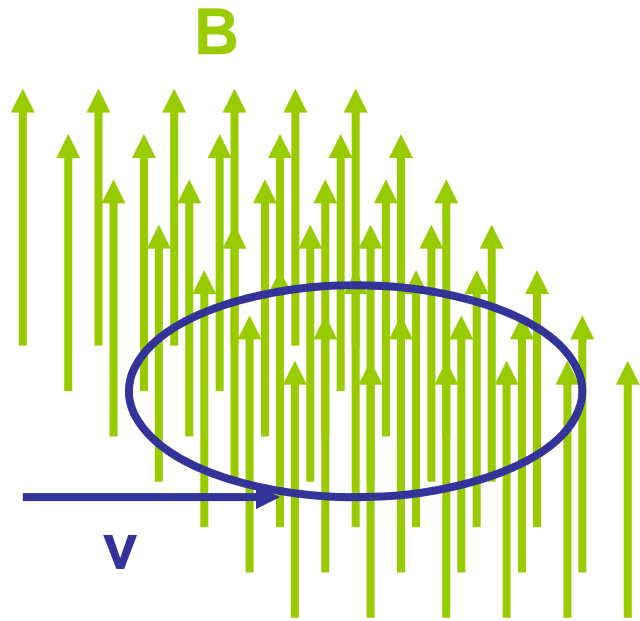
Kraft auf ein bewegtes,  
elektrisch geladenes Teilchen  
in einem  $E$ - und  $B$ - Feld:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$



## 831 Theorie

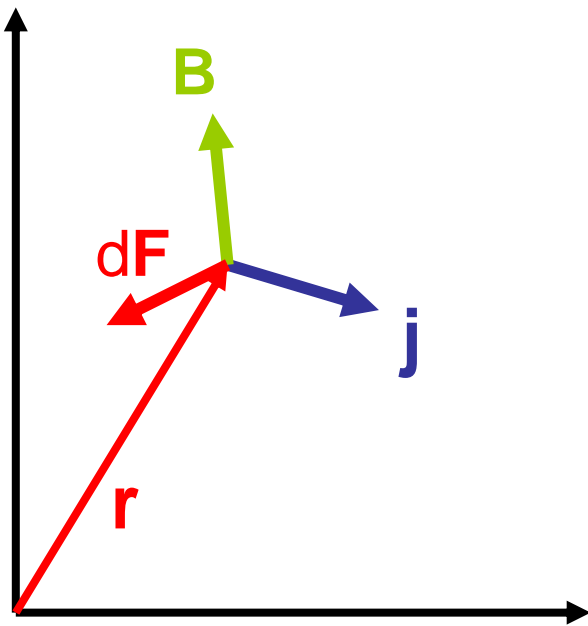
Kraft auf ein bewegtes,  
elektrisch geladenes Teilchen  
in einem  $E$ - und  $B$ - Feld:



$$\begin{aligned}\vec{F} &= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ &= \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt}\end{aligned}$$

## 831 Theorie

Kraft auf  
stromdurchflossenen Leiter



$$\vec{j} = nq\vec{v}$$

$$\vec{F} = \int (\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})) \cdot d^3 r$$

# **832 Ströme und Magnetfelder**

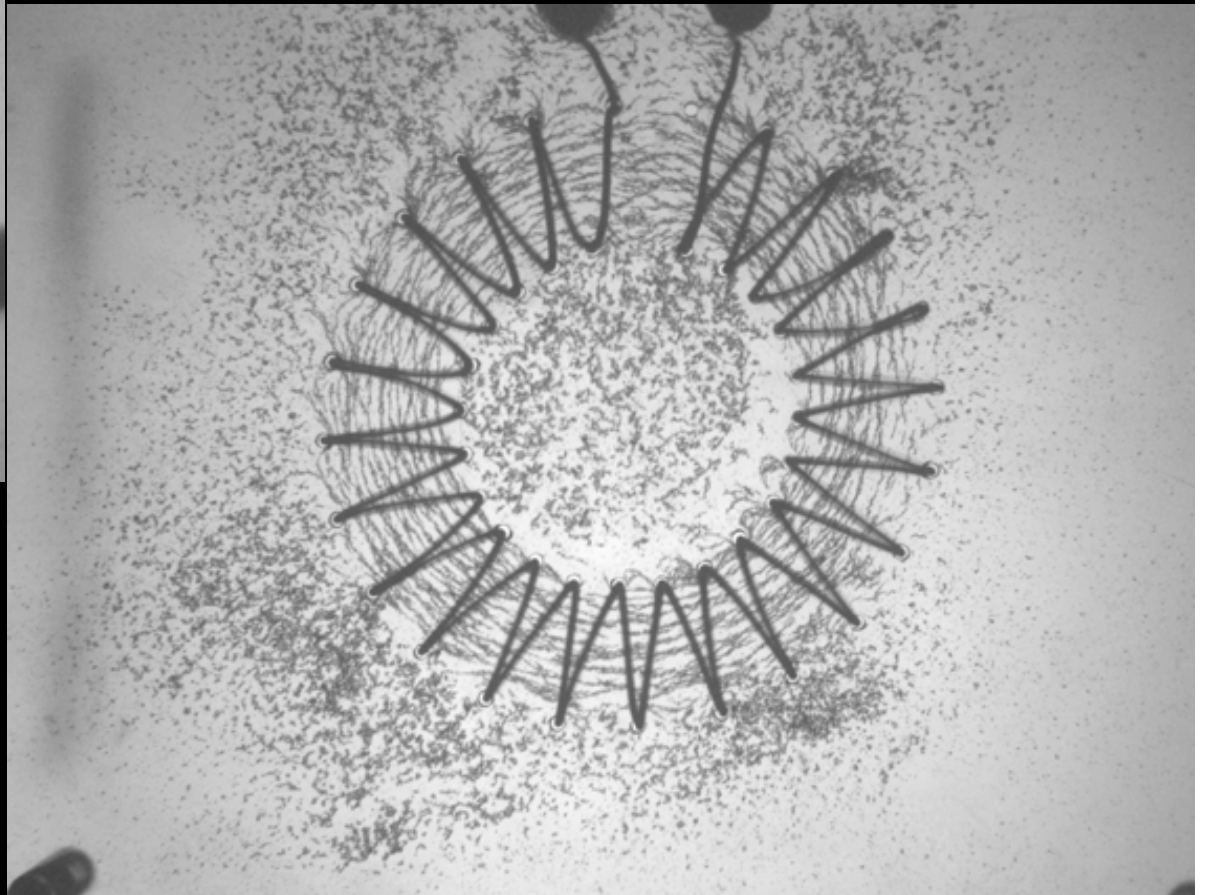
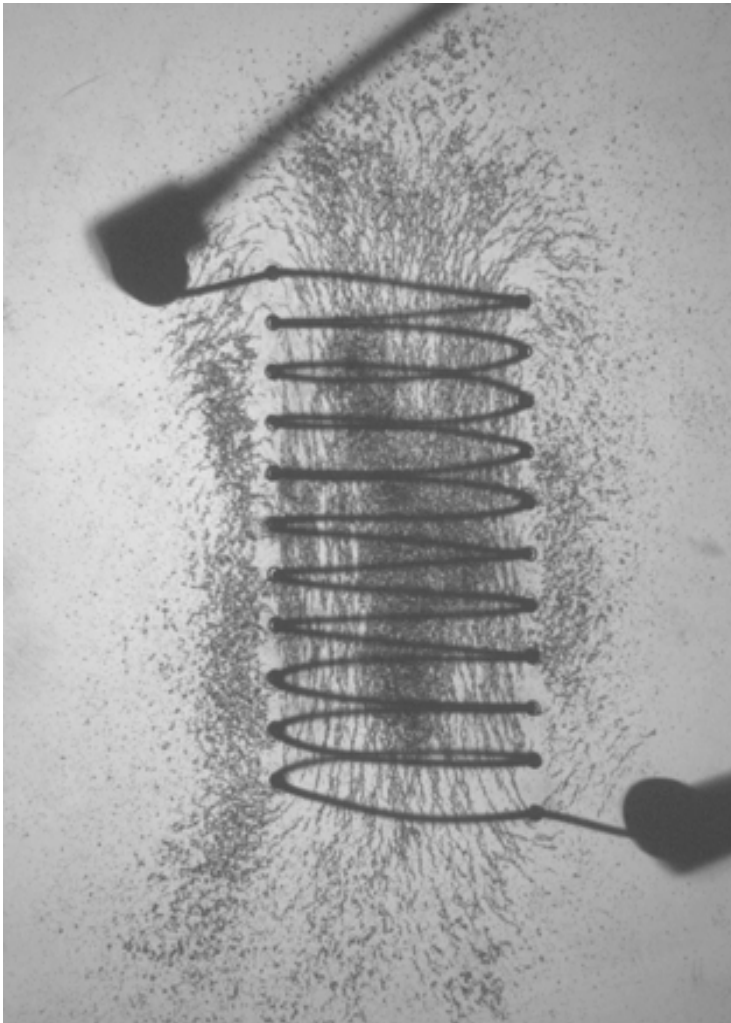


## 832 Ziele

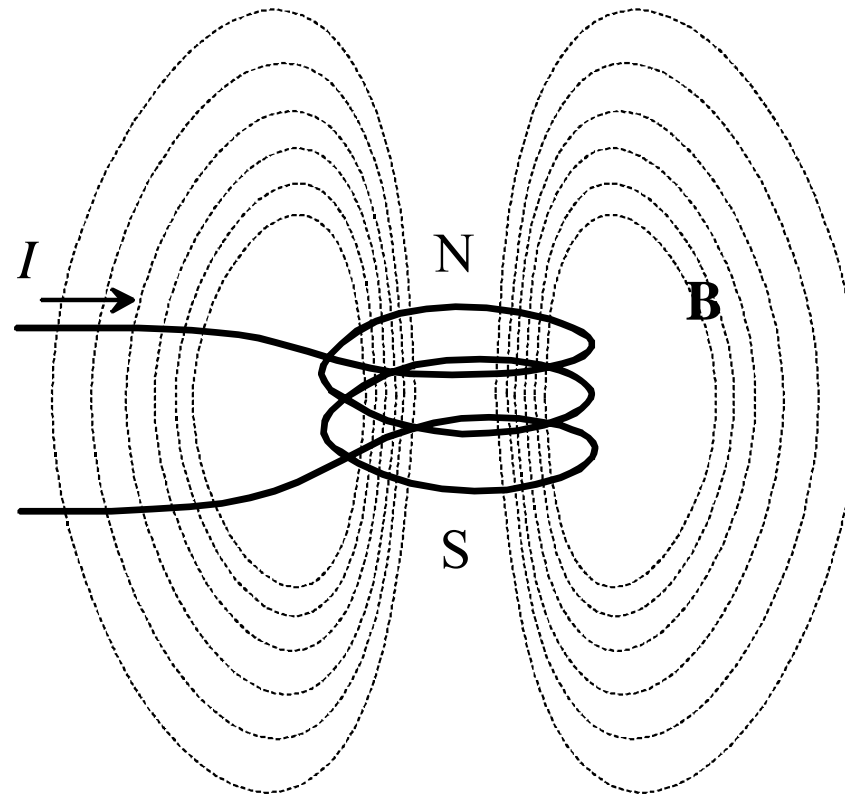
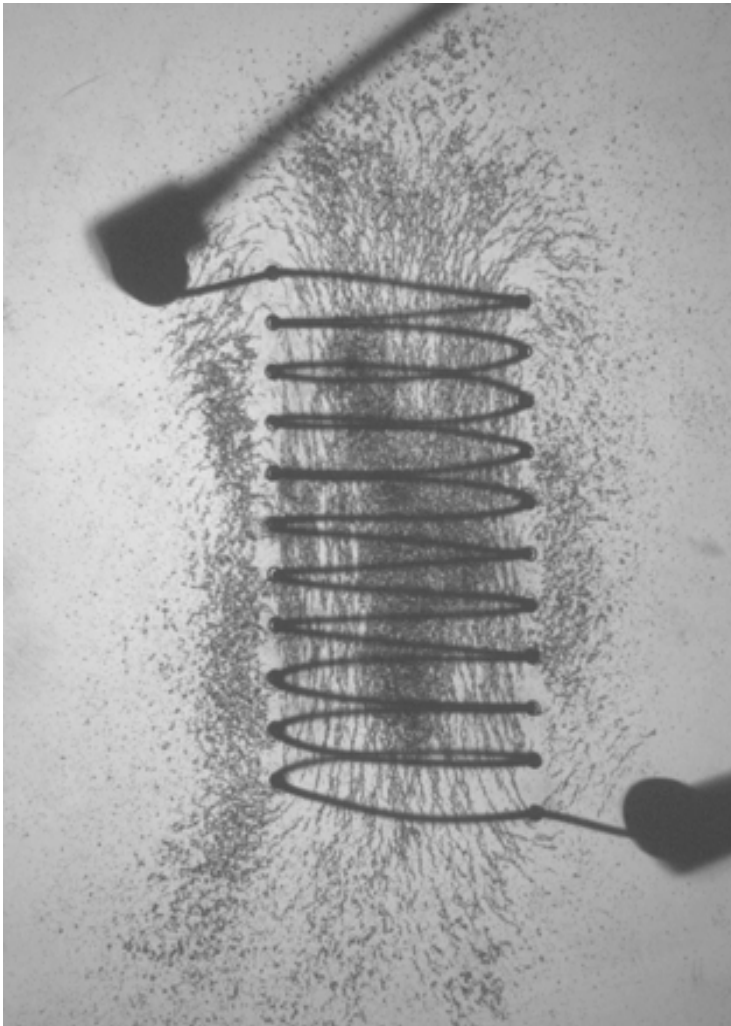
- Ursache von magnetischen Feldern erklären können
- magnetische Feldlinien um stromdurchflossene Leiter einzeichnen können
- magnetische Feldstärke in einer stromdurchflossenen Spule berechnen können



# 832 Experiment

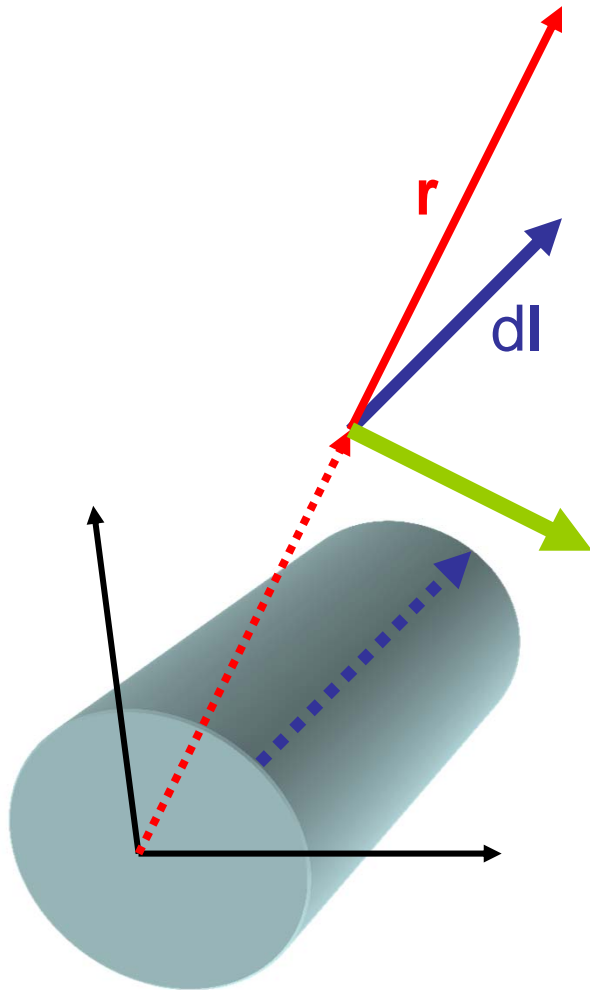


## 832 Experiment



## 832 Theorie

durch stromdurchflossenen  
Leiter erzeugtes Magnetfeld



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$$

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0$$

## 832 Theorie

Magnetfeld in Materie:

Analogie zu elektrischem  
Feld

$$B = \mu_r B_0$$

<i>Ferromagnetika</i>	$\mu_r$
Eisen	bis 5000
Nickel	bis 1000
<i>Paramagnetika</i>	
Luft	$\approx 1$
Aluminium	1.00002
<i>Diamagnetika</i>	
Wasser	0.99999
Kupfer	0.9999



## 832 Theorie

Magnetfeld in einer langen,  
einlagigen Spule mit  $N$   
Windungen

$$B \approx \mu_r \mu_0 \frac{NI}{l}$$

# **833** elektromagnetische Induktion



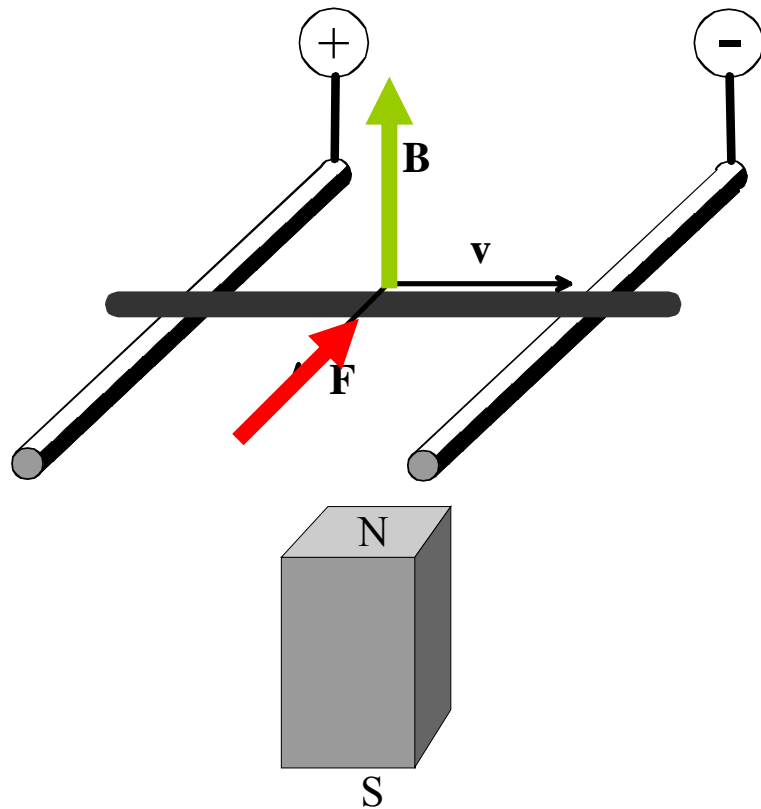
## 833 Ziele

- Prinzip der Induktion erklären können
- In Spulen induzierte Spannung berechnen können
- Effektivwerte für Spannung und Strom definieren und berechnen können
- Funktionsweise eines einfachen Wechselstromgenerators erklären können

## 833 Experiment

Magnet(feld) + Strom  
(bewegte Ladungen) = Kraft

Magnetfeld und Kraft auf  
Leiter = ?

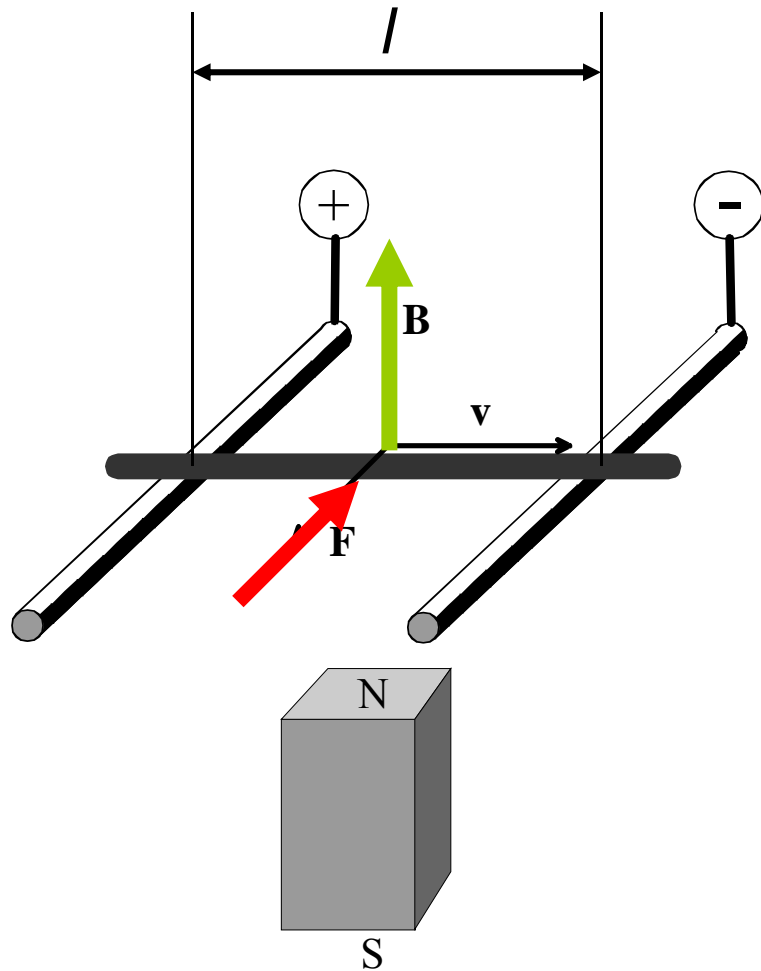




## 833 Experiment

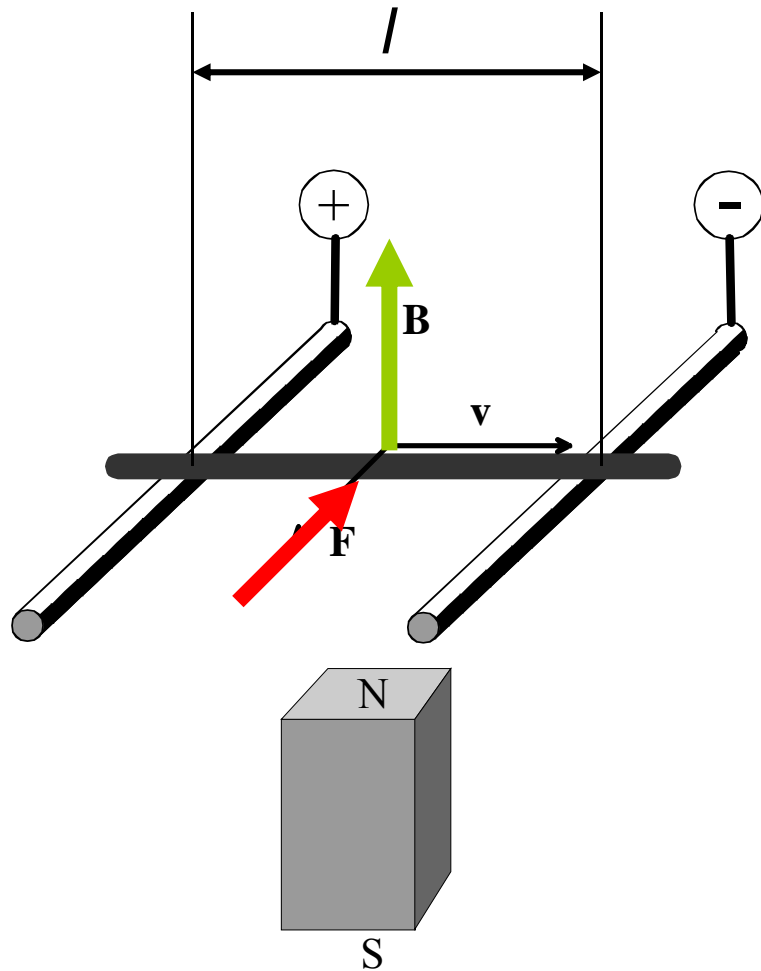
Magnetfeld und Kraft auf  
Leiter = Bewegungen von  
Ladungen: Es wird eine  
elektrische Spannung  $U$   
induziert:

$$U = E \cdot l$$



## 833 Experiment

Im Gleichgewicht ist die durch das aufgebaute E-Feld wirkende Kraft auf die Ladungen gleich der Lorentzkraft:



$$U = E \cdot l$$

$$qE = -q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

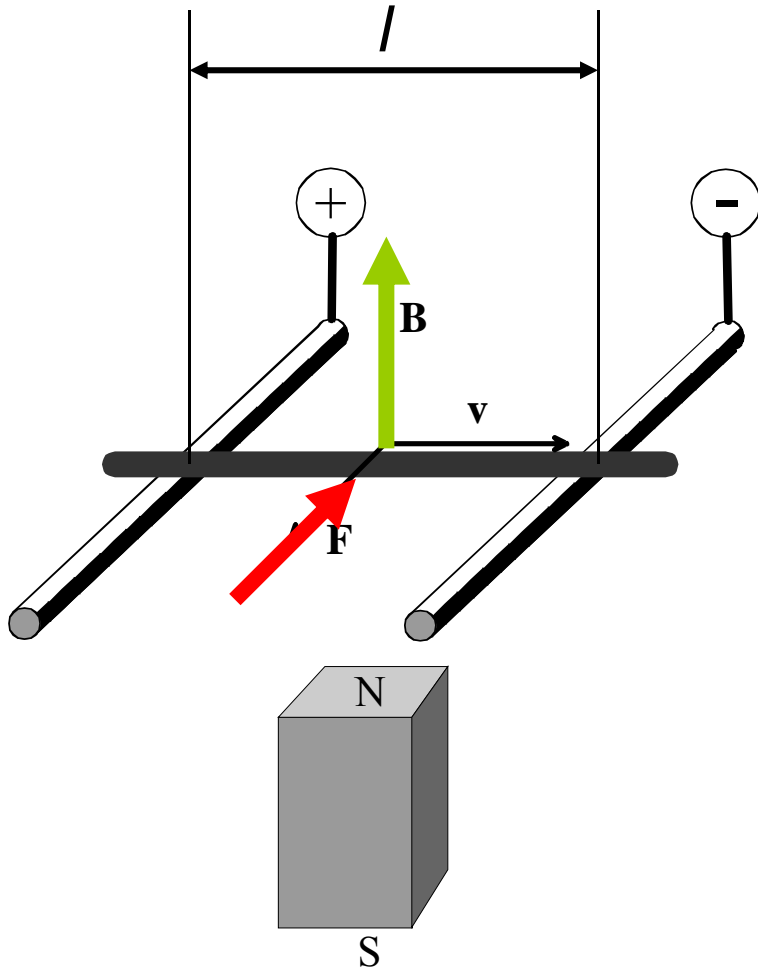
$$= -qvB \cdot \sin \phi$$

## 833 Experiment

Für rechtwinklige Geometrie:

$$E = v \cdot B$$

$$U = E \cdot l = -v l \cdot B$$



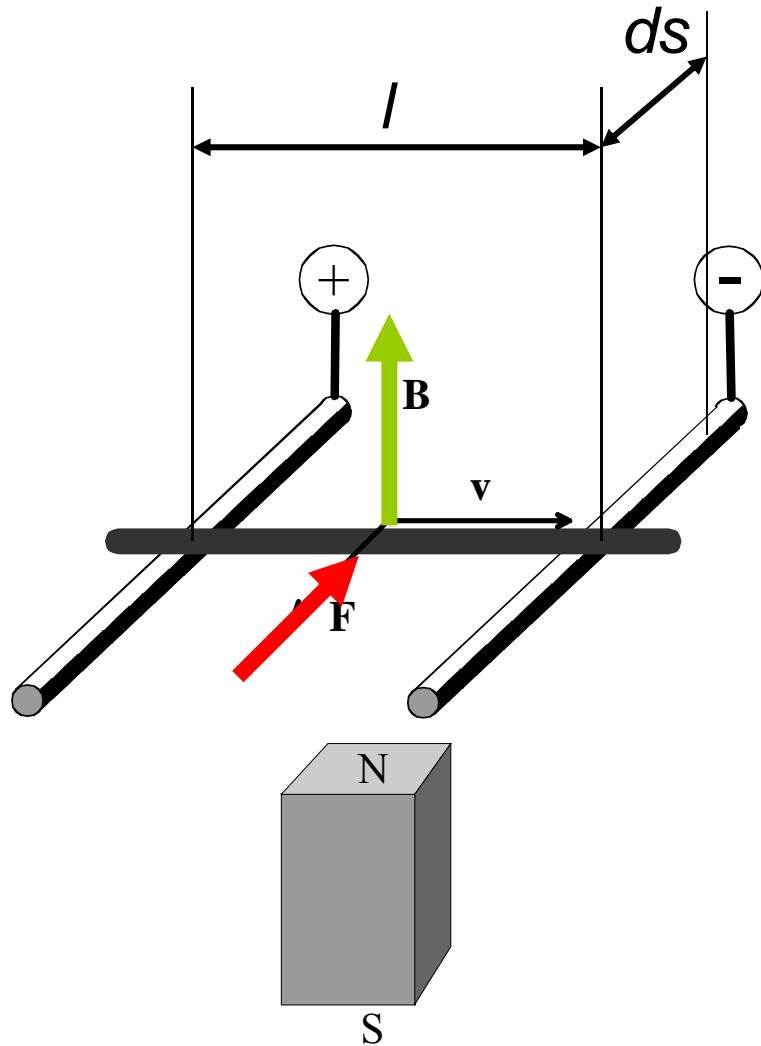
## 833 Experiment

Für rechtwinklige Geometrie:

$$E = v \cdot B$$

$$U = E \cdot l = -v l \cdot B$$

$$\rightarrow U = -\frac{l \cdot ds}{dt} \cdot B$$



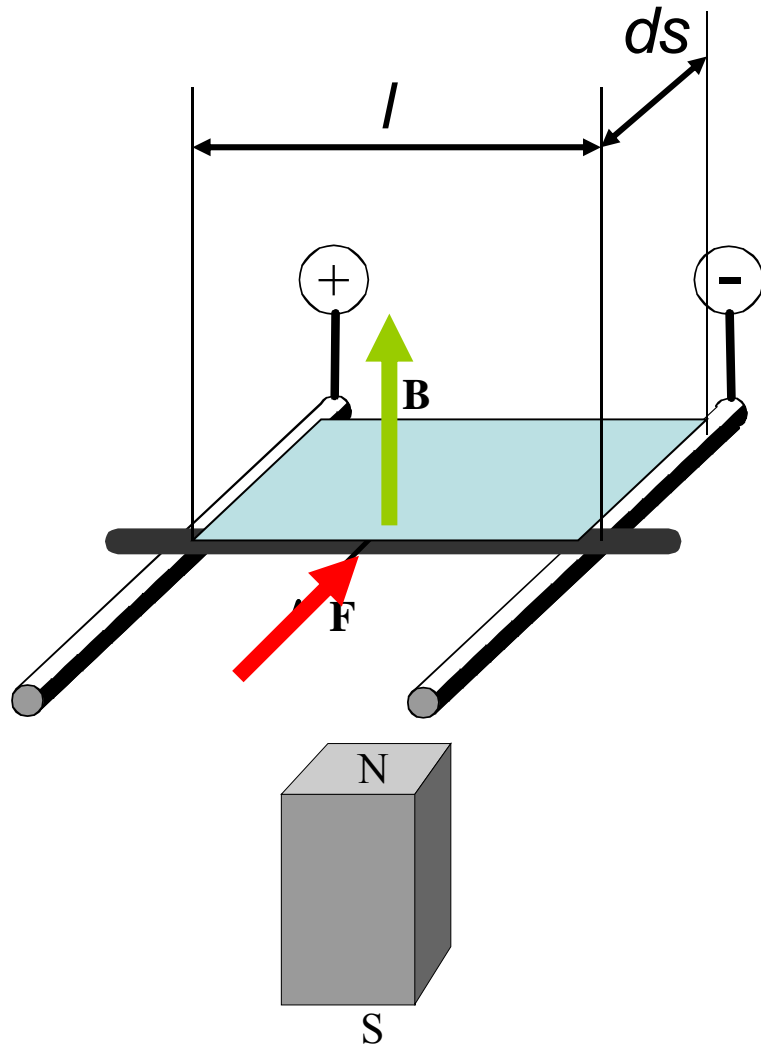
## 833 Experiment

Für rechtwinklige Geometrie:

$$E = v \cdot B$$

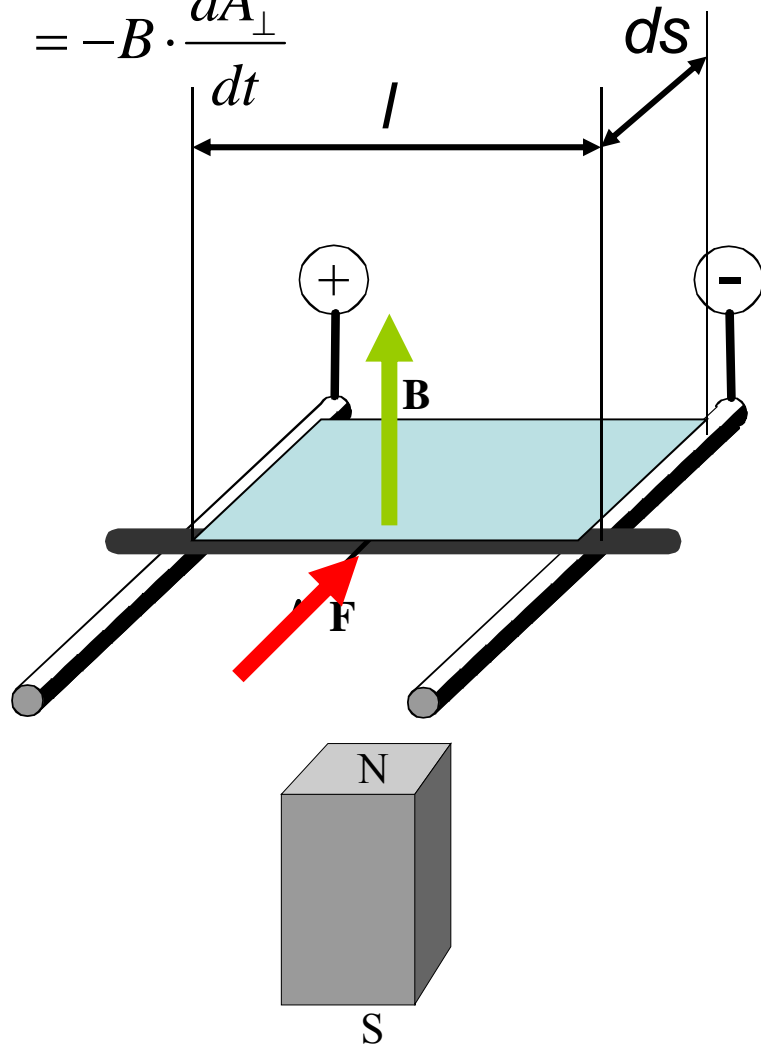
$$U = E \cdot l = -v l \cdot B$$

$$\begin{aligned} \rightarrow U &= -\frac{l \cdot ds}{dt} \cdot B \\ &= -B \cdot \frac{dA_{\perp}}{dt} \end{aligned}$$



$$U = -\frac{l \cdot ds}{dt} \cdot B$$

$$= -B \cdot \frac{dA_{\perp}}{dt}$$



## 833 Experiment

Auch die Änderung der Magnetfeldstärke führt zu einer induzierten Spannung:

$$U = -A_{\perp} \cdot \frac{dB}{dt}$$

## 833 Theorie

Allgemein (nicht nicht ganz allgemein):

$$U_{ind} = -\frac{d}{dt} [A(t) \cdot B(t)] =$$

## 833 Theorie

Allgemein (nicht nicht ganz allgemein):

$$U_{ind} = -\frac{d}{dt} [A(t) \cdot B(t)] = -\left( B \cdot \frac{dA_{\perp}}{dt} + A_{\perp} \cdot \frac{dB}{dt} \right)$$



## 833 Theorie

Def. magnetischer Fluss

$$\Phi_m = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

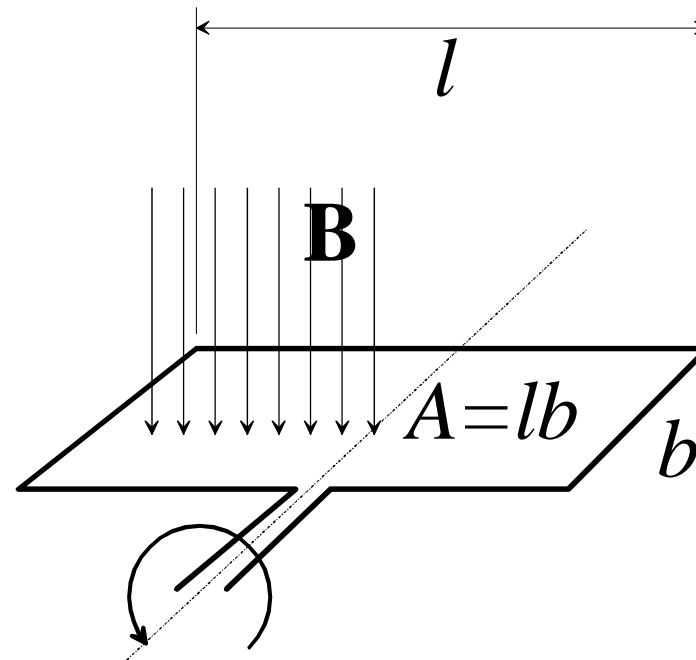
$$U_{ind} = -\frac{d}{dt} \Phi_m$$

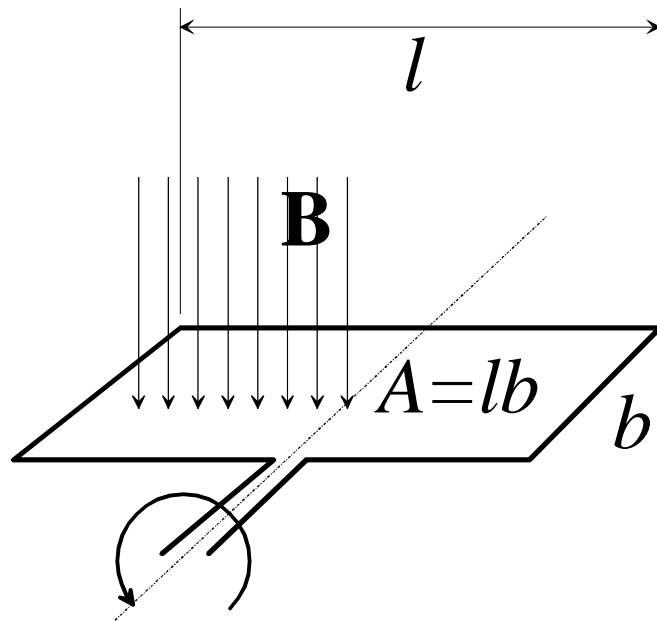
$$\Phi_m = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$U_{ind} = -\frac{d}{dt} \Phi_m$$

## 833 Theorie

Ein einfacher Generator:  
rotierende Leiterschleife im  
Magnetfeld

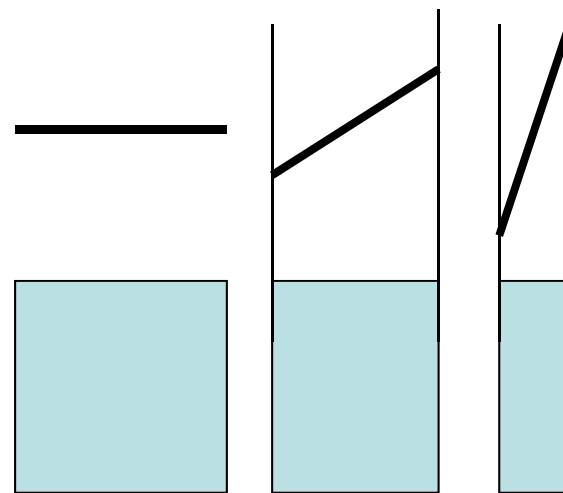
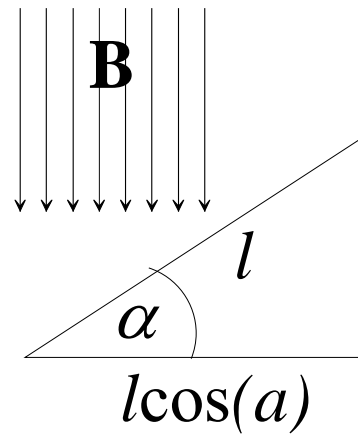




## 833 Theorie

Ein einfacher Generator:  
rotierende Leiterschleife im  
Magnetfeld

$$A_{\perp} = bl \cdot \cos \alpha$$



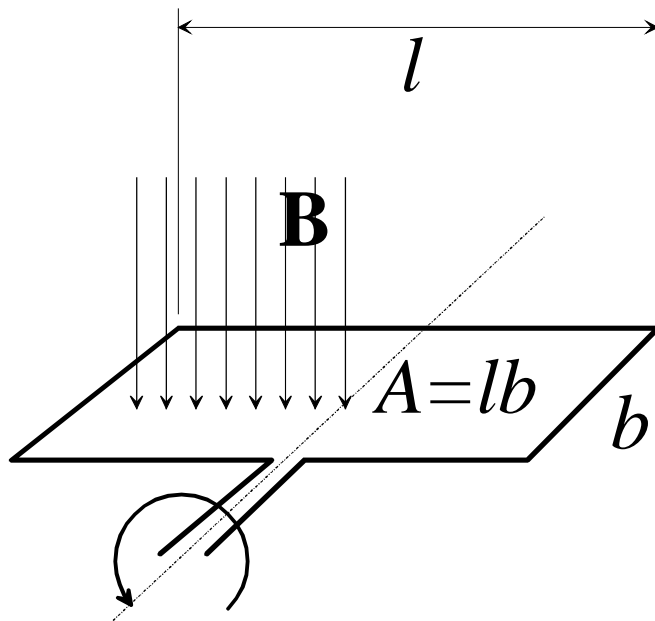
## 833 Theorie

In Leiterschleufe induzierte Spannung:

$$A_{\perp} = bl \cdot \cos \alpha$$

$$\alpha = \omega t$$

$$U_{ind} = -NB \frac{dA}{dt}$$



## 833 Theorie

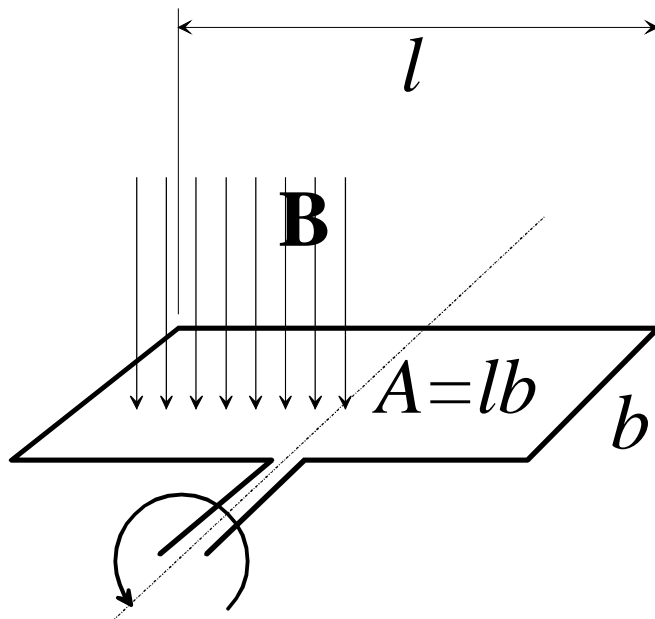
In  $N$  Leiterschleifen  
induzierte Spannung:

$$A_{\perp} = bl \cdot \cos \alpha$$

$$\alpha = \omega t$$

$$U_{ind} = -NB \frac{dA}{dt}$$

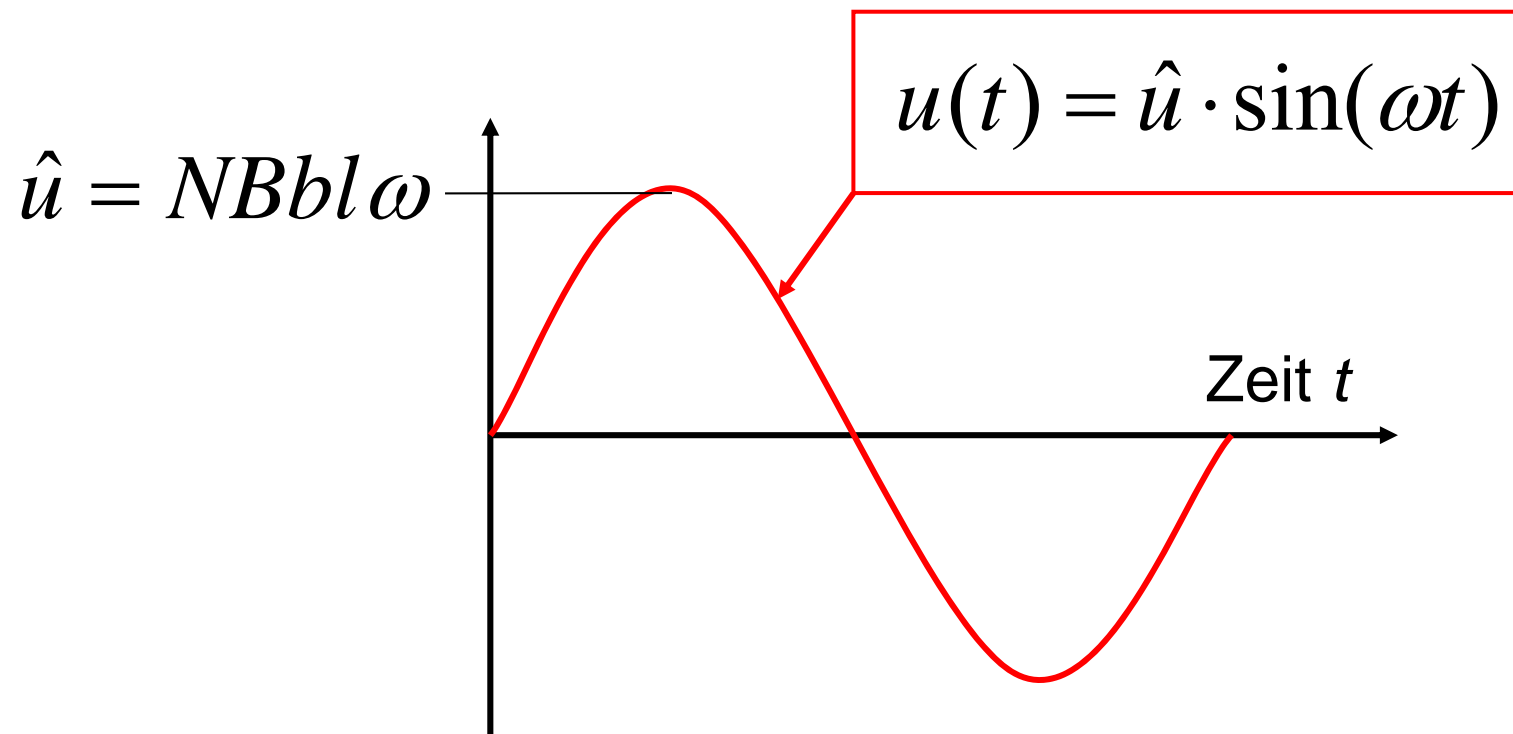
$$= NB \cdot bl \omega \sin(\omega \cdot t)$$



$$U_{ind} = -NB \frac{dA}{dt}$$
$$= NB \cdot bl \omega \sin(\omega \cdot t)$$

## 833 Theorie

Dieser Generator liefert eine Wechselspannung:

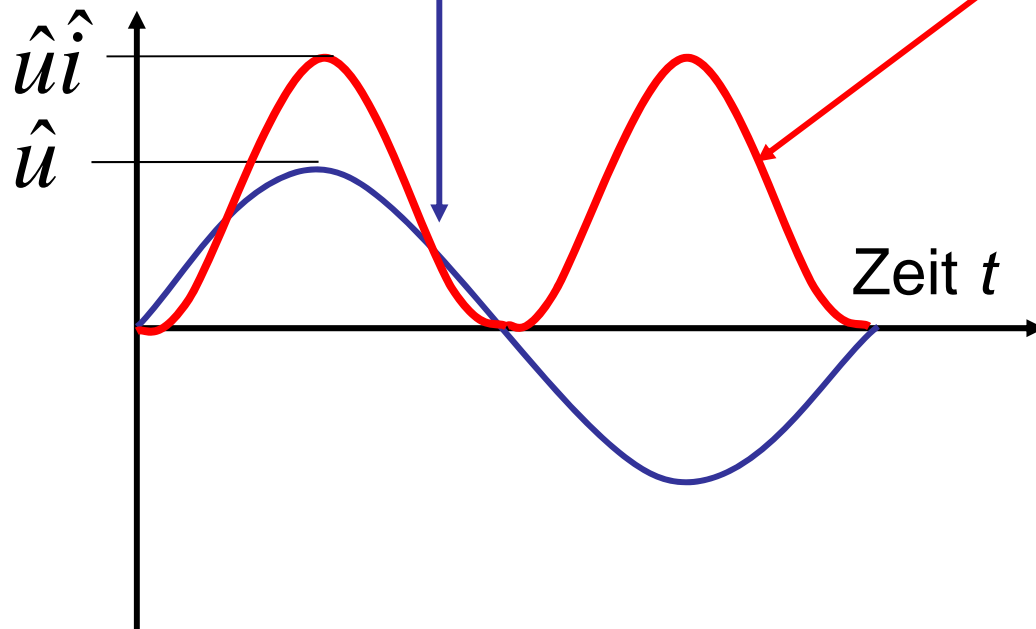


## 833 Theorie

Leistung  $P$ :

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$$

$$p(t) = \hat{u}\hat{i} \cdot \sin^2(\omega t)$$

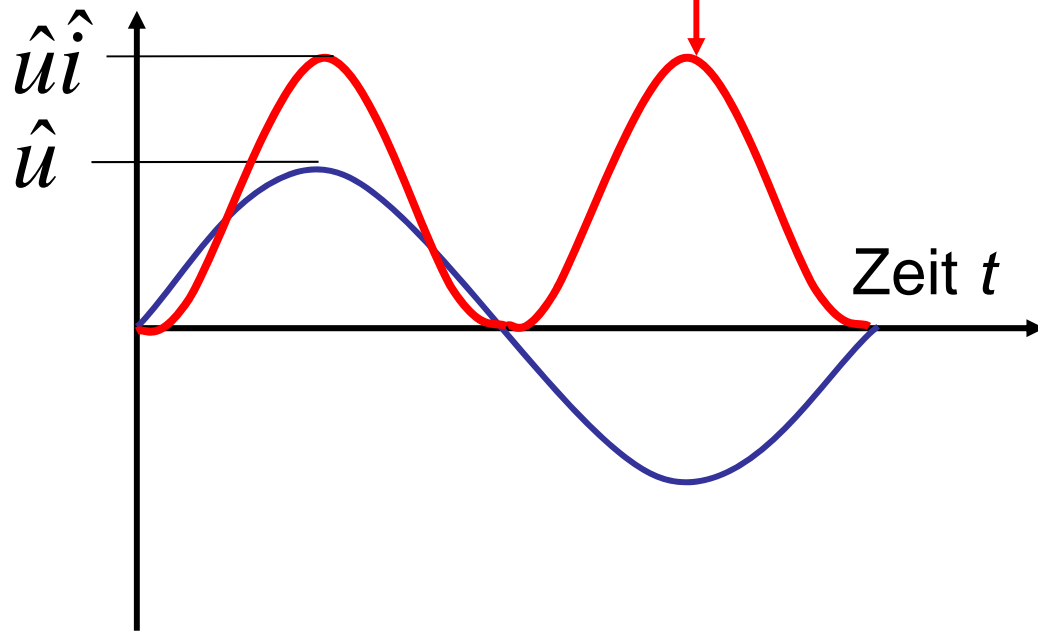


## 833 Theorie

Leistung  $P$ :

$$p(t) = \hat{u}\hat{i} \cdot \sin^2(\omega t)$$

$$2 \sin^2(\omega t) = 1 + \cos(2\omega t)$$



$$p(t) = \hat{u}\hat{i} \cdot \sin^2(\omega t)$$
$$= \hat{u}\hat{i} \cdot \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2}$$

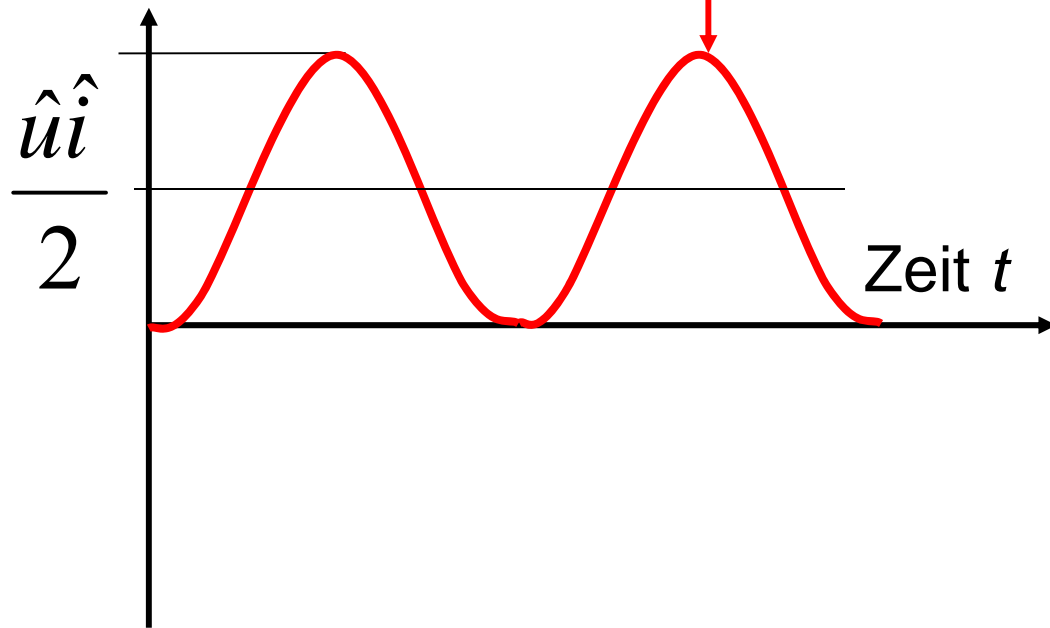


## 833 Theorie

Leistung  $P$ :

$$p(t) = \hat{u}\hat{i} \cdot \sin^2(\omega t)$$

$$2 \sin^2(\omega t) = 1 + \cos(2\omega t)$$



$$p(t) = \hat{u}\hat{i} \cdot \sin^2(\omega t)$$

$$= \hat{u}\hat{i} \cdot \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2}$$

$$= \frac{\hat{u}\hat{i}}{2} + \frac{\hat{u}\hat{i}}{2} \cos(2\omega t)$$

## 833 Theorie

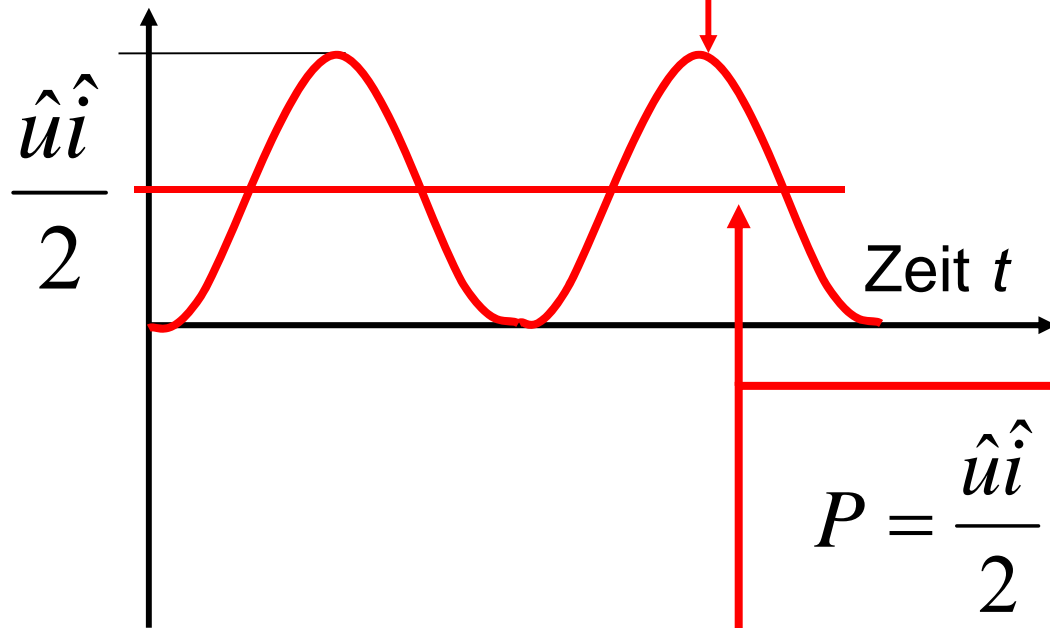
Leistung  $P$ :

$$p(t) = \hat{u}\hat{i} \cdot \sin^2(\omega t)$$

$$p(t) = \hat{u}\hat{i} \cdot \sin^2(\omega t)$$

$$= \hat{u}\hat{i} \cdot \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2}$$

$$= \frac{\hat{u}\hat{i}}{2} + \frac{\hat{u}\hat{i}}{2} \cos(2\omega t)$$

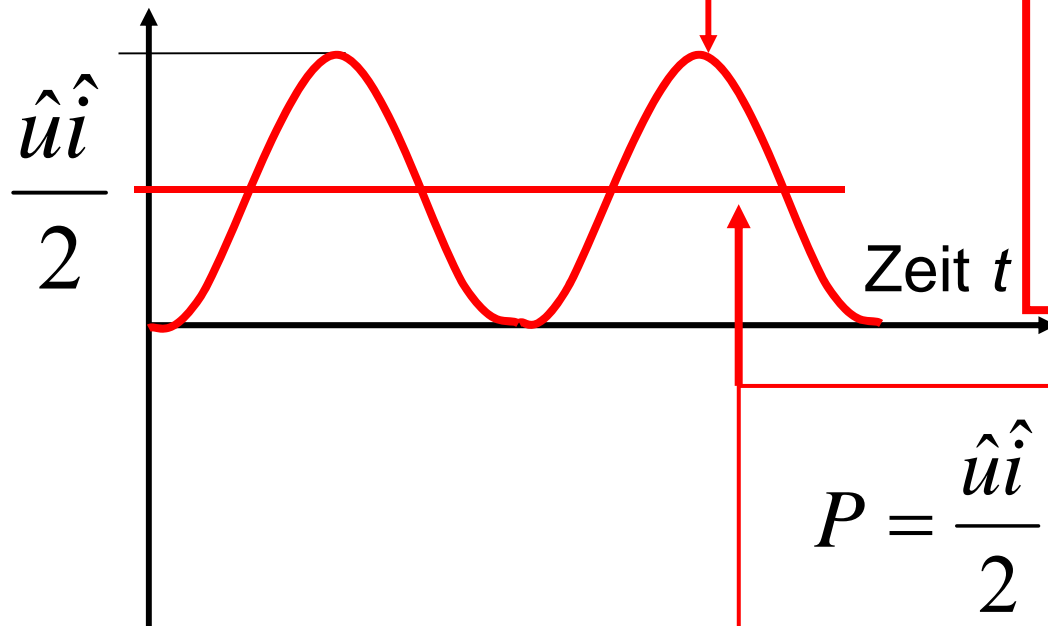


$$P = \frac{\hat{u}\hat{i}}{2} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} = UI$$

## 833 Theorie

Def. Effektivwerte:

$$p(t) = \hat{u}\hat{i} \cdot \sin^2(\omega t)$$



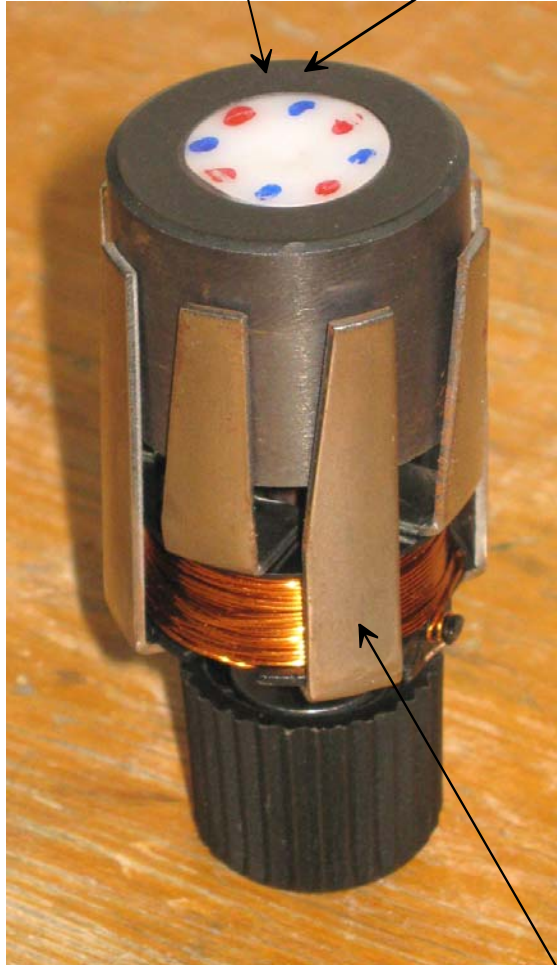
$$U_{eff} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} = \frac{NB \cdot bl\omega}{\sqrt{2}}$$

$$I_{eff} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$$

$$P = \frac{\hat{u}\hat{i}}{2} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} = UI$$

Permanent-  
Magnet  
(Oktopol)

Rotor

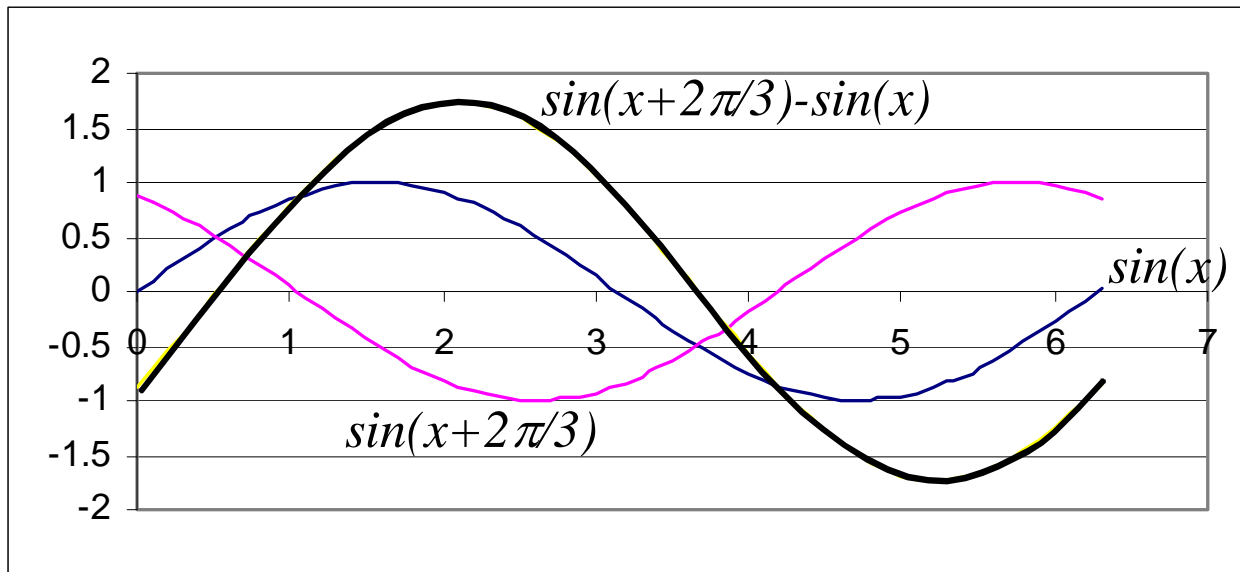
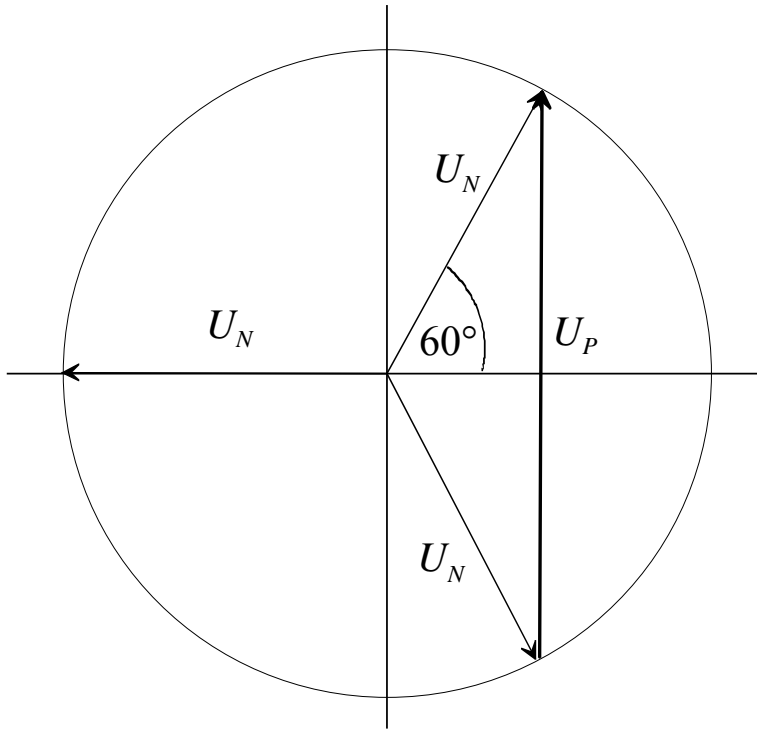


Stator  
mit Statorspule

Anschlüsse  
(3 Phasen)

# 833 Aufgaben

Drehstrom (3-Phasen)-  
Generator:



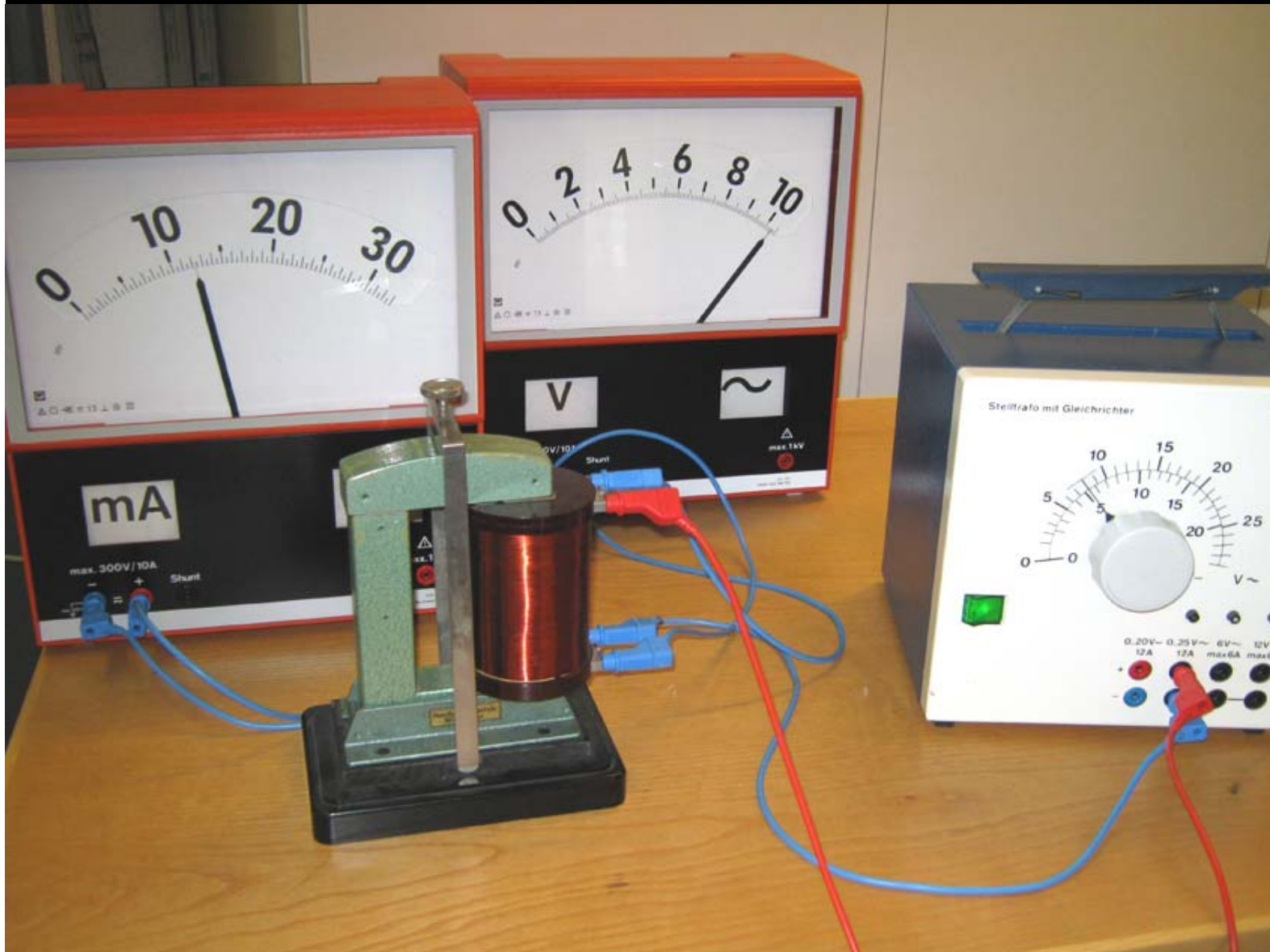
# 841 Induktivität von Spulen



## 841 Ziele

- Das Verhalten von Induktivitäten im Wechselstromkreis qualitativ und quantitativ beschreiben (modellieren) können
- Spannungsübersetzung bei Transformatoren berechnen können

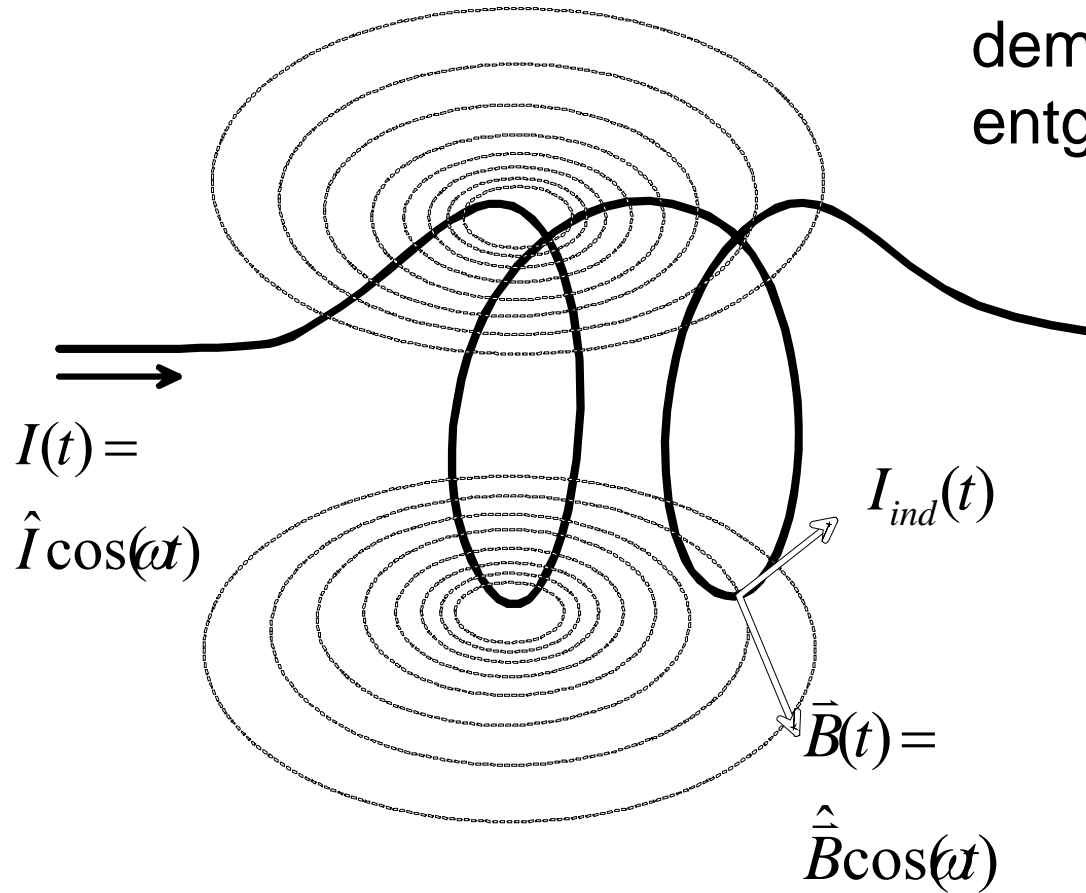
# 841 Experiment





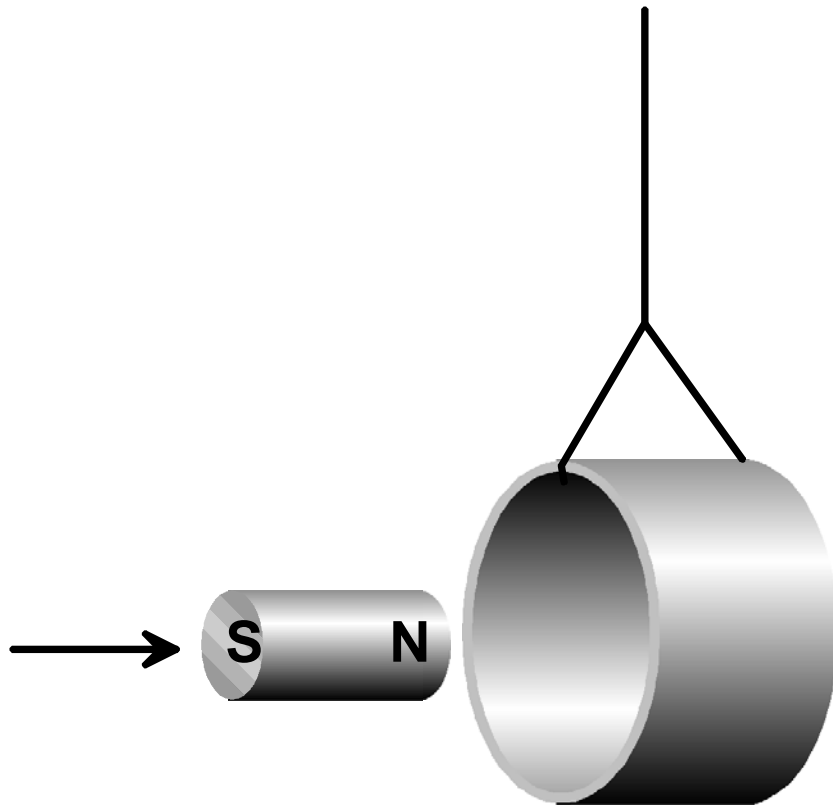
## 841 Experiment

Lenzsche Regel: Der induzierte Prozess wirkt dem induzierenden Prozess entgegen



## 841 Experiment

Lenzsche Regel: Der induzierte Prozess wirkt dem induzierenden Prozess entgegen



## 841 Theorie

$$L = NA \cdot \frac{\dot{B}}{\dot{I}} = NA \cdot \frac{dB}{dI}$$

Selbstinduktion einer Spule  
und Induktivität  $L$

## 841 Theorie

$$L = NA \cdot \frac{\dot{B}}{\dot{I}} = NA \cdot \frac{dB}{dI}$$

$$U_L = -L \frac{dI}{dt}$$

Selbstinduktion einer Spule  
und Induktivität  $L$

Spannung über Induktivität  
(gegeninduzierte Spannung)

## 841 Theorie

$$L = NA \cdot \frac{\dot{B}}{\dot{I}} = NA \cdot \frac{dB}{dI}$$

$$U_L = -L \frac{dI}{dt}$$

$$Z = \frac{U}{I} = \omega L$$

Selbstinduktion einer Spule  
und Induktivität  $L$

Spannung über Induktivität  
(gegeninduzierte Spannung)

Impedanz

## 841 Theorie

$$L = NA \cdot \frac{\dot{B}}{\dot{I}} = NA \cdot \frac{dB}{dI}$$

$$U_L = -L \frac{dI}{dt}$$

$$E_m = \frac{1}{2} LI^2$$

Selbstinduktion einer Spule  
und Induktivität  $L$

Spannung über Induktivität  
(gegeninduzierte Spannung)

gespeicherte Energie  $E_m$

## 841 Theorie

$$U(t) + U_L = 0$$

Verhalten von Strom und Spannung bei einer Spule an einer Wechselspannungsquelle

Ansatz zur Berechnung:  
Maschenregel

## 841 Theorie

$$U(t) + U_L = 0$$

$$\hat{u} \cdot \sin(\omega t)$$

$$= -U_L = +L \cdot \frac{dI}{dt}$$

Verhalten von Strom und Spannung bei einer Spule an einer Wechselspannungsquelle

Ansatz zur Berechnung:  
Maschenregel



## 841 Theorie

$$U(t) + U_L = 0$$

Verhalten von Strom und Spannung bei einer Spule an einer Wechselspannungsquelle

$$\hat{u} \cdot \sin(\omega t)$$

Ansatz zur Berechnung:  
Maschenregel

$$= -U_L = +L \cdot \frac{dI}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{\hat{u}}{L} \cdot \sin(\omega t)$$

## 841 Theorie

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\hat{u}}{L} \cdot \sin(\omega t)$$

Integration

$$I(t) = \int dI = \frac{\hat{u}}{L} \int \sin(\omega t) \cdot dt$$

## 841 Theorie

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\hat{u}}{L} \cdot \sin(\omega t)$$

Integration

$$\begin{aligned} I(t) &= \int dI = \frac{\hat{u}}{L} \int \sin(\omega t) \cdot dt \\ &= -\frac{\hat{u}}{\omega L} \cdot \cos(\omega t) = \hat{i} \cdot \cos(\omega t) \end{aligned}$$

## 841 Theorie

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\hat{u}}{L} \cdot \sin(\omega t)$$

Integration

$$I(t) = \int dI = \frac{\hat{u}}{L} \int \sin(\omega t) \cdot dt$$

$$= -\frac{\hat{u}}{\omega L} \cdot \cos(\omega t) = \hat{i} \cdot \cos(\omega t)$$

$$\frac{\hat{u}}{\omega L} = \hat{i} = \frac{\hat{u}}{Z}$$

## 841 Theorie

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\hat{u}}{L} \cdot \sin(\omega t)$$

Integration

$$\begin{aligned} I(t) &= \int dI = \frac{\hat{u}}{L} \int \sin(\omega t) \cdot dt \\ &= -\frac{\hat{u}}{\omega L} \cdot \cos(\omega t) = \hat{i} \cdot \cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} U(t) &= \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) \\ I(t) &= \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) \end{aligned} \right\} \varphi_1 - \varphi_2 = +\frac{\pi}{2}$$

## 841 Theorie

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\hat{u}}{L} \cdot \sin(\omega t)$$

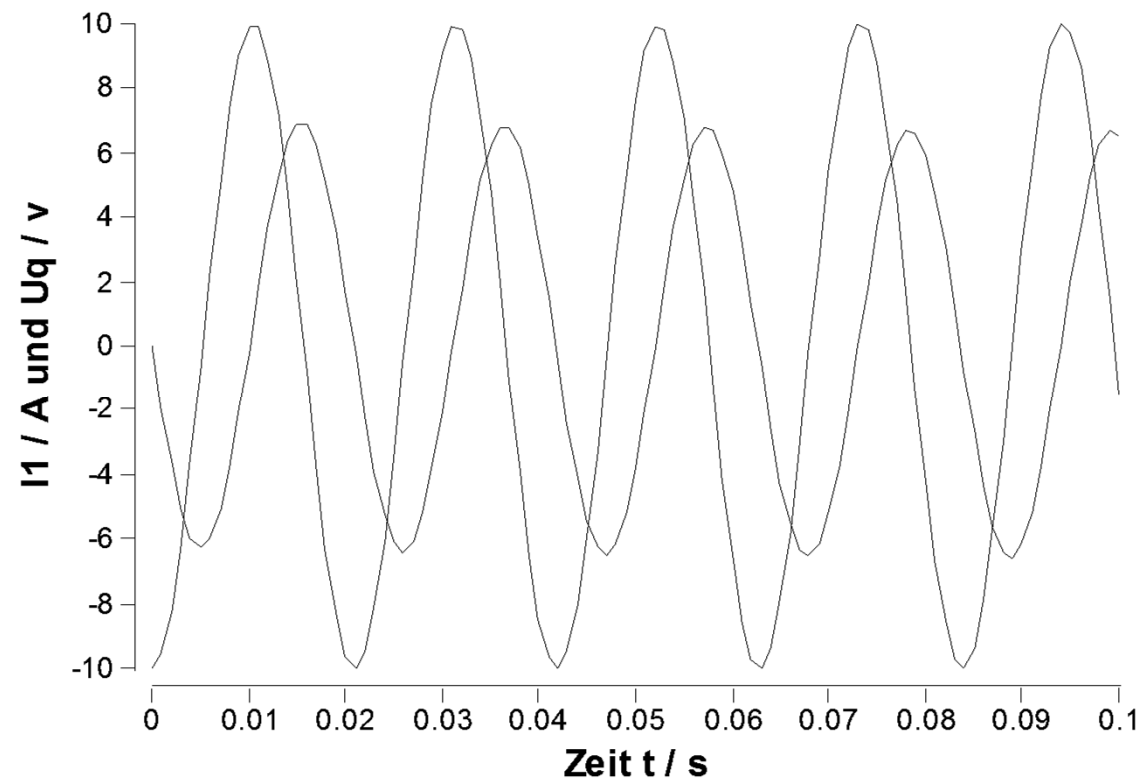
Integration

$$\begin{aligned} I(t) &= \int dI = \frac{\hat{u}}{L} \int \sin(\omega t) \cdot dt \\ &= -\frac{\hat{u}}{\omega L} \cdot \cos(\omega t) = \hat{i} \cdot \cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} U(t) &= \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) \\ I(t) &= \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) \end{aligned} \right\} \varphi_1 - \varphi_2 = +\frac{\pi}{2}$$

# 841 Theorie

Phasenverschiebung in  $RL$ -  
Glied auch von  $R$  abhängig





## 841 Theorie

Berechnung der Induktivität  
einer Spule:

$L$  ist Geometrie-abhängig

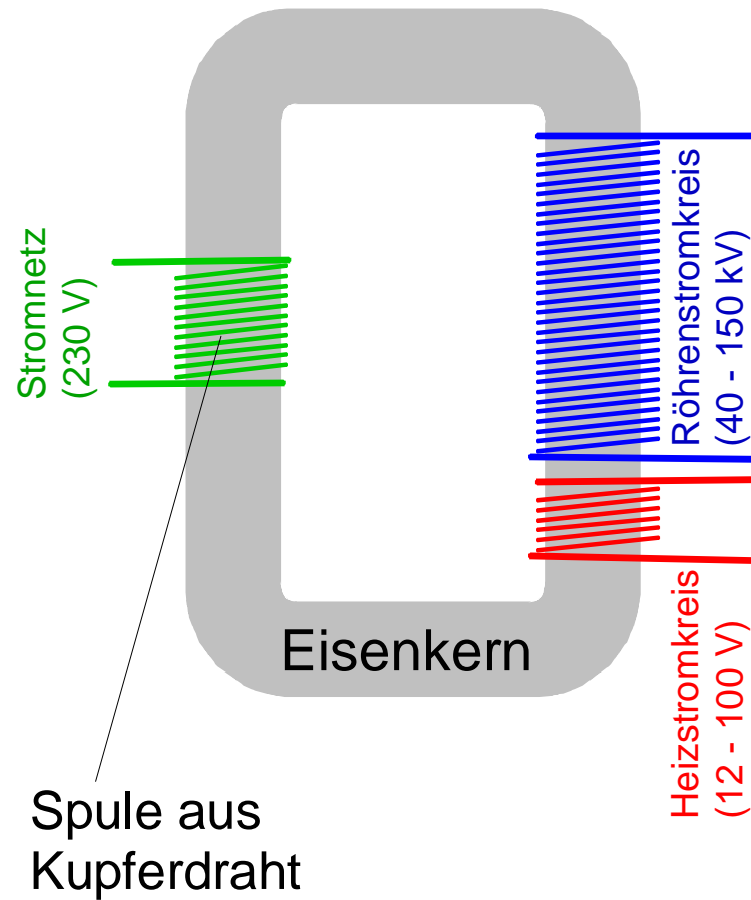
Für lange Spulen gilt:

$$L = \frac{\mu_r \mu_0 \cdot N^2 A_L}{l}$$



$$B_1(t) = B_2(t)$$

$$\dot{B}_1 = \dot{B}_2$$



## 841 Theorie

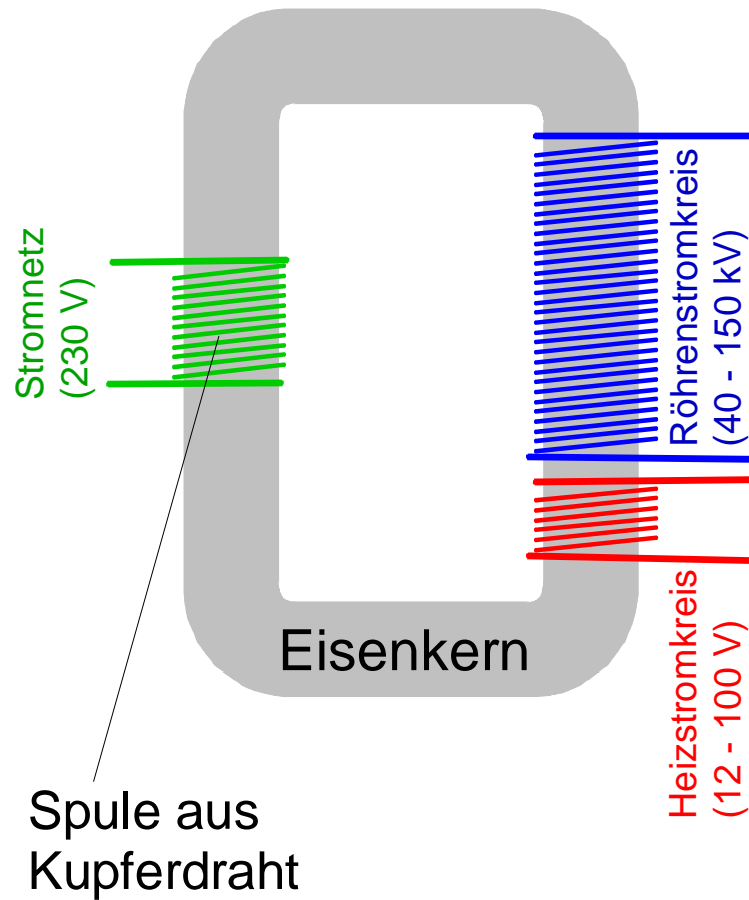
Transformator  
(Spannungswandler)

$$U_1 = -N_1 \cdot A_L \cdot \frac{dB}{dt}$$

$$U_2 = -N_2 \cdot A_L \cdot \frac{dB}{dt}$$

$$B_1(t) = B_2(t)$$

$$\dot{B}_1 = \dot{B}_2$$



## 841 Theorie

Transformator  
(Spannungswandler)

$$U_1 = -N_1 \cdot A_L \cdot \frac{dB}{dt}$$

$$U_2 = -N_2 \cdot A_L \cdot \frac{dB}{dt}$$



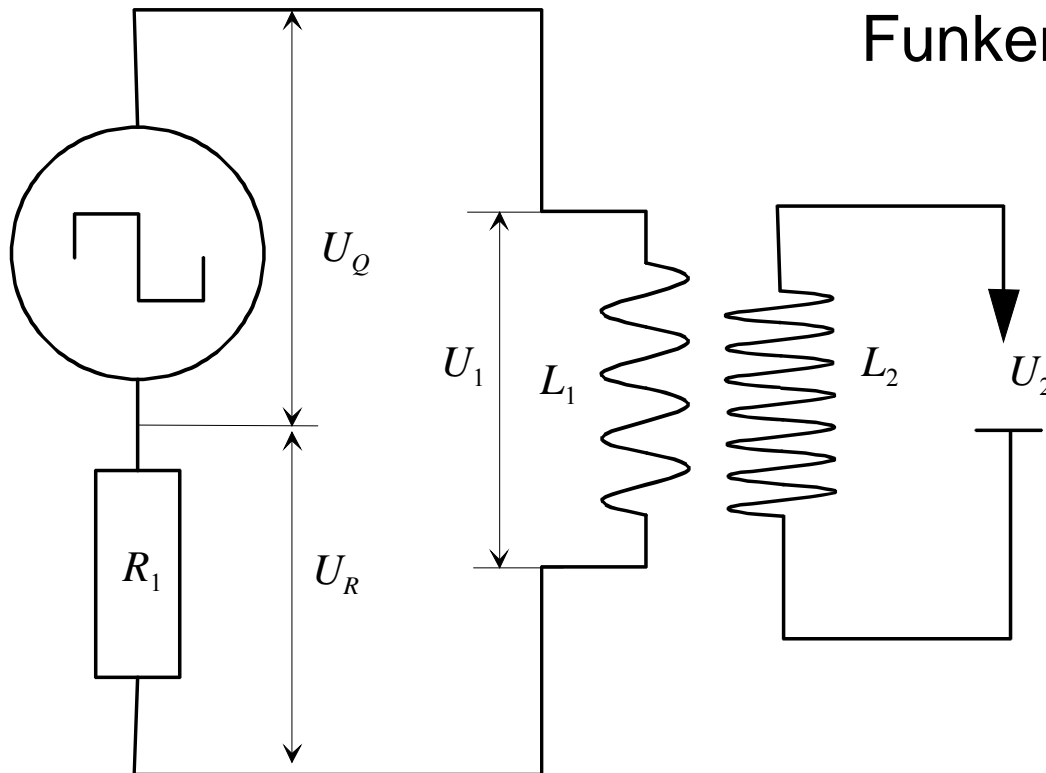
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}$$



# 841 Theorie

Modellierung von Spulen und  
Transformatoren

(Ein- und Ausschaltprozesse:  
Funkeninduktor)

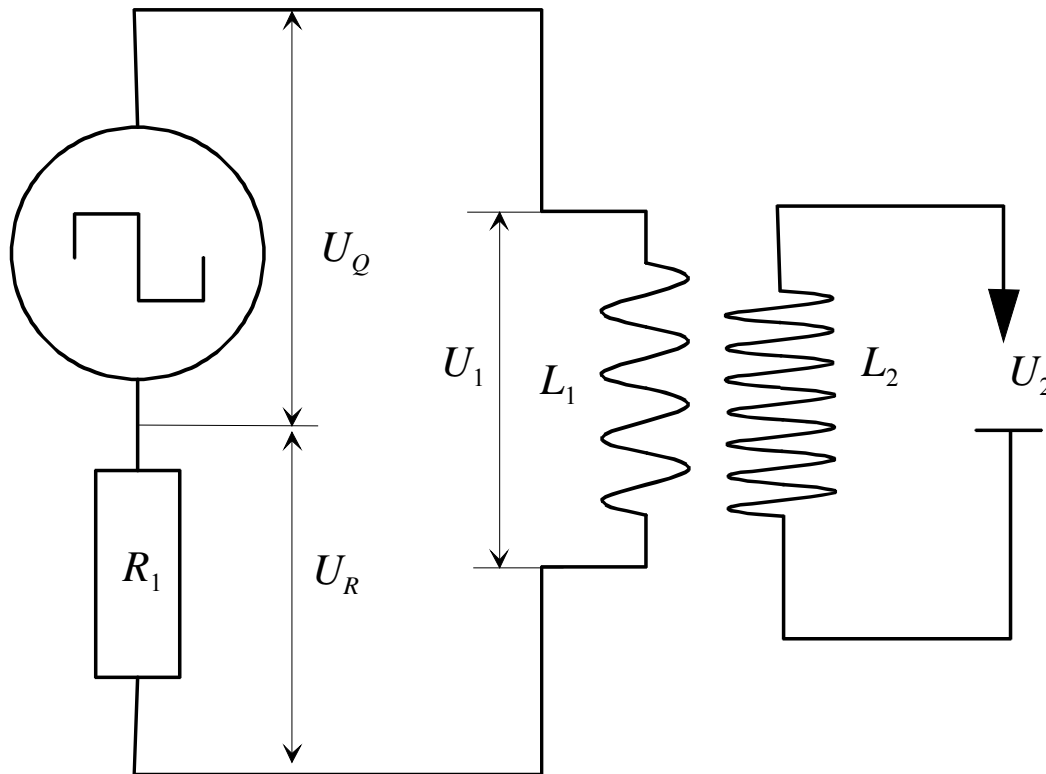


## 841 Theorie

Modellierung von Spulen und  
Transformatoren

Ansatz: Maschenregel

$$U_Q + U_R + U_1 = 0$$
$$= U_Q - I_1 R_1 - L_1 \dot{I}$$



$$U_Q + U_R + U_1 = 0$$

$$= U_Q - I_1 R_1 - L_1 \dot{I}$$

$$\rightarrow L_1 \dot{I} = U_Q - I_1 R_1$$

## 841 Theorie

Modellierung von Spulen und  
Transformatoren

Ansatz: Maschenregel

$$U_Q + U_R + U_1 = 0$$

$$= U_Q - I_1 R_1 - L_1 \dot{I}$$

$$L_1 \dot{I} = U_Q - I_1 R_1$$

$$\rightarrow \frac{dI_1}{dt} = \frac{U_Q}{L_1} - \frac{R_1}{L_1} I_1$$

## 841 Theorie

Modellierung von Spulen und Transformatoren

Ansatz: Maschenregel

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{U_0}{L_1} - \frac{R_1}{L_1} I_1$$

## 841 Aufgaben

Lösen durch **Substitution**,  
Separation und Integration

Substitution:

$$J(t) = \frac{U_0}{L_1} - \frac{R_1}{L_1} \cdot I_1(t)$$

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{R_1}{L_1} \cdot \frac{dI_1}{dt}$$



$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{U_\varrho}{L_1} - \frac{R_1}{L_1} I_1$$

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{R_1}{L_1} \cdot J$$

## 841 Aufgaben

Lösen durch **Substitution**,  
Separation und Integration

Substitution:

$$J(t) = \frac{U_\varrho}{L_1} - \frac{R_1}{L_1} \cdot I_1(t)$$

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{R_1}{L_1} \cdot \frac{dI_1}{dt}$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{U_0}{L_1} - \frac{R_1}{L_1} I_1$$

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{R_1}{L_1} \cdot J$$

$$J(t) = J_0 \cdot e^{-\frac{R_1}{L_1} \cdot t}$$

## 841 Aufgaben

Lösen durch Substitution,  
**Separation** und **Integration**

Substitution:

$$J(t) = \frac{U_0}{L_1} - \frac{R_1}{L_1} \cdot I_1(t)$$

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{R_1}{L_1} \cdot \frac{dI_1}{dt}$$

## 841 Aufgaben

$$J(t) = J_0 \cdot e^{-\frac{R_1}{L_1} \cdot t}$$

Rücksubstitution

$$I(t) = \frac{U_0}{R_1} - \left( \frac{U_0}{R_1} - I_1(0) \right) \cdot e^{-\frac{R_1}{L_1} \cdot t}$$

## 841 Aufgaben

Einschaltprozess

$$I_1(0) = 0$$

$$I(t) = \frac{U_Q}{R_1} - \left( \frac{U_Q}{R_1} - I_1(0) \right) \cdot e^{-\frac{R_1}{L_1} \cdot t}$$

$$\longrightarrow I_1(t) = \frac{U_Q}{R_1} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{R_1}{L_1} \cdot t} \right)$$

## 841 Aufgaben

Ausschaltprozess

$$U_Q = 0$$

$$I(t) = \frac{U_Q}{R_1} - \left( \frac{U_Q}{R_1} - I_1(0) \right) \cdot e^{-\frac{R_1}{L_1} \cdot t}$$

$$\longrightarrow I_1(t) = I_1(0) \cdot e^{-\frac{R_1}{L_1} \cdot t}$$

## 841 Aufgaben

Ausschaltprozess

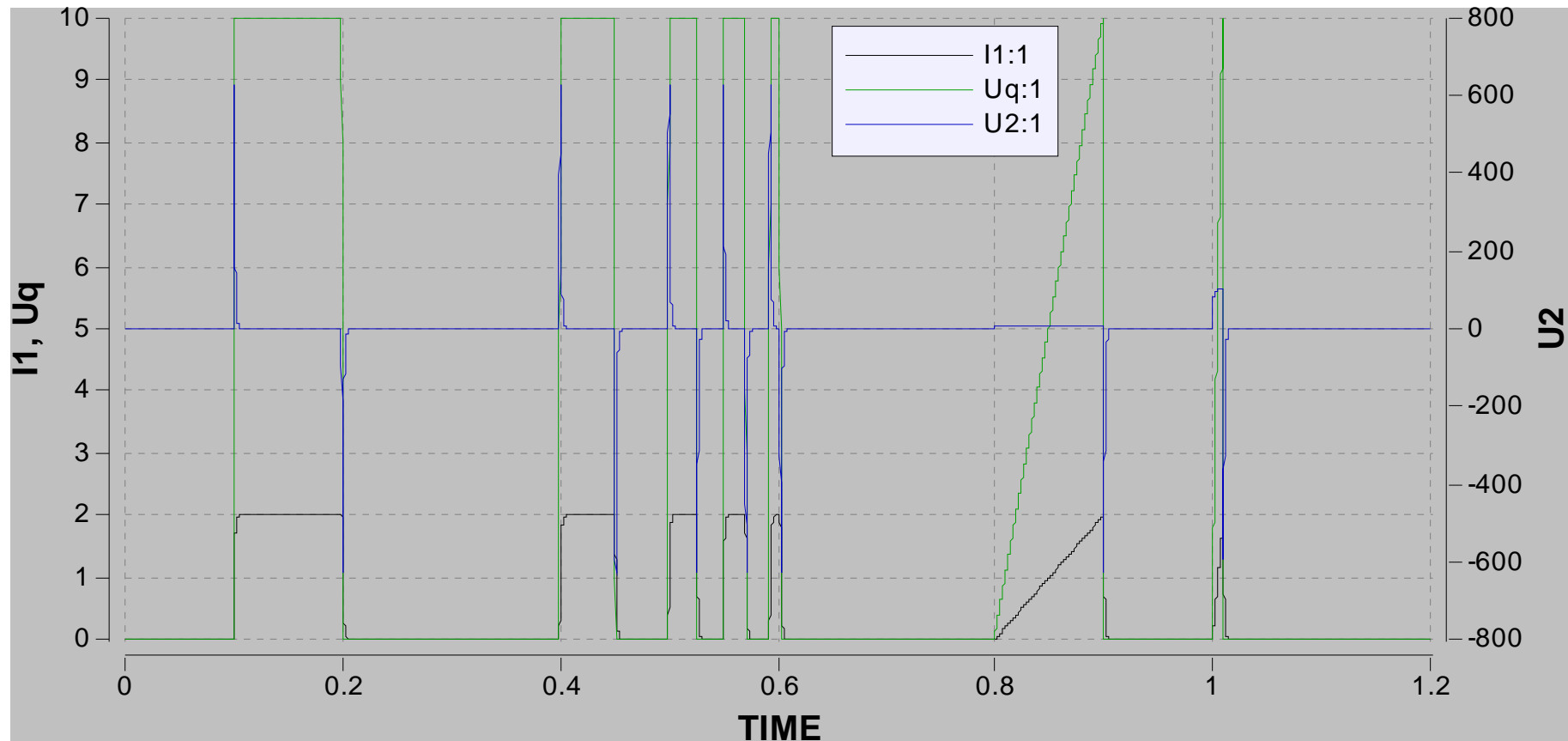
$$U_Q = 0$$

$$I(t) = \frac{U_Q}{R_1} - \left( \frac{U_Q}{R_1} - I_1(0) \right) \cdot e^{-\frac{R_1}{L_1} \cdot t}$$

$$\longrightarrow I_1(t) = I_1(0) \cdot e^{-\frac{R_1}{L_1} \cdot t}$$

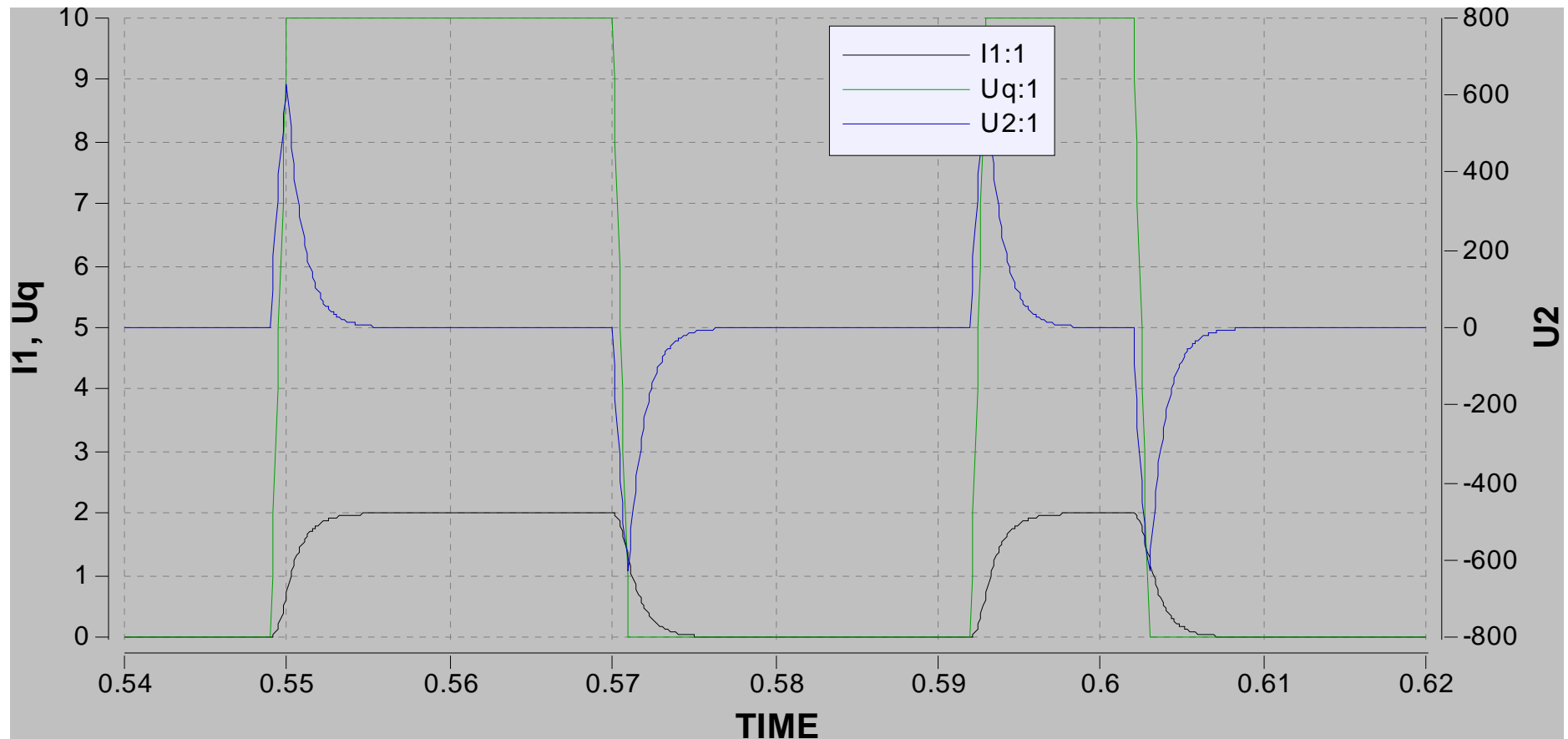
# 841 Experiment

## Ein- und Ausschaltprozess



# 841 Experiment

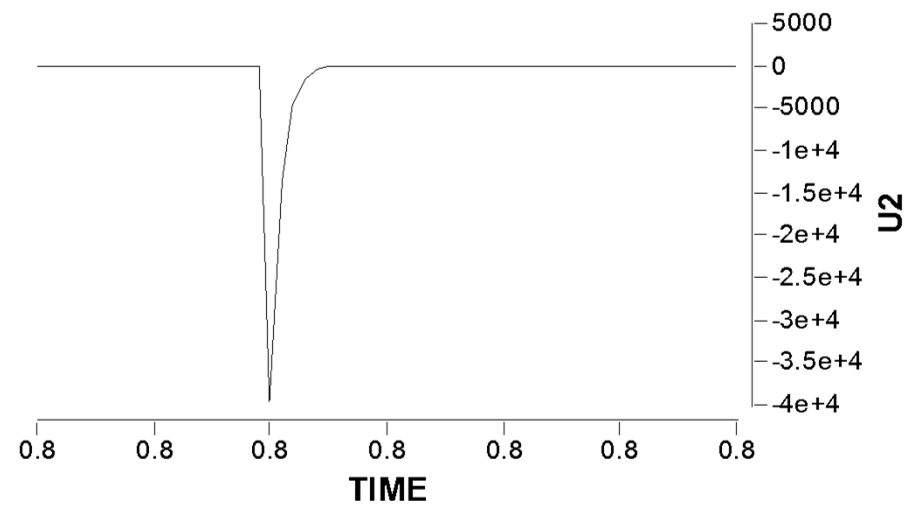
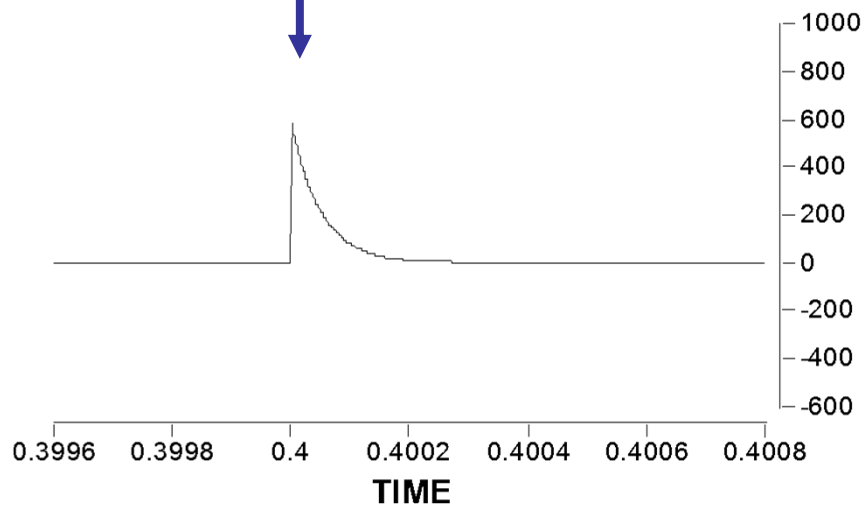
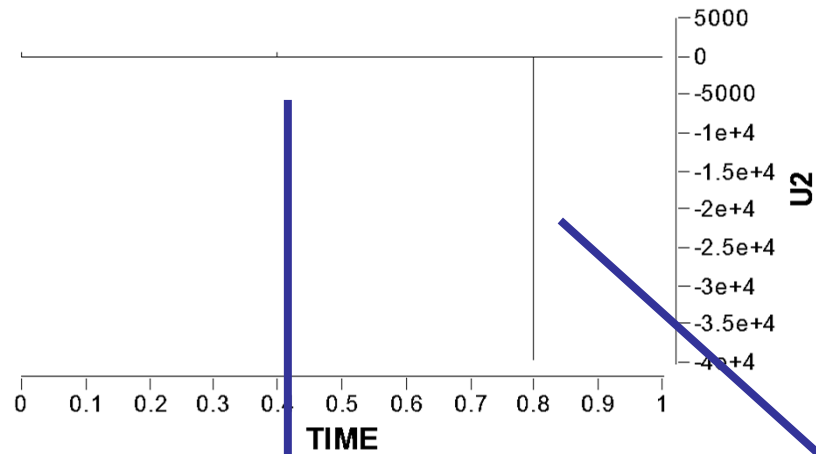
## Ein- und Ausschaltprozess





# 841 Experiment

Ein- und Ausschaltprozess  
Funkeninduktor: Nicht  
Spannung sondern Strom  
wird geschaltet!



# **842 Impedanz von Kondensatoren**



## 842 Ziele

- Verhalten von Kondensatoren im Wechselstromkreis qualitativ und quantitativ beschreiben (modellieren) können
- Impedanz eines Kondensators berechnen können

## 842 Theorie

Impedanz  $Z$

$$Z = \frac{1}{\omega C}$$

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}}$$

## 842 Theorie

$$U(t) + U_C = 0$$

Spannung und Strom bei  
Kapazität an  
Wechselspannungsquelle:

Ansatz: Maschenregel

$$U(t) = \hat{u} \sin(\omega t)$$

$$U_C = -Q / C$$

## 842 Theorie

$$U(t) + U_C = 0$$

Spannung und Strom bei  
Kapazität an  
Wechselspannungsquelle:

Ansatz: Maschenregel

$$U(t) = \hat{u} \sin(\omega t)$$

$$U_C = -Q / C$$

$$\longrightarrow \hat{u} \sin(\omega t) = \frac{Q(t)}{C}$$

## 842 Theorie

$$\hat{u} \sin(\omega t) = \frac{Q(t)}{C}$$

Ableiten

$$I = \frac{d}{dt} [C\hat{u} \cdot \sin(\omega t)] = C\hat{u}\omega \cdot \cos(\omega t)$$

## 842 Theorie

$$\hat{u} \sin(\omega t) = \frac{Q(t)}{C}$$

Ableiten

$$\begin{aligned} I &= \frac{d}{dt} [C\hat{u} \cdot \sin(\omega t)] = C\hat{u}\omega \cdot \cos(\omega t) \\ &= \hat{i} \cdot \cos(\omega t) = \hat{i} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$



## 842 Theorie

$$\hat{u} \sin(\omega t) = \frac{Q(t)}{C}$$

Ableiten

$$I = \frac{d}{dt} [C\hat{u} \cdot \sin(\omega t)] = C\hat{u}\omega \cdot \cos(\omega t)$$

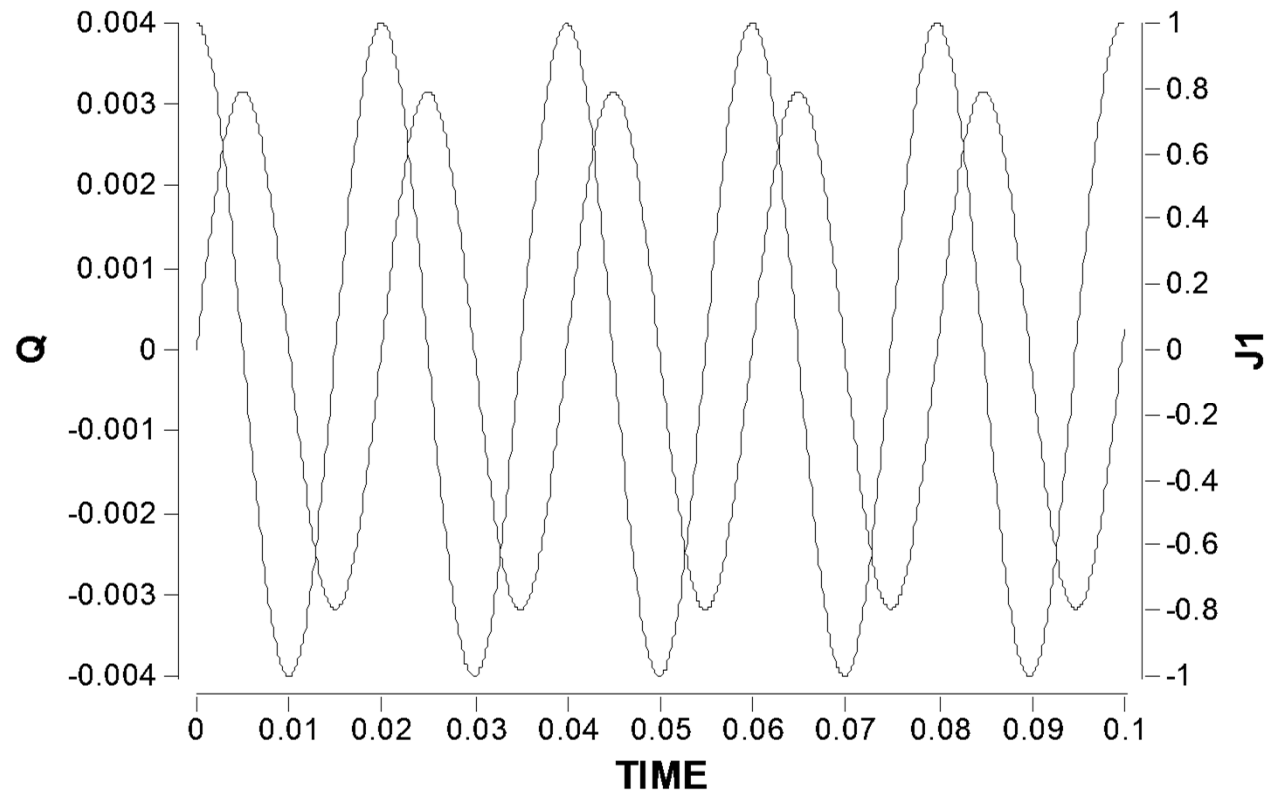
$$= \hat{i} \cdot \cos(\omega t) = \hat{i} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\rightarrow \hat{i} = C\omega \cdot \hat{u} = \frac{\hat{u}}{Z}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$$

# 842 Theorie

Phasenverschiebung in  $RC$ -  
Glied auch von  $R$  abhängig!



# 843 Schwingkreis



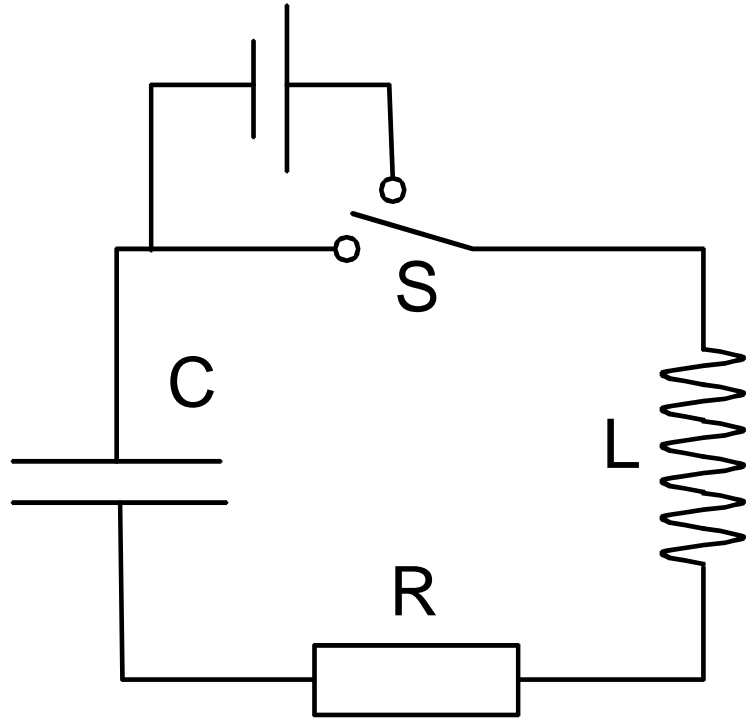
## 843 Ziele

- elektrische Schwingkreise (RCL-Glieder) qualitativ und quantitativ beschreiben (modellieren) können
- Impedanz und Resonanz- bzw. Eigenfrequenz berechnen können

## 843 Theorie

Gesucht:  $Q(t)$  bzw  $U_C(t)$

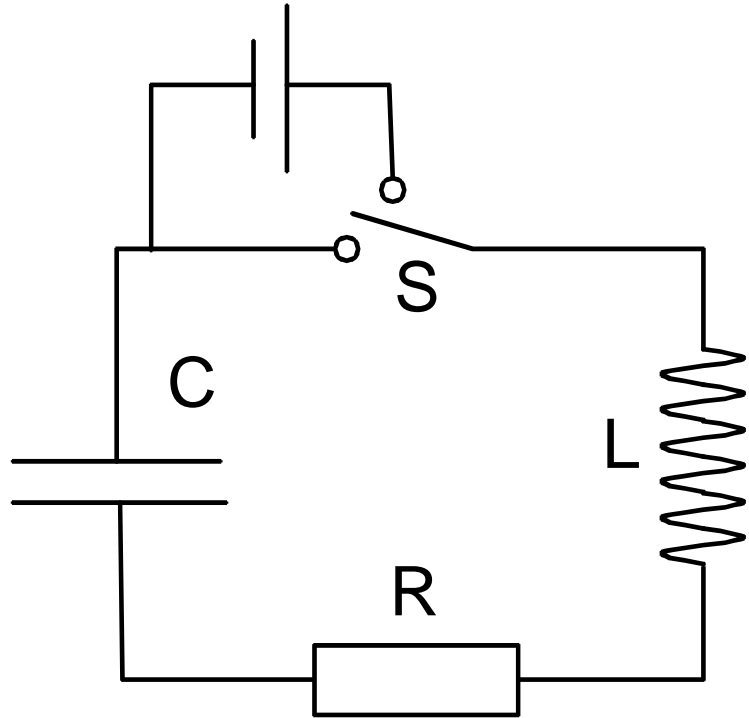
Ansatz?



## 843 Theorie

Gesucht:  $Q(t)$  bzw  $U_C(t)$

Ansatz: Maschenregel

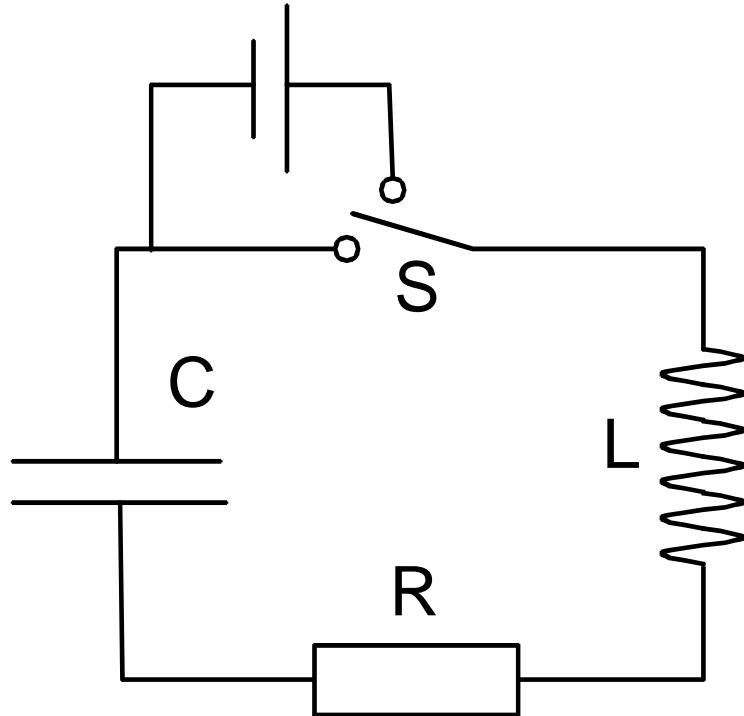


$$\begin{aligned}\sum_k I_k R_k &= \sum_k U_k = \\ &= U_C + U_R + U_L = 0\end{aligned}$$

## 843 Theorie

Gesucht:  $Q(t)$  bzw  $U_C(t)$

Ansatz: Maschenregel

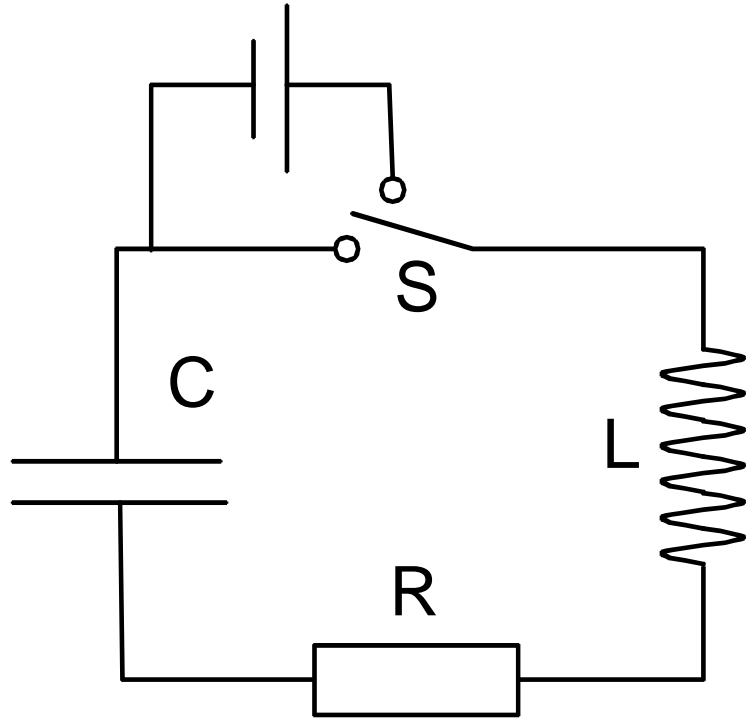


$$\begin{aligned}\sum_k I_k R_k &= \sum_k U_k = \\ &= U_C + U_R + U_L = 0\end{aligned}$$

$$\frac{Q}{C} + RI + L \frac{dI}{dt} = 0$$

## 843 Theorie

Zusammenhang zwischen  
Ladung und Strom



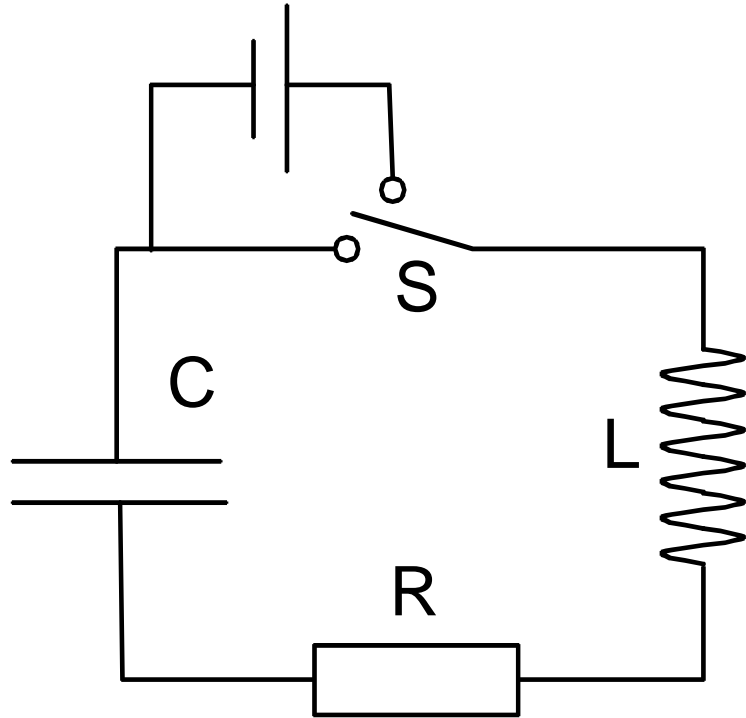
$$\frac{Q}{C} + RI + L \frac{dI}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2 Q}{dt^2} = -\frac{Q}{LC} - \frac{R}{L} \cdot \frac{dQ}{dt}$$



## 843 Theorie

Spezialfall:  $R = 0$



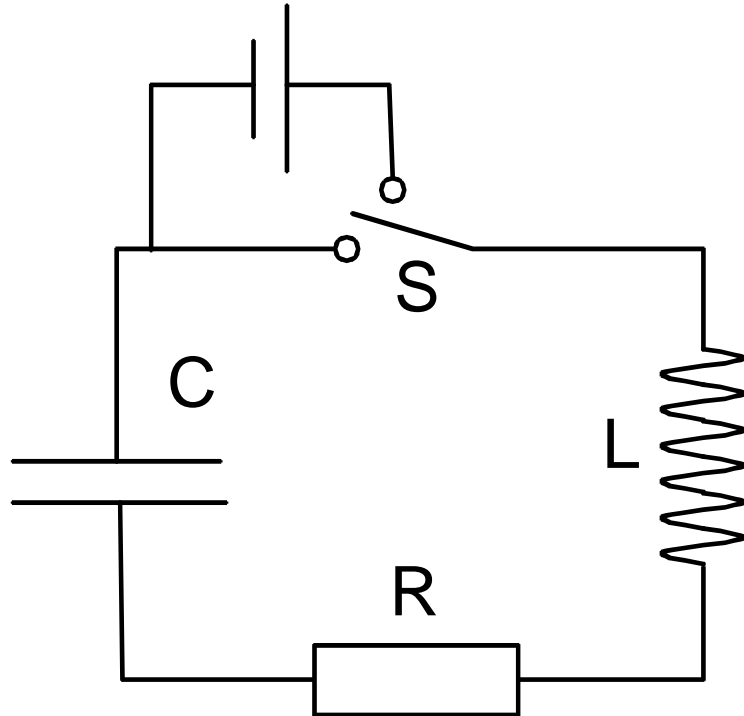
$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = -\frac{Q}{LC} - \frac{R}{L} \cdot \frac{dQ}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{d^2 Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC} \cdot Q$$

## 843 Theorie

Spezialfall:  $R = 0$

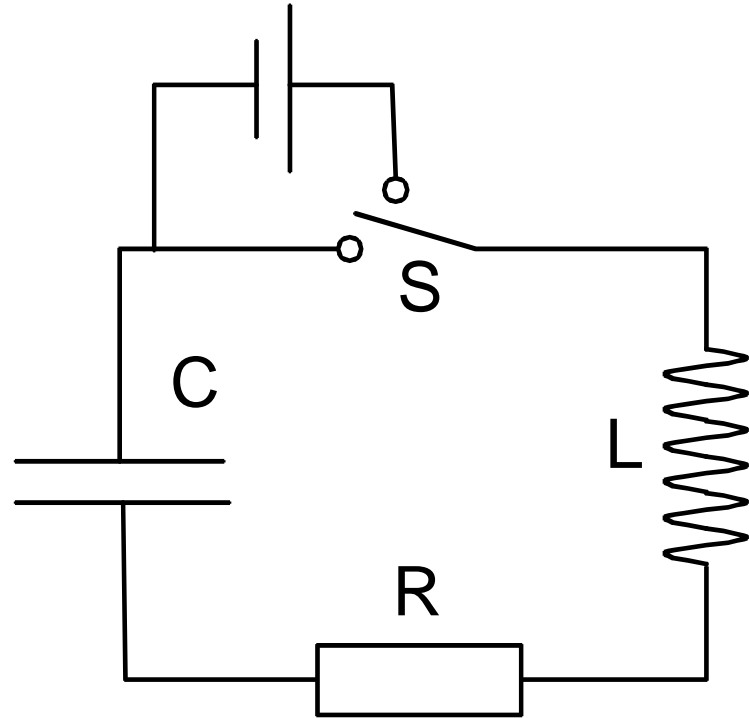
Lösung: Ladung oszilliert



$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC} \cdot Q$$

$$\rightarrow Q(t) = \hat{Q} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

## 843 Theorie



Mit Dämpfung ( $R > 0$ , analog 413)

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = -\frac{Q}{LC} - \frac{R}{L} \cdot \frac{dQ}{dt}$$

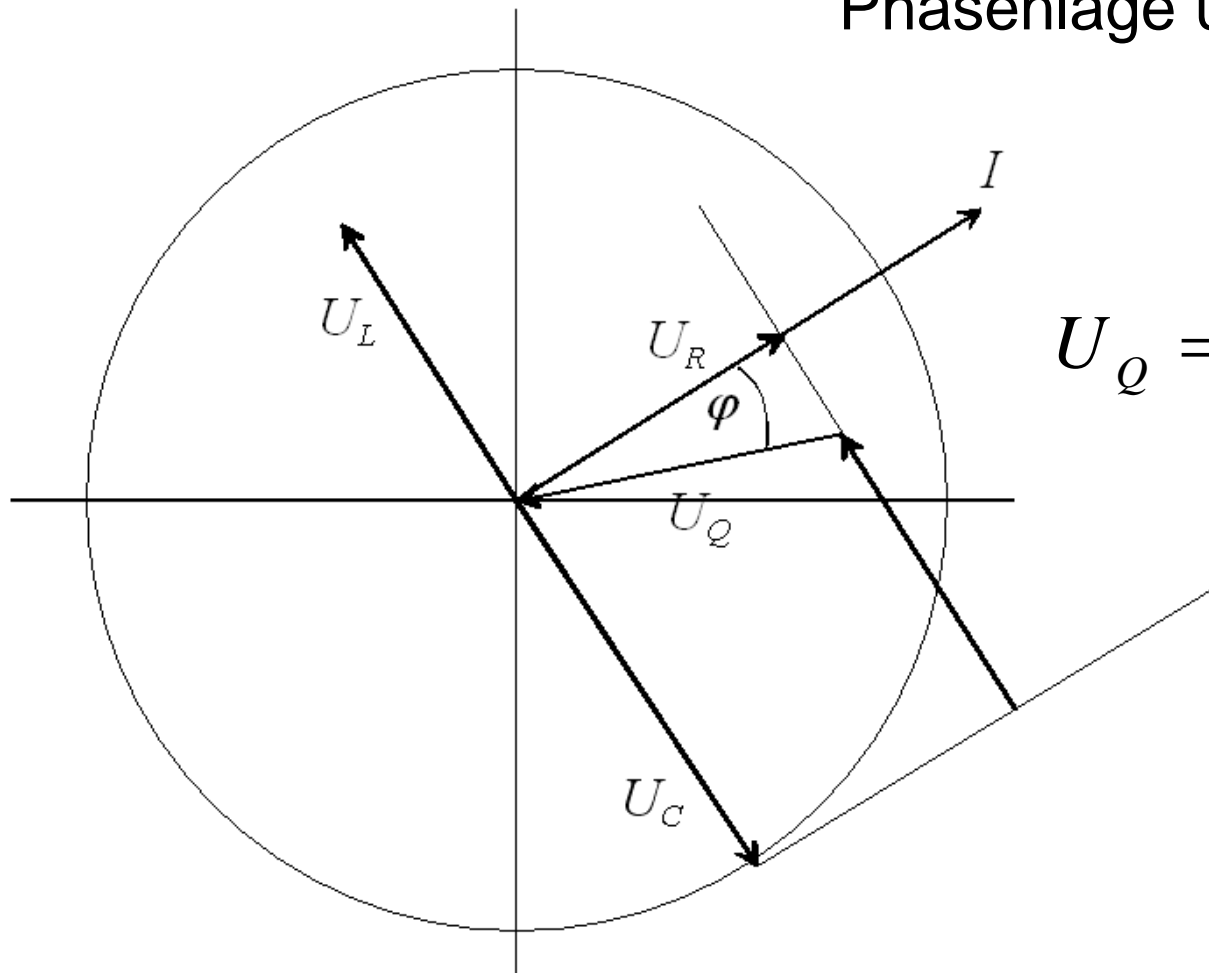
$$U(t) = \hat{u} \cdot e^{-\frac{R}{2L} \cdot t} \cdot \sin(\omega t)$$



$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_0^2 - \lambda^2 \\ &= \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 \end{aligned}$$

## 843 Theorie

### Phasenlage und Impedanz

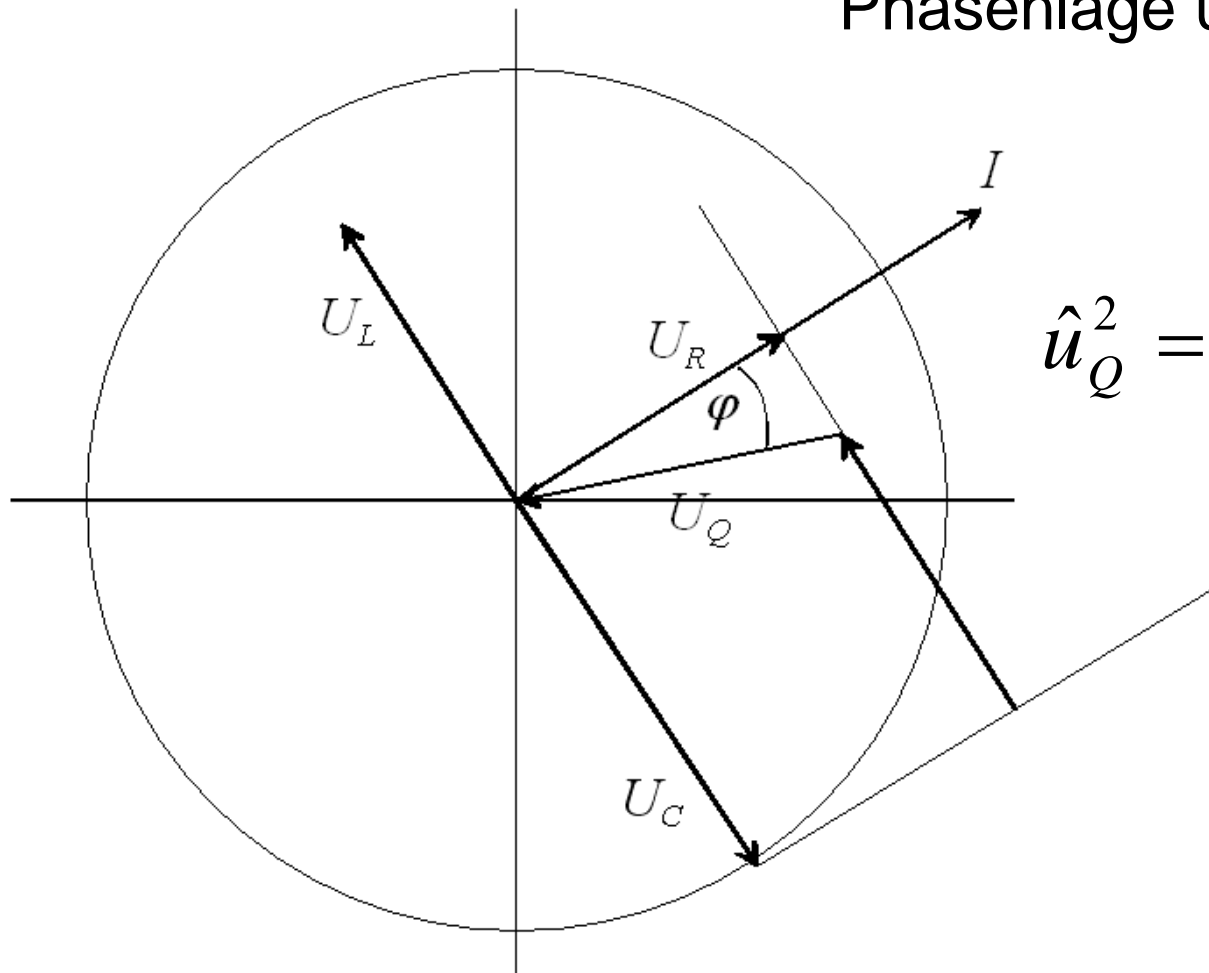


?

$$U_Q = U_R + U_C + U_L$$

## 843 Theorie

### Phasenlage und Impedanz



$$\hat{u}_Q^2 = \hat{u}_R^2 + (\hat{u}_L - \hat{u}_C)^2$$

## 843 Theorie

### Phasenlage und Impedanz

$$Z = \frac{\hat{u}_Q}{\hat{i}} = \frac{\sqrt{\hat{u}_R^2 + (\hat{u}_L - \hat{u}_C)^2}}{\hat{i}}$$
$$= \sqrt{\frac{\hat{u}_R^2}{\hat{i}^2} + \left( \frac{\hat{u}_L}{\hat{i}} - \frac{\hat{u}_C}{\hat{i}} \right)^2}$$

$$\hat{u}_Q^2 = \hat{u}_R^2 + (\hat{u}_L - \hat{u}_C)^2$$

## 843 Theorie

### Phasenlage und Impedanz

$$Z = \frac{\hat{u}_Q}{\hat{i}} = \frac{\sqrt{\hat{u}_R^2 + (\hat{u}_L - \hat{u}_C)^2}}{\hat{i}}$$

$$= \sqrt{\frac{\hat{u}_R^2}{\hat{i}^2} + \left( \frac{\hat{u}_L}{\hat{i}} - \frac{\hat{u}_C}{\hat{i}} \right)^2}$$

$$= \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

$$\hat{u}_Q^2 = \hat{u}_R^2 + (\hat{u}_L - \hat{u}_C)^2$$

## 843 Theorie

### Phasenlage und Impedanz

$$Z = \frac{\hat{u}_Q}{\hat{i}} = \frac{\sqrt{\hat{u}_R^2 + (\hat{u}_L - \hat{u}_C)^2}}{\hat{i}}$$

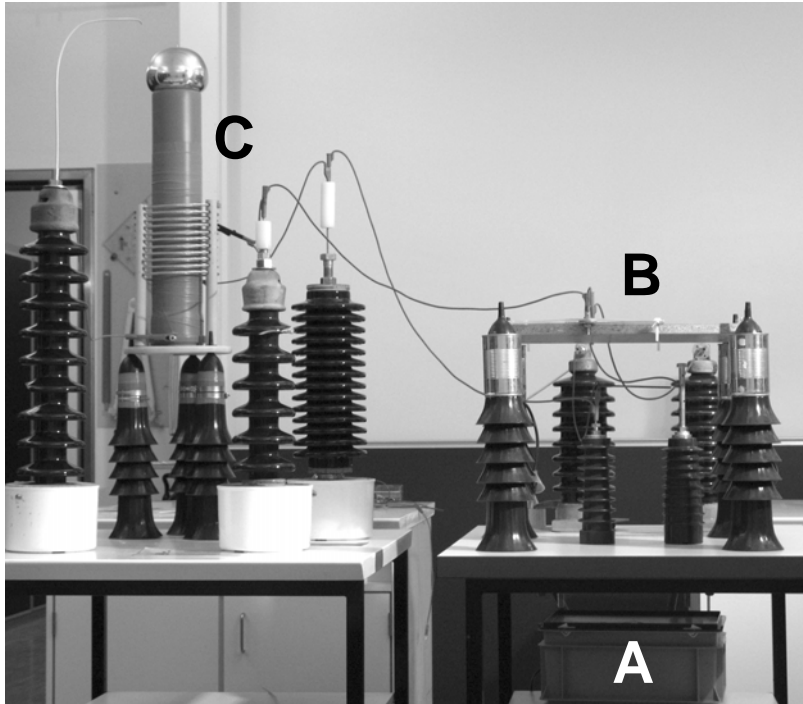
$$= \sqrt{\frac{\hat{u}_R^2}{\hat{i}^2} + \left( \frac{\hat{u}_L}{\hat{i}} - \frac{\hat{u}_C}{\hat{i}} \right)^2}$$

$$= \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

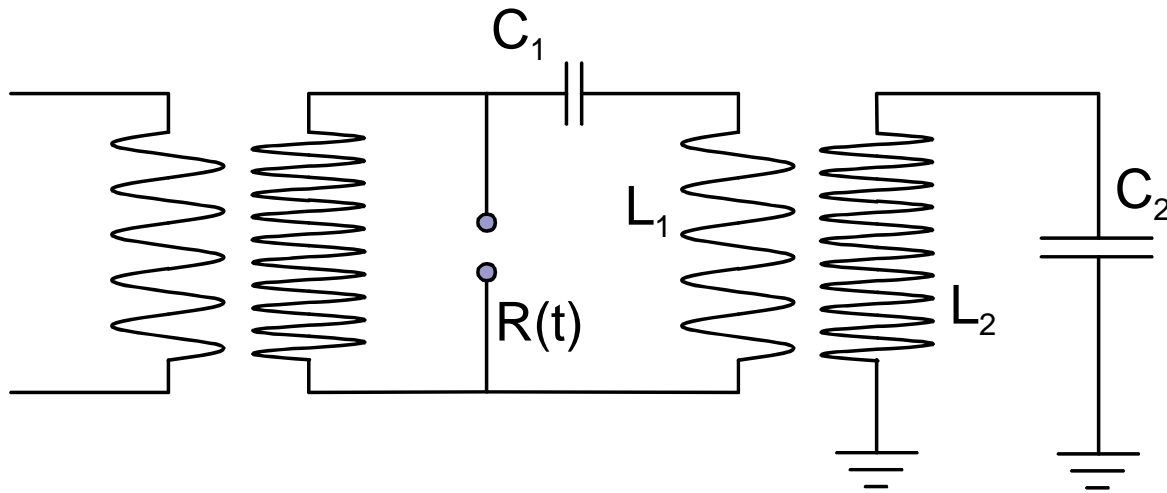
$$\hat{u}_Q^2 = \hat{u}_R^2 + (\hat{u}_L - \hat{u}_C)^2$$

$$\tan \varphi = \frac{\hat{u}_L - \hat{u}_C}{\hat{u}_R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$



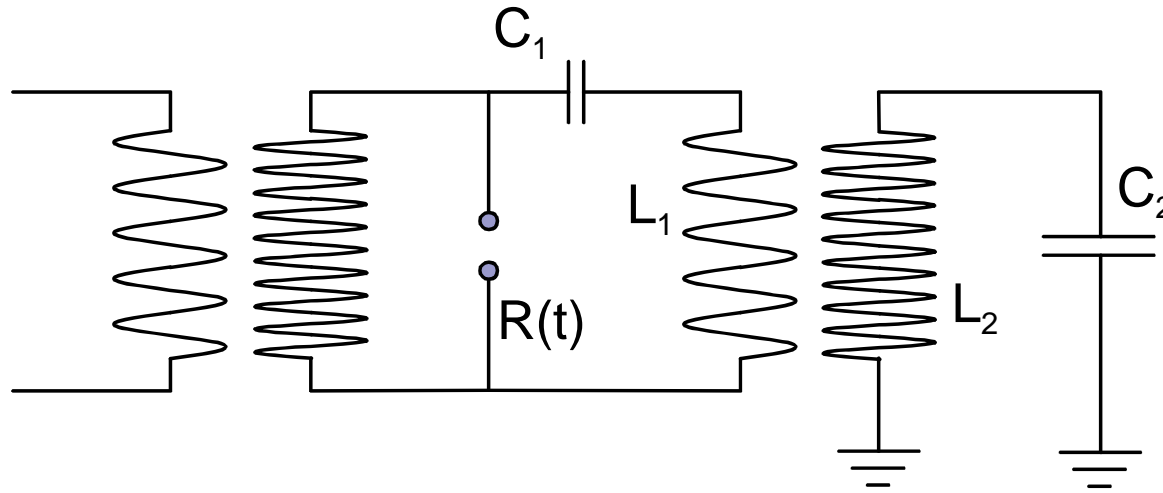


## 843 Experiment Tesla-Transformator



## 843 Experiment

### Tesla-Transformator



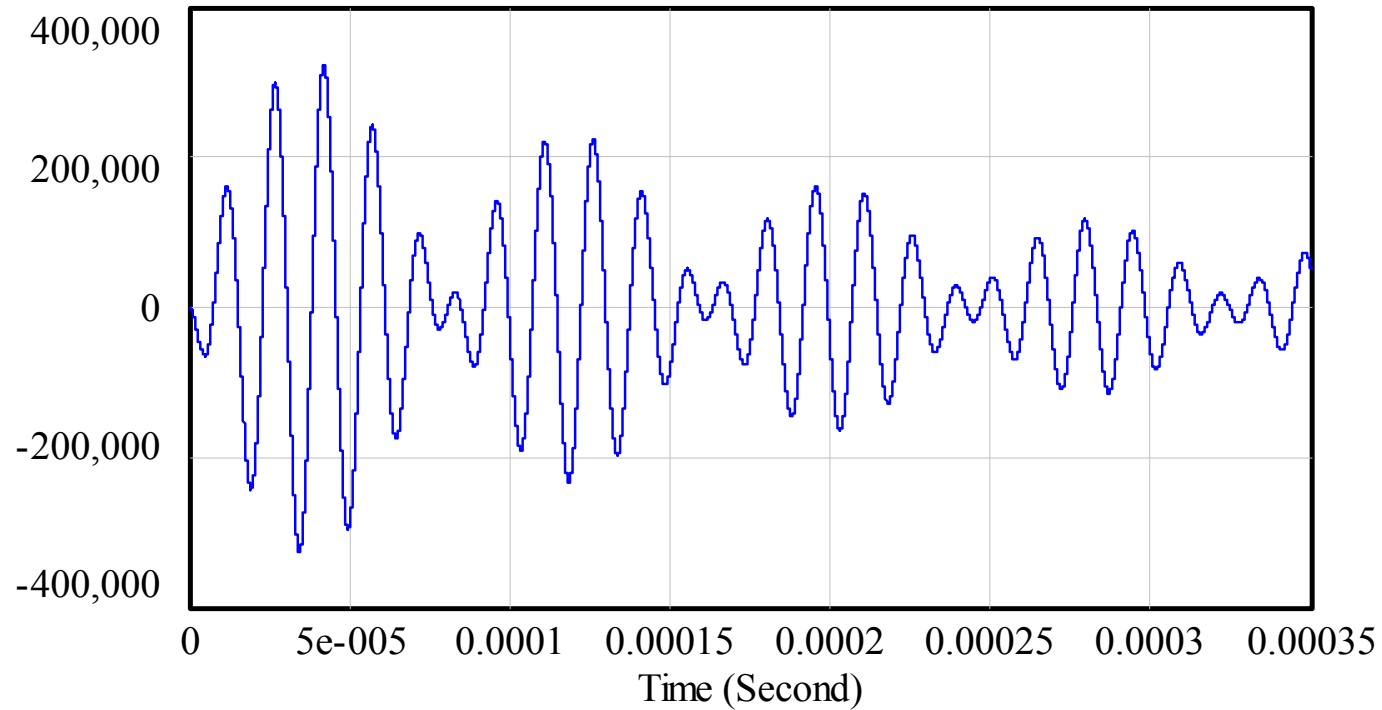
$$\frac{d^2 Q_1}{dt^2} = -\frac{1}{L_1 C_1} \cdot Q_1 - \frac{R_1}{L_1} \cdot \frac{dQ_1}{dt} - \frac{M}{L_1} \frac{d^2 Q_2}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 Q_2}{dt^2} = -\frac{1}{L_2 C_2} \cdot Q_2 - \frac{R_2}{L_2} \cdot \frac{dQ_2}{dt} - \frac{M}{L_2} \frac{d^2 Q_1}{dt^2}$$

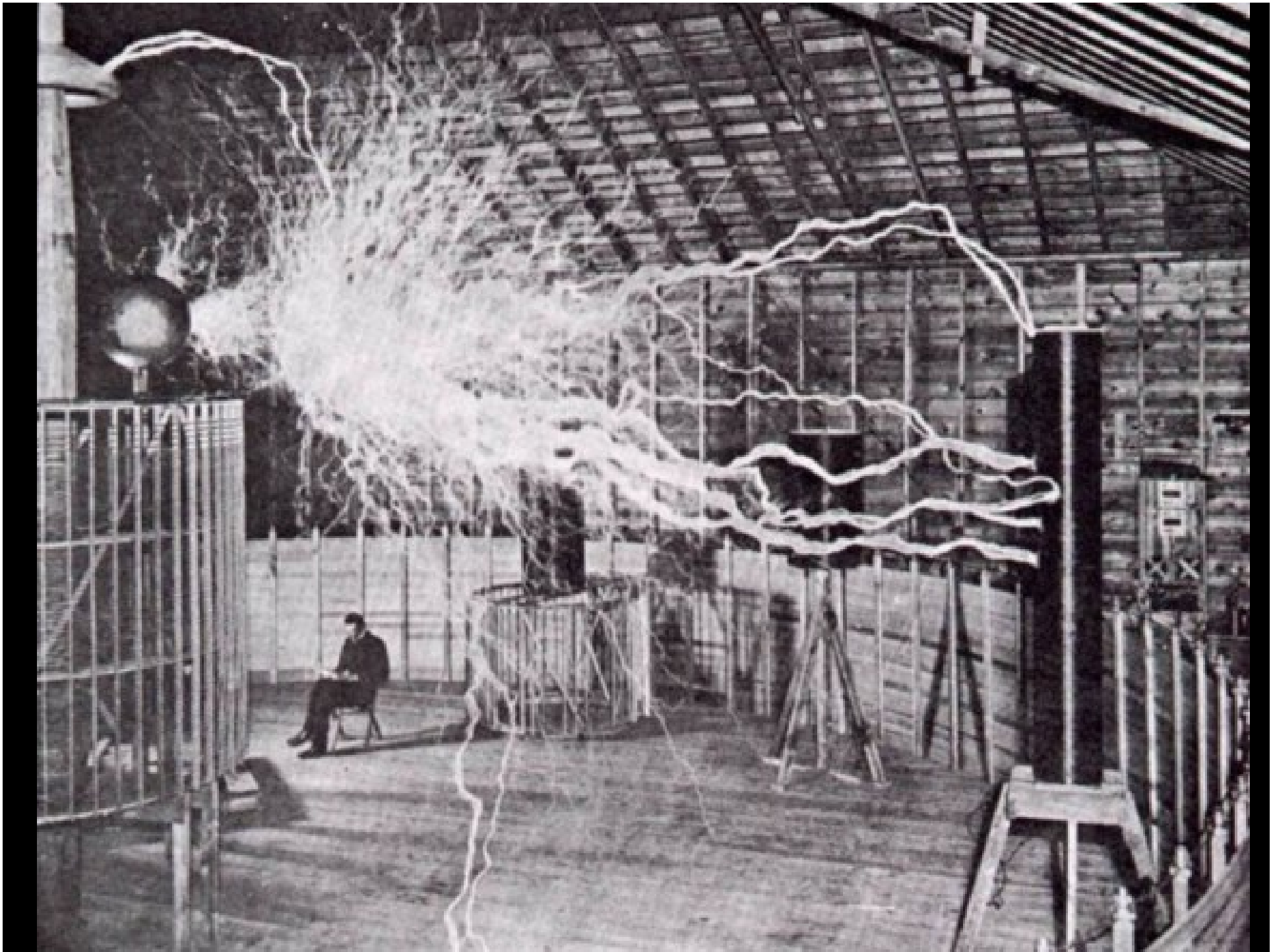
# 843 Experiment

## Tesla-Transformer

U2



U2 : Current ————— Volts

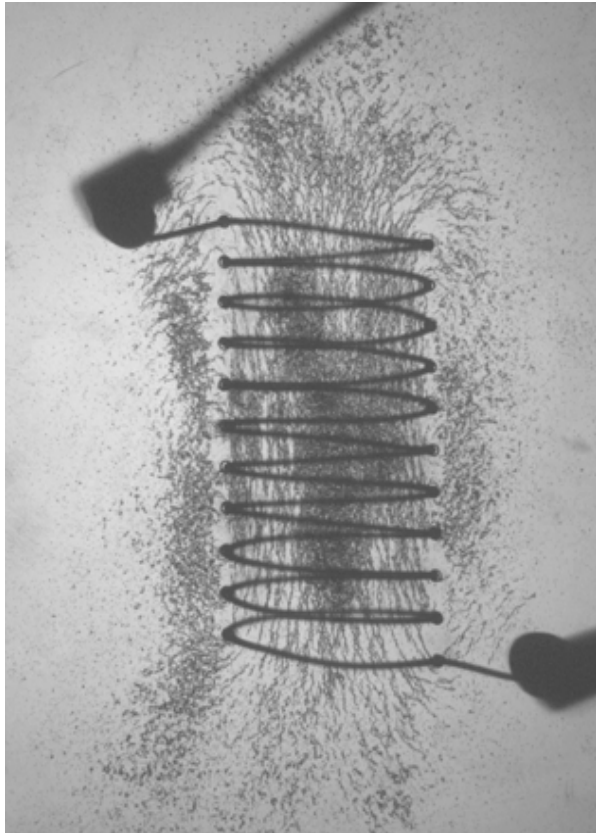


# 851 Maxwell-Gleichungen



## 851 Ziele

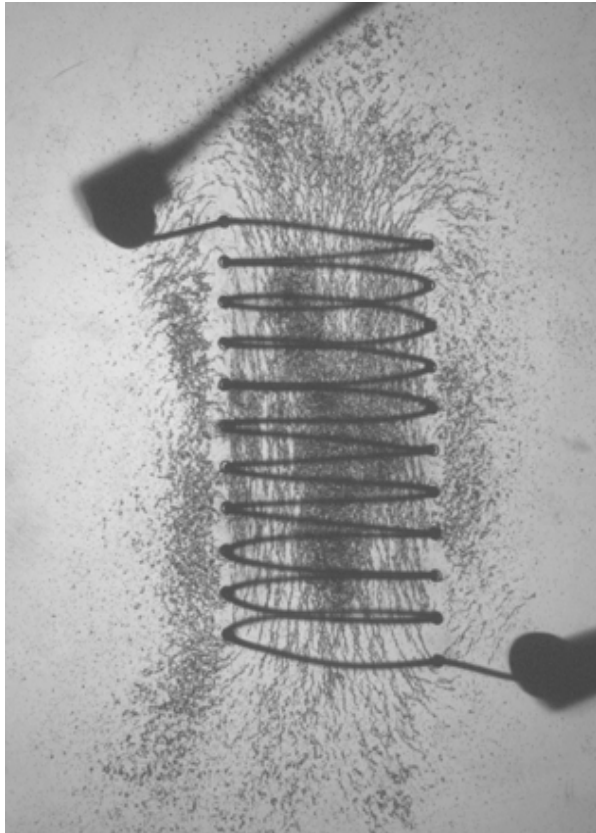
- die allgemeine Formulierung der klassischen elektrodynamischen Feldtheorie im Rahmen der Maxwellgleichungen verstehen
- die Grundaussagen der Maxwellgleichungen erklären können



## 851 Theorie

Eine Frage zu Beginn:

Stecken hinter dem Coulombgesetz, der elektromagnetischen Induktion und dem Umstand, dass es keine magnetischen Monopole gibt, grundlegende, allgemein fassbare Prinzipien?



## 851 Theorie

Eine Frage zu Beginn:

Stecken hinter dem Coulombgesetz, der elektromagnetischen Induktion und dem Umstand, dass es keine magnetischen Monopole gibt, grundlegende, allgemein fassbare Prinzipien?

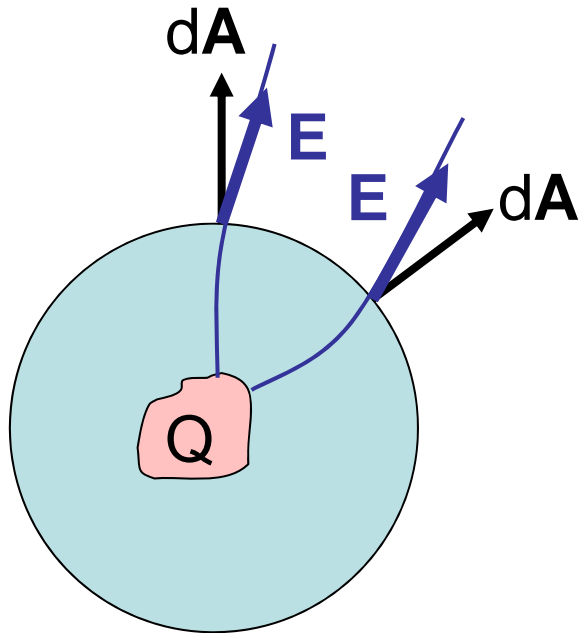
In den Abschnitten 831-843 haben Drähte, Stäbe oder Ringe aus Metall immer eine spezielle Geometrie vorgegeben – wie sieht es z.B. im Vakuum aus?



## 851 Theorie

Gausscher

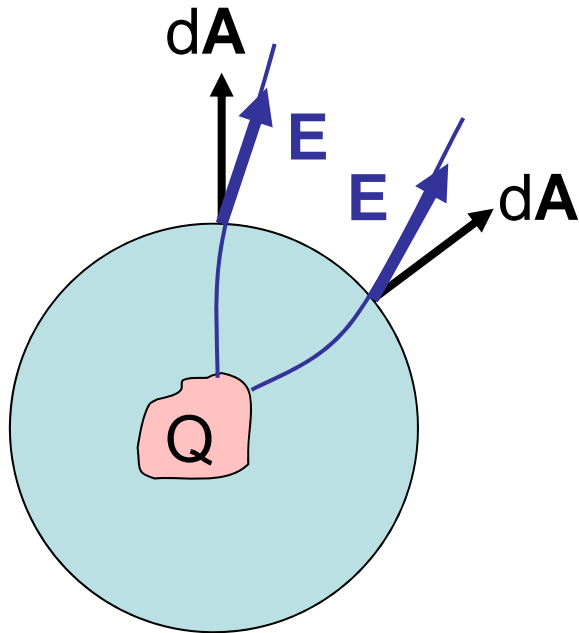
Durchflutungssatz für E-Felder



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q$$

## 851 Theorie

Gauss'scher Durchflutungssatz  
für Kugelgeometrie:

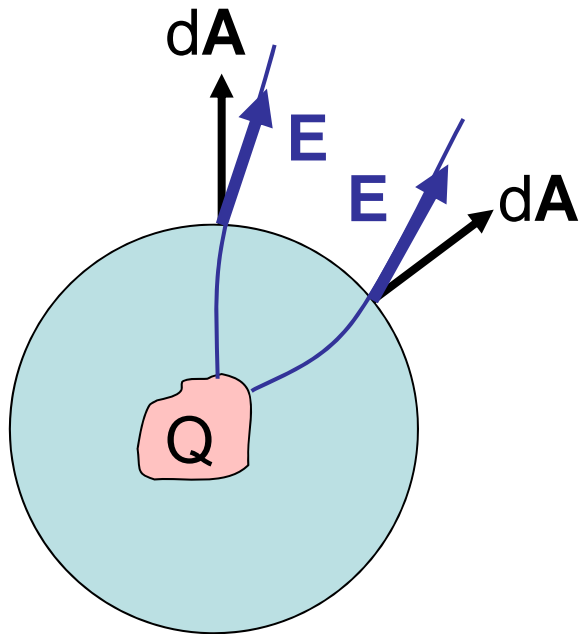


$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S E \cdot dA =$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q$$

## 851 Theorie

Gauss'scher Durchflutungssatz  
für Kugelgeometrie:

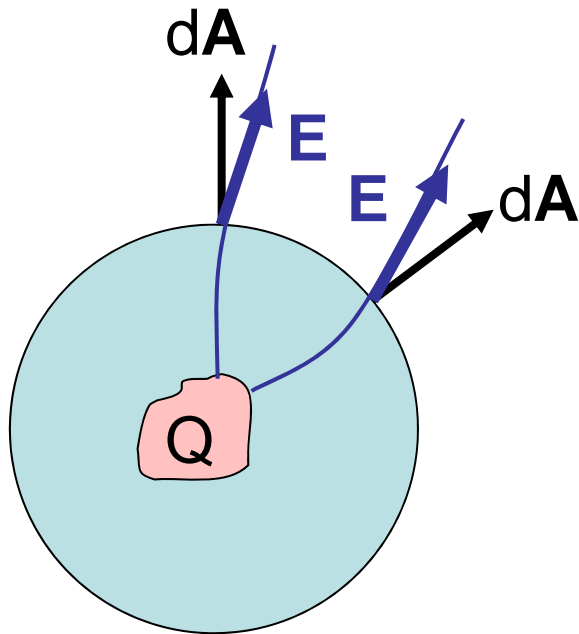


$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S E \cdot dA =$$
$$= \oint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot dA$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q$$

## 851 Theorie

Gauss'scher Durchflutungssatz  
für Kugelgeometrie:



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q$$

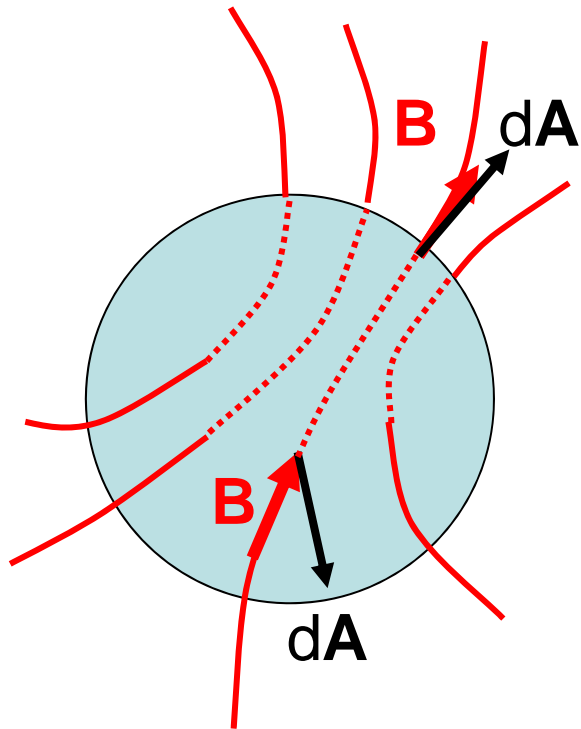
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S E \cdot dA =$$

$$= \oint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot dA$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \oint_S dA = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q$$

## 851 Theorie

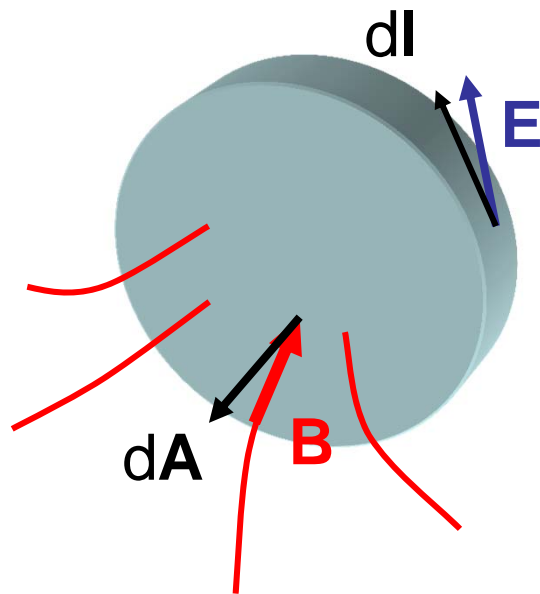
Durchflutungssatz für  
Magnetfelder



$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

# 851 Theorie

## Faradaysches Induktionsgesetz

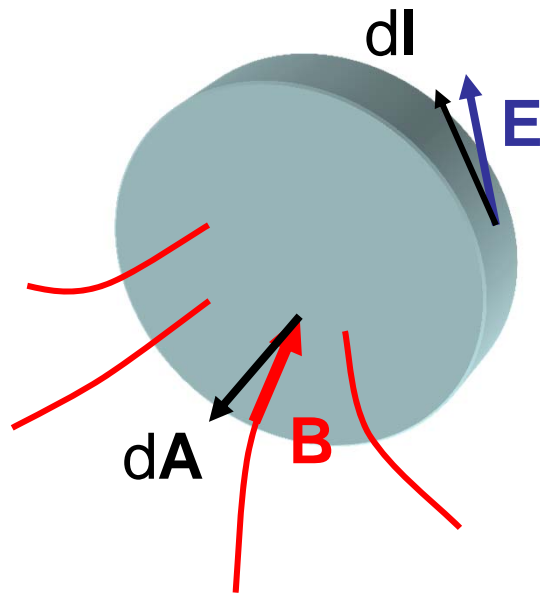


$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

## 851 Theorie

Faradaysches Induktionsgesetz  
für **B** senkrecht und homogen  
auf Fläche *A*

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

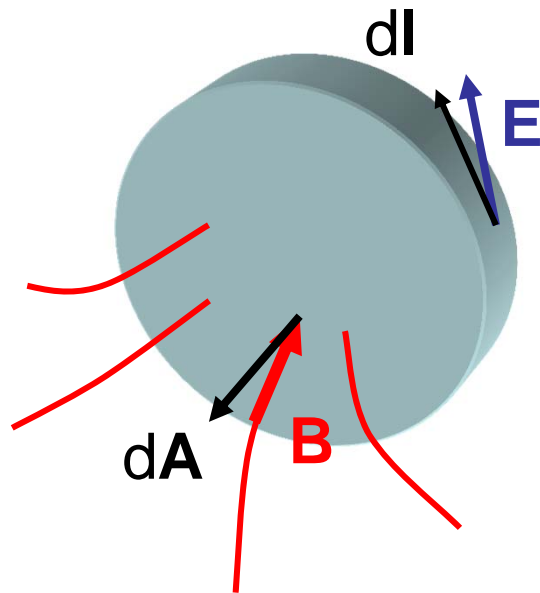


$$- \int_A \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dA$$

## 851 Theorie

Faradaysches Induktionsgesetz  
für **B** senkrecht und homogen  
auf Fläche A

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$



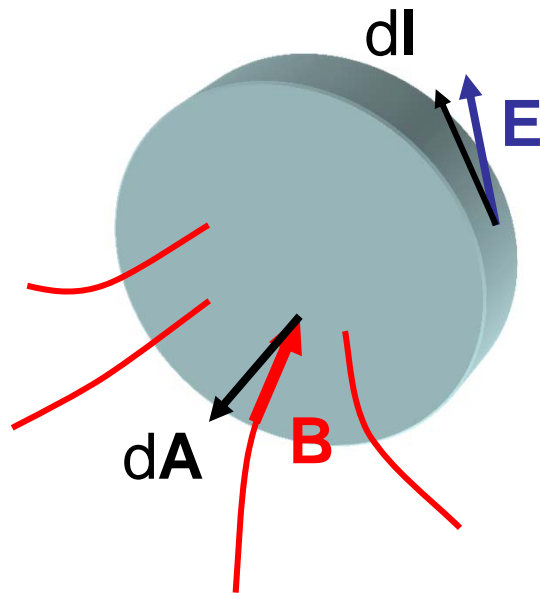
$$- \int_A \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dA = -A \cdot \frac{dB}{dt}$$



## 851 Theorie

Faradaysches Induktionsgesetz  
für **B** senkrecht und homogen  
auf Fläche A

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$



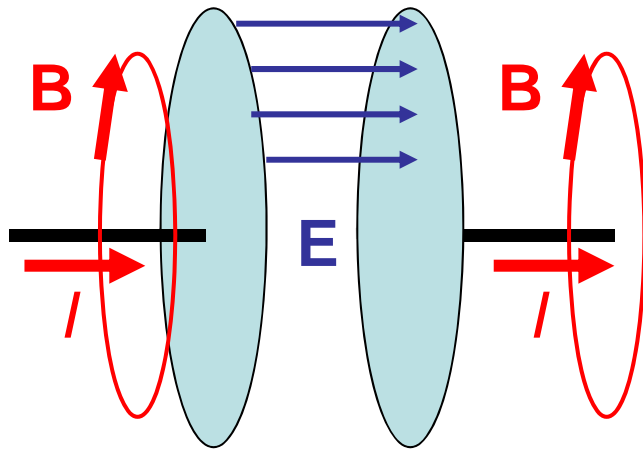
$$- \int_A \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dA = -A \cdot \frac{dB}{dt} = U_{ind}$$

## **851** Theorie

Gibt es auch ein Gesetz für die zeitliche Ableitung des E-Feldes?

## 851 Theorie

Gibt es auch ein Gesetz für die zeitliche Ableitung des E-Feldes?



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \int_A \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{A} + \mu_0 I$$

# **852** Elektromagnetische Wellen



## 852 Ziele

- die Maxwell-Gleichungen in differenzieller Form kennen
- die formale Analogie von elektromagnetischen Wellen zu den mechanischen Wellen (Kap. 600) beschreiben können
- die Auswirkungen einer für alle Koordinatensysteme konstante Lichtgeschwindigkeit  $c$  erklären können

## 852 Theorie

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

mathematischer Prolog:  
Differenzialoperatoren in 3D:

Nabla-Operator

## 852 Theorie

mathematischer Prolog:  
Differenzialoperatoren in 3D:

Nabla-Operator

Divergenz (741, 811)

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\nabla \bullet \vec{u} = \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)$$

$$= \text{div}(\vec{u})$$

## 852 Theorie

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\nabla \bullet \vec{u} = \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)$$

$= \text{div}(\vec{u})$

mathematischer Prolog:  
Differenzialoperatoren in 3D:

Nabla-Operator

Divergenz (741, 811)

Rechenregeln für  $\text{div}(\dots)$

$$\text{div}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \text{div}(\vec{u}_1) + \text{div}(\vec{u}_2)$$

$$\text{div}(c\vec{u}) = c \cdot \text{div}(\vec{u})$$

$$\text{div}(f\vec{u}) = f \cdot \text{div}(\vec{u}) + \vec{u} \cdot \text{grad}(f)$$



## 852 Theorie

mathematischer Prolog:  
Differenzialoperatoren in 3D:

Nabla-Operator

Rotation

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\nabla \times \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \text{rot}(\vec{u})$$

## 852 Theorie

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\nabla \times \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \text{rot}(\vec{u})$$

mathematischer Prolog:  
Differenzialoperatoren in 3D:

Nabla-Operator

Rotation

Rechenregeln für  $\text{rot}(\dots)$

$$\text{rot}(c\vec{u}) = c \cdot \text{rot}(\vec{u})$$

$$\text{rot}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \text{rot}(\vec{u}_1) + \text{rot}(\vec{u}_2)$$

$$\text{rot}(f\vec{u}) = f \cdot \text{rot}(\vec{u}) + \text{grad}(f) \times \vec{u}$$

## 852 Theorie

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\Delta = (\nabla \bullet \nabla) = \nabla^2$$

mathematischer Prolog:  
Differenzialoperatoren in 3D:

Nabla-Operator

Laplace-Operator

## 852 Theorie

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\Delta = (\nabla \bullet \nabla) = \nabla^2$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{u} = \nabla(\nabla \bullet \vec{u}) - \Delta \vec{u}$$

mathematischer Prolog:  
Differenzialoperatoren in 3D:

Nabla-Operator

Laplace-Operator

$$\Delta \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} =$$

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot d^3 r = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q$$

## 852 Theorie

zurück zu den Maxwell-  
gleichungen: Übergang von der  
Integral- zur  
Differenzialschreibweise

Gausscher Durchflutungssatz  
und Gausscher Integralsatz

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} =$$

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot d^3 r = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q$$

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot d^3 r = 0$$

## 852 Theorie

zurück zu den Maxwell-  
gleichungen: Übergang von der  
Integral- zur  
Differenzialschreibweise

Gausscher Durchflutungssatz  
und Gausscher Integralsatz

Ladungsfreies Volumen  $V$

## 852 Theorie

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} =$$

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot d^3 r = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot Q$$

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot d^3 r = 0$$

$$\rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

zurück zu den Maxwell-  
gleichungen: Übergang von der  
Integral- zur  
Differenzialschreibweise

Gausscher Durchflutungssatz  
und Gausscher Integralsatz

Ladungsfreies Volumen  $V$

## 852 Theorie

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

zurück zu den Maxwell-  
gleichungen: Übergang von der  
Integral- zur  
Differenzialschreibweise

Induktionsgesetz und Stokescher  
Integralsatz



## 852 Theorie

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

zurück zu den Maxwell-  
gleichungen: Übergang von der  
Integral- zur  
Differenzialschreibweise

$$\int_A \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{A} = - \int_A \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{A}$$

Induktionsgesetz und Stokescher  
Integralsatz

## 852 Theorie

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

zurück zu den Maxwell-  
gleichungen: Übergang von der  
Integral- zur  
Differenzialschreibweise

$$\int_A \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{A} = - \int_A \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{A}$$

Induktionsgesetz und Stokescher  
Integralsatz

Infinitesimal kleines  
Flächenelement

$$\longrightarrow \text{rot} \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt} = \nabla \times \vec{E}$$

## 852 Theorie

Integralsätze lassen sich auf alle Maxwell-Gleichungen anwenden.

Im Vakuum und ladungsfreier Raum resultiert:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$

## 852 Theorie

Frage: Können die Gleichungen irgendwie zusammen gefasst werden?

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$

## 852 Theorie

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

Frage: Können die Gleichungen irgendwie zusammen gefasst werden?

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \vec{E} &= \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} \\ &= -\nabla \times \frac{d\vec{B}}{dt}\end{aligned}$$

## 852 Theorie

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \vec{E} &= \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} \\ &= -\nabla \times \frac{d\vec{B}}{dt}\end{aligned}$$

Frage: Können die Gleichungen irgendwie zusammen gefasst werden?

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = 0 \quad \longleftarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

## 852 Theorie

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \vec{E} &= \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} \\ &= -\nabla \times \frac{d\vec{B}}{dt}\end{aligned}$$

Frage: Können die Gleichungen irgendwie zusammen gefasst werden?

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} = \nabla \times \frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \vec{B}]$$

## 852 Theorie

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \vec{E} &= \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} \\ &= -\nabla \times \frac{d\vec{B}}{dt}\end{aligned}$$

Frage: Können die Gleichungen irgendwie zusammen gefasst werden?

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} = \nabla \times \frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \vec{B}]$$

$$= \frac{d}{dt} \left[ \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right] = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} \longleftarrow \nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$



## 852 Theorie

Analog für magnetische Felder

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \nabla \times \left( \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right)$$

## 852 Theorie

Analog für magnetische Felder

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \nabla \times \left( \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{B} = -\varepsilon_0 \mu_0 \nabla \times \frac{d\vec{E}}{dt} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} [\nabla \times \vec{E}]$$

## 852 Theorie

Analog für magnetische Felder

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \nabla \times \left( \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{B} = -\varepsilon_0 \mu_0 \nabla \times \frac{d\vec{E}}{dt} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} [\nabla \times \vec{E}]$$

$$= -\varepsilon_0 \mu_0 \cdot \frac{d}{dt} \left[ -\frac{d\vec{B}}{dt} \right] = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2} \longleftarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

## 852 Theorie

Fazit:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \vec{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2} \\ \Delta \vec{E} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} \end{aligned} \right\} \Delta \vec{u} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2}$$

## 852 Theorie

$$\Delta \bar{u} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2}$$

Lösungen dieser Gleichung?

eindimensionaler Fall mit  
skalarem Feld  $u$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 u}{dt^2}$$

## 852 Theorie

$$\Delta \bar{u} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2}$$

Lösungen dieser Gleichung?

eindimensionaler Fall mit  
skalarem Feld  $u$

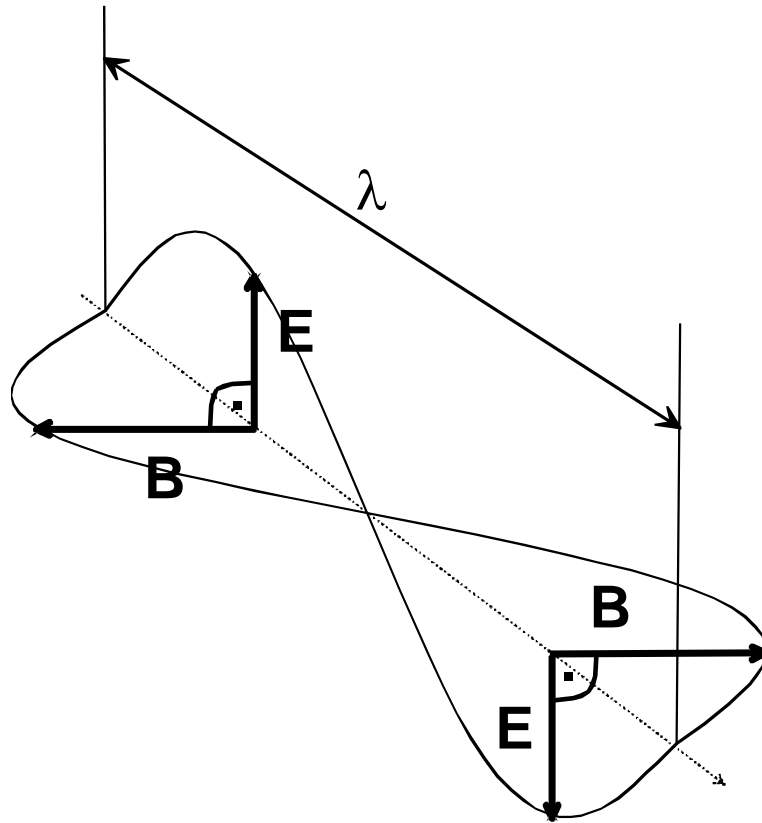
Lösungen sind Wellenfunktionen  
(Kap. 600), mit  
Wellenausbreitungs-  
geschwindigkeit  $c$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 u}{dt^2}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

## 852 Theorie

### elektromagnetische Wellen

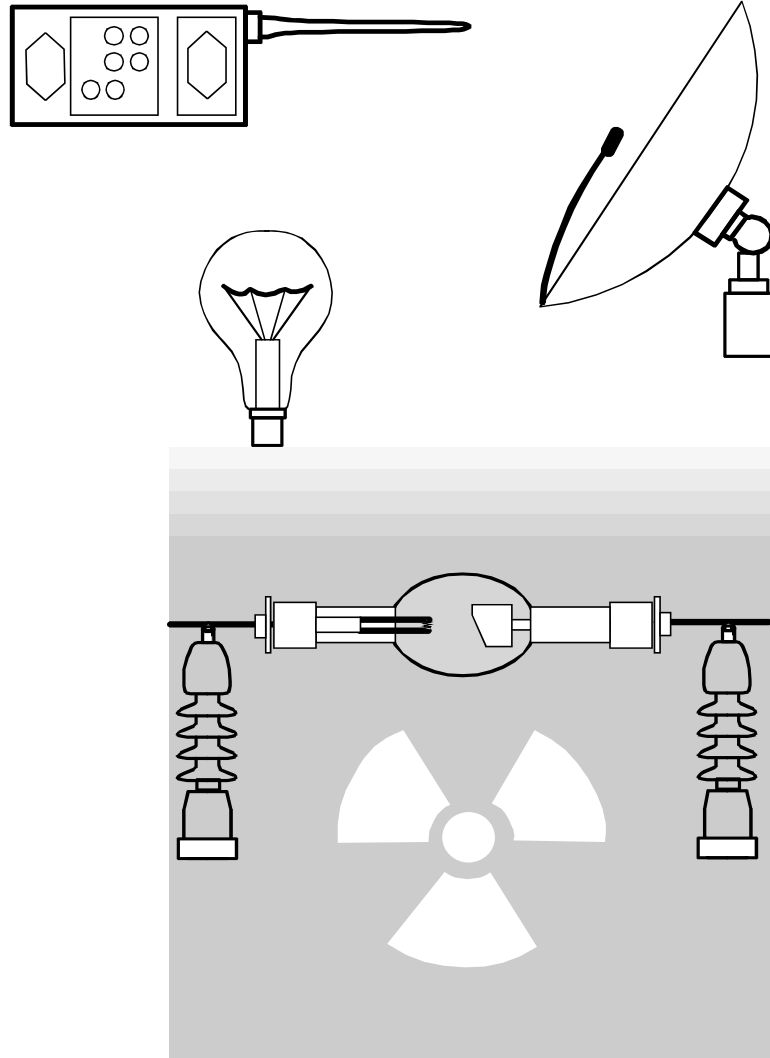


$$\Delta \vec{u} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$c = \lambda \nu$$

# Erscheinungsformen



- Radio- und Radarwellen
- Infrarot
- sichtbares Licht
- UV
- Röntgen- und  $\gamma$ -Strahlung



$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

## 852 Theorie

Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist eine Naturkonstante, also in allen bewegten Koordinatensystemen gleich gross

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

## 852 Theorie

Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist eine Naturkonstante, also in allen bewegten Koordinatensystemen gleich gross

→ Dies hat zur Folge, dass Raum und Zeit gekoppelt sind!

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_z}{c}\right)^2}}$$

## 852 Theorie

Galilei-Transformation muss durch Lorentz-Transformation ersetzt werden

$$\tilde{x} = x$$

$$\tilde{y} = y$$

$$\tilde{z} = z + v_z t$$

$$\tilde{t} = t$$



$$\tilde{x} = x$$

$$\tilde{y} = y$$

$$\tilde{z} = \gamma(z + v_z t)$$

$$\tilde{t} = \gamma\left(t - \left(\frac{v_z}{c^2}\right) \cdot z\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_z}{c}\right)^2}}$$

## 852 Theorie

Galilei-Transformation muss durch Lorentz-Transformation ersetzt werden: Zwei

Konsequenzen:

Längenkontraktion und  
Zeitdilatation

$$l = \frac{l_0}{\gamma}$$