600 Mechanik der Kontinua

610 *Feste Körper*
620 *Flüssigkeiten und Gase*

um was geht es?

Beschreibung von Bewegungen (phys. Verhalten) des nicht-starren Körpers (elastisch, plastisch) → Kontinuum

Hydro- und Aerodynamik

Kompartimentale Modellierung

Wellen und Wellenphänomene

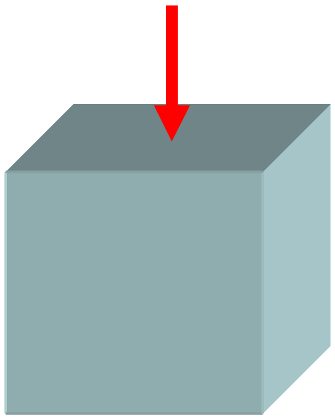
Strömung um einen Modellhubschrauber

611 Deformation fester Körper

611 Ziele

- Begriffe Druck, Spannung und Zug definieren können
- Zusammenhang zwischen Druck, Spannung und Zug sowie der daraus resultierenden Verformung kennen
- Durch Krafteinwirkung ergebende Deformationen bei einfachen Körper berechnen können

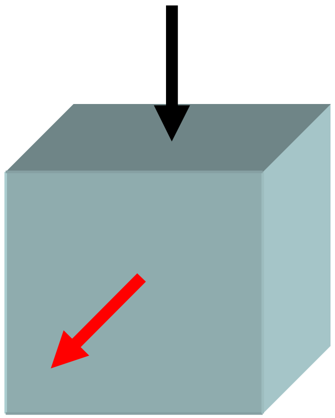
611 Theorie



möglichen Krafteinwirkungen

Gegen eine Oberfläche (→ Druck *p*)

611 Theorie

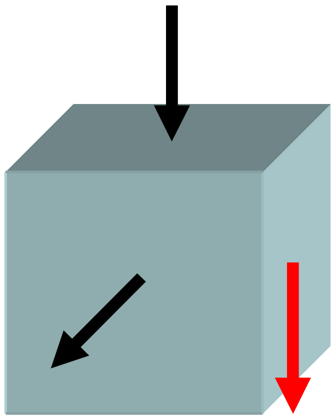


mögliche Krafteinwirkungen

Gegen eine Oberfläche (→ Druck *p*)

Weg von einer Oberfläche (→ Zugspannung σ)

611 Theorie



möglicher Krafteinwirkungen

Gegen eine Oberfläche (→ Druck *p*)

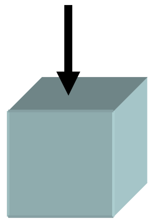
Weg von einer Oberfläche (→ Zugspannung σ)

Parallel zu eine Oberfläche (→ Schubspannung τ)

611 Theorie

$$p = \frac{\Delta F_N}{\Delta A}$$

$$\kappa = -\frac{1}{V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta p}$$



Druck *p*

Kompressibilität κ

611 Theorie

Druck p

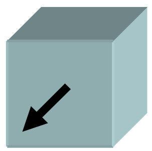
$$p = \frac{\Delta F_N}{\Delta A}$$

Kompressibilität κ

$$\kappa = -\frac{1}{V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta p}$$

Zugspannung σ

$$\sigma = \frac{\Delta F_N}{\Delta A}$$



Elastizitätsmodul E

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

611 Theorie

Druck *p*

$$p = \frac{\Delta F_N}{\Delta A}$$

Kompressibilität κ

$$\kappa = -\frac{1}{V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta p}$$

Zugspannung σ

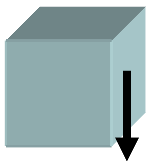
$$\sigma = \frac{\Delta F_N}{\Delta A}$$

Elastizitätsmodul *E*

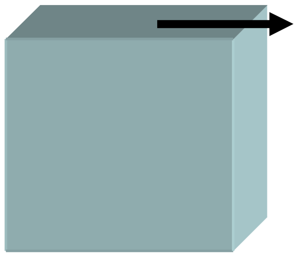
$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Schubspannung τ

$$\tau = \frac{F}{A}$$



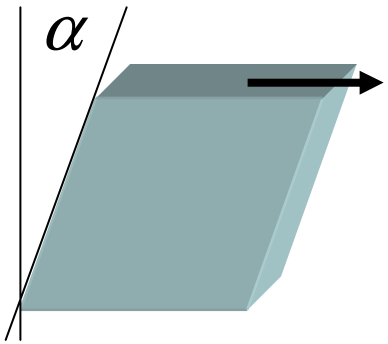
611 Theorie



Deformation bei Schubspannung

(→ Scherung)

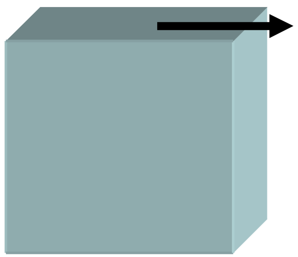
$$\tau = \frac{F}{A}$$



$$\tau = G \cdot \tan \alpha$$

$$\frac{E}{3} < G < \frac{E}{2}$$

611 Theorie

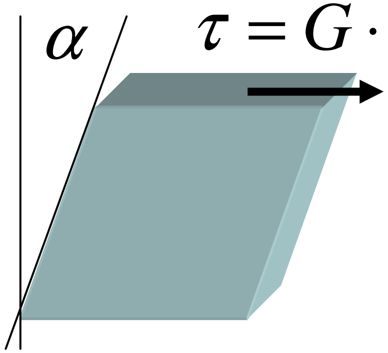


Deformation bei Schubspannung

(→ Scherung)

Für inkompressible Materialien:

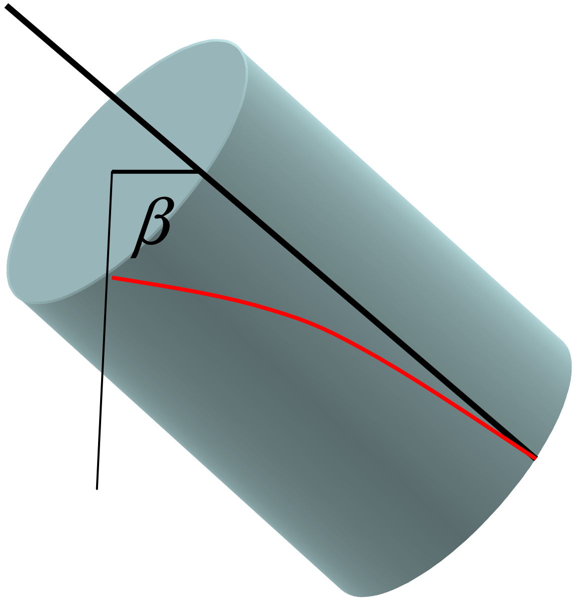
$$\tau = G \cdot \tan\alpha$$



$$E = 3 \cdot G$$

611 Theorie

Torsion:



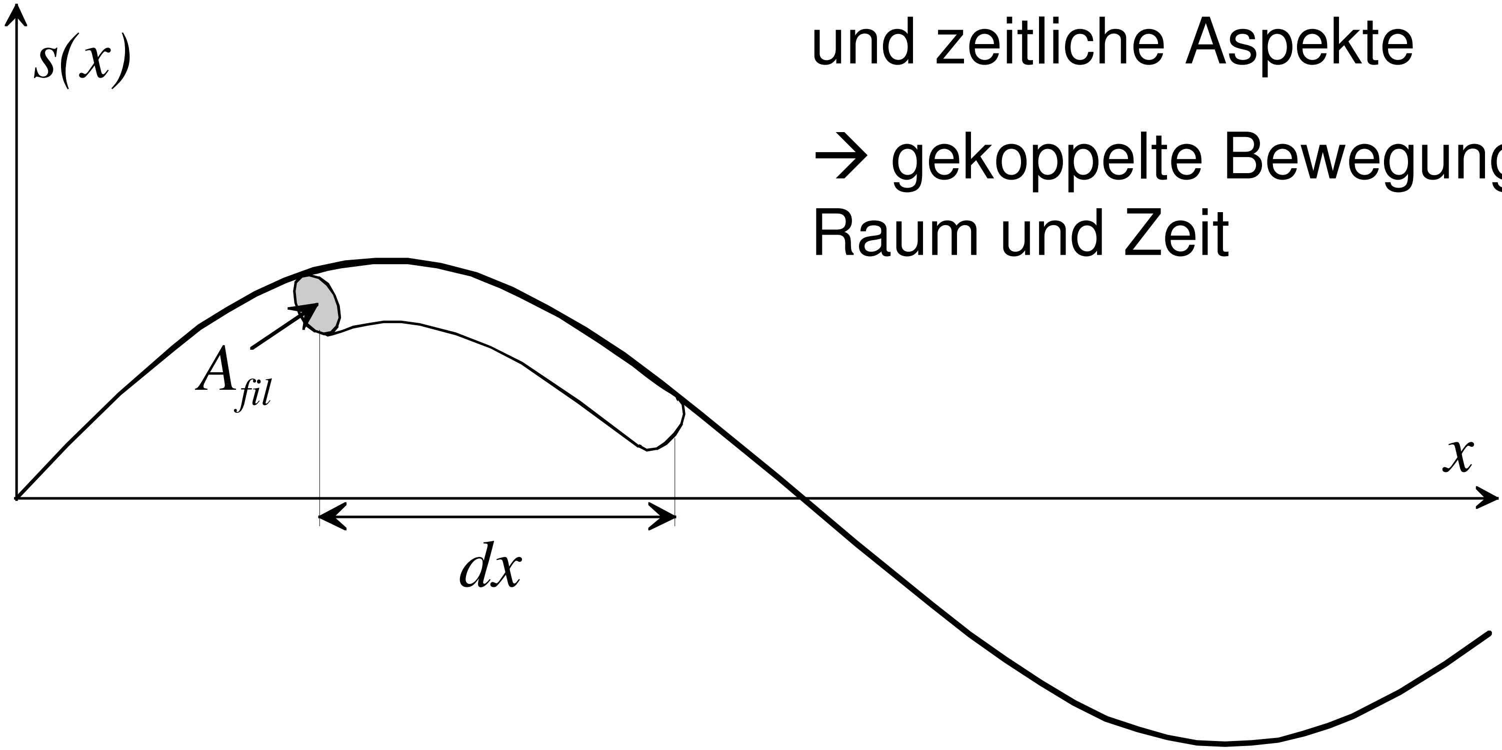
$$M = \frac{\pi r^4}{6h} \cdot E \cdot \beta$$

612 Transversalwellen auf einer Saite

612 Ziele

- Annahmen und Modellvorstellung bei der Herleitung der Wellengleichung für Transversalwellen auf einer Saite erklären können
- Lösung der Wellengleichung interpretieren können
- Zusammenhang zwischen Wellenlänge, Frequenz und Wellenausbreitungs-geschwindigkeit anwenden können

612 Theorie

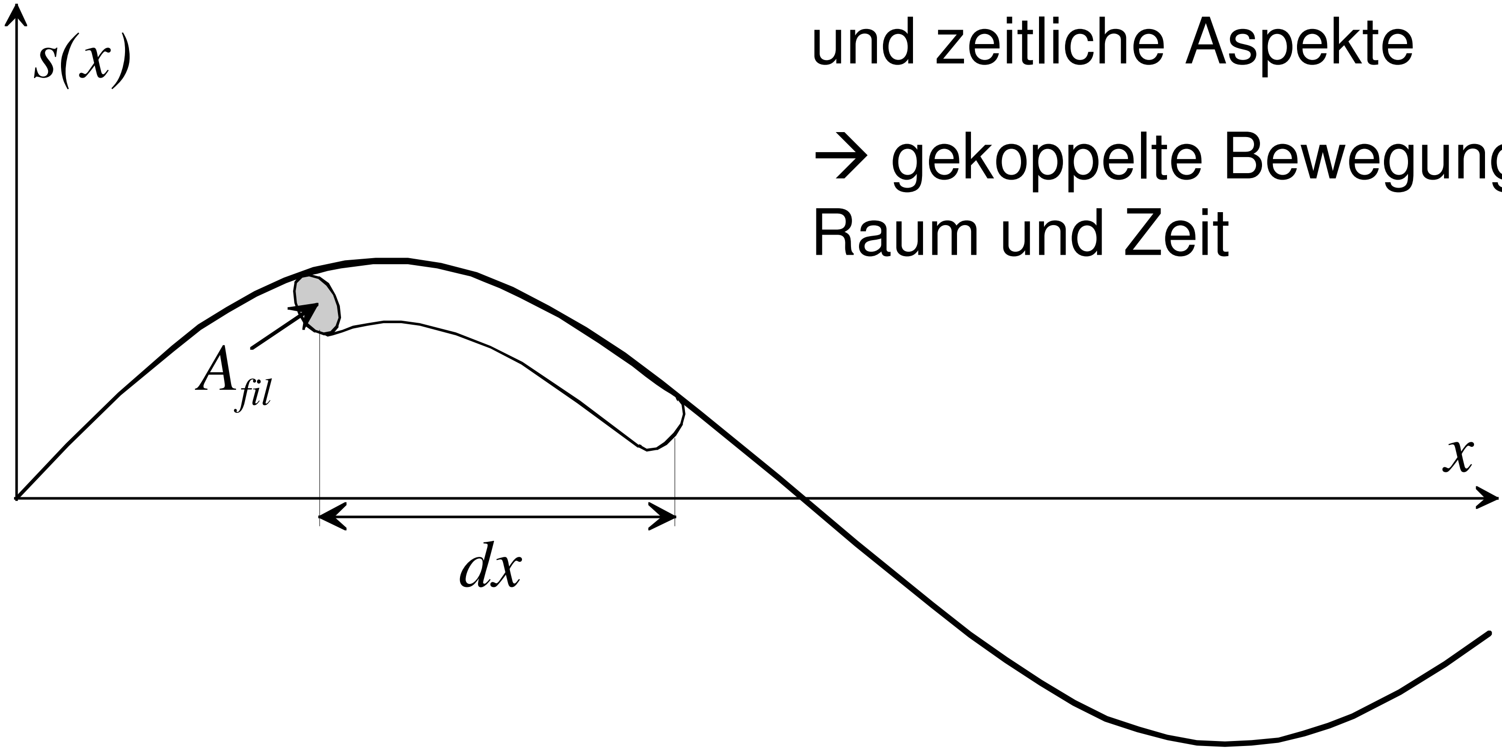


Bewegung eines eingespannten Seils oder einer Saite hat räumliche und zeitliche Aspekte

→ gekoppelte Bewegung in Raum und Zeit

612 Theorie

$$\boxed{s = s(x,t)}$$

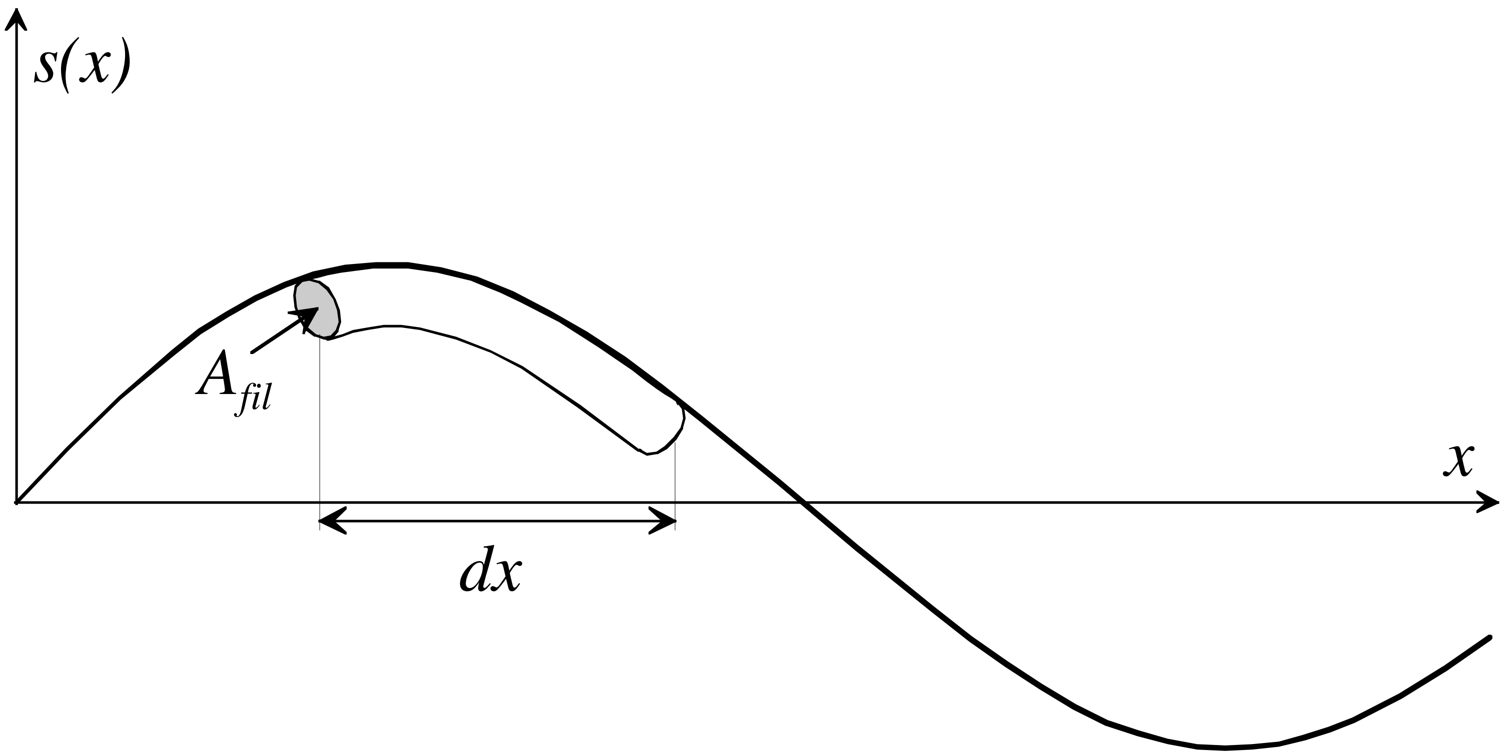


Bewegung eines eingespannten Seils oder einer Saite hat räumliche und zeitliche Aspekte

→ gekoppelte Bewegung in Raum und Zeit

612 Theorie

Gesucht:
Bewegungsgleichung?



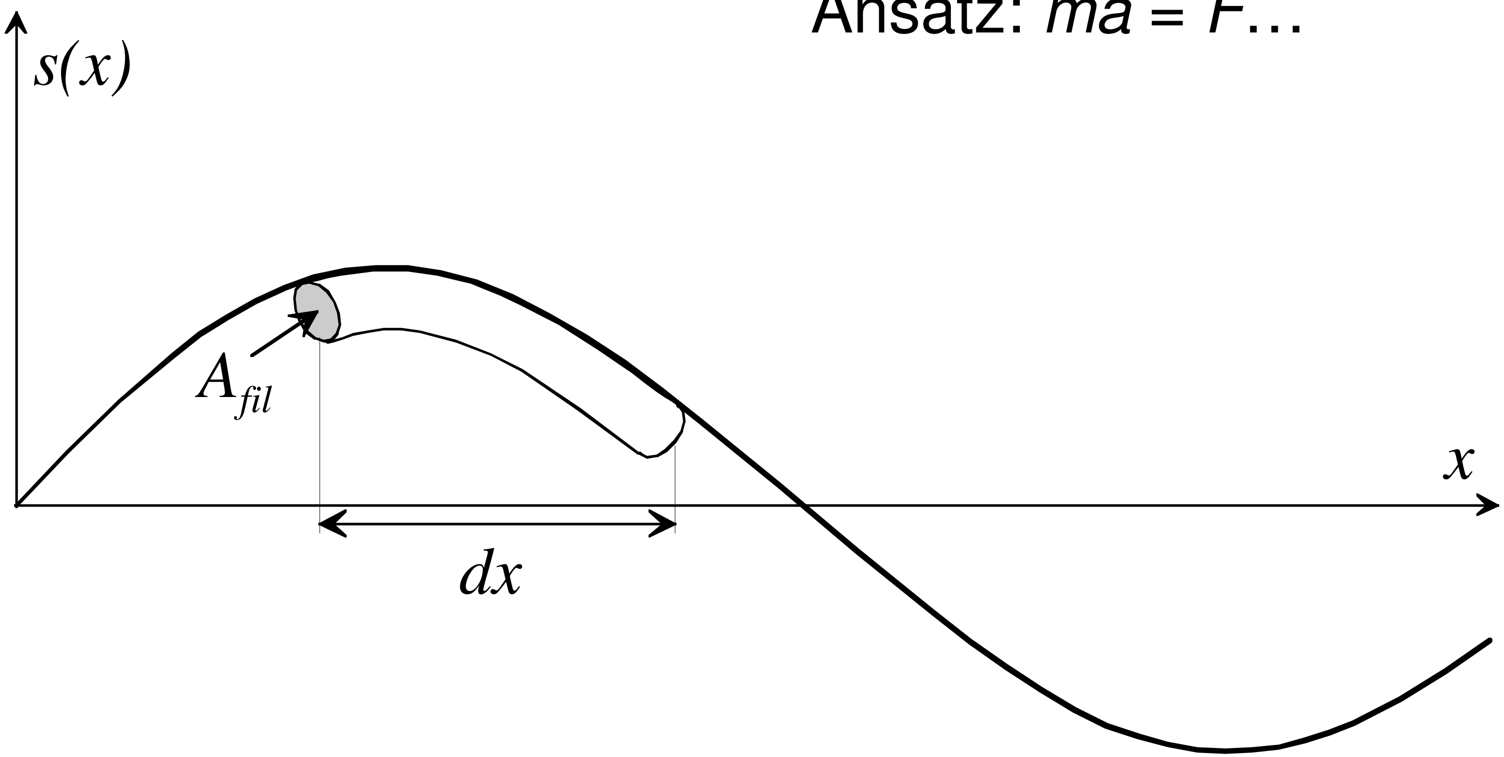
$$dm \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$$

612 Theorie

$$= \rho A_{fil} \cdot dx \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = \sum_i F_{is}$$

Gesucht:
Bewegungsgleichung?

Ansatz: *ma* = *F*…

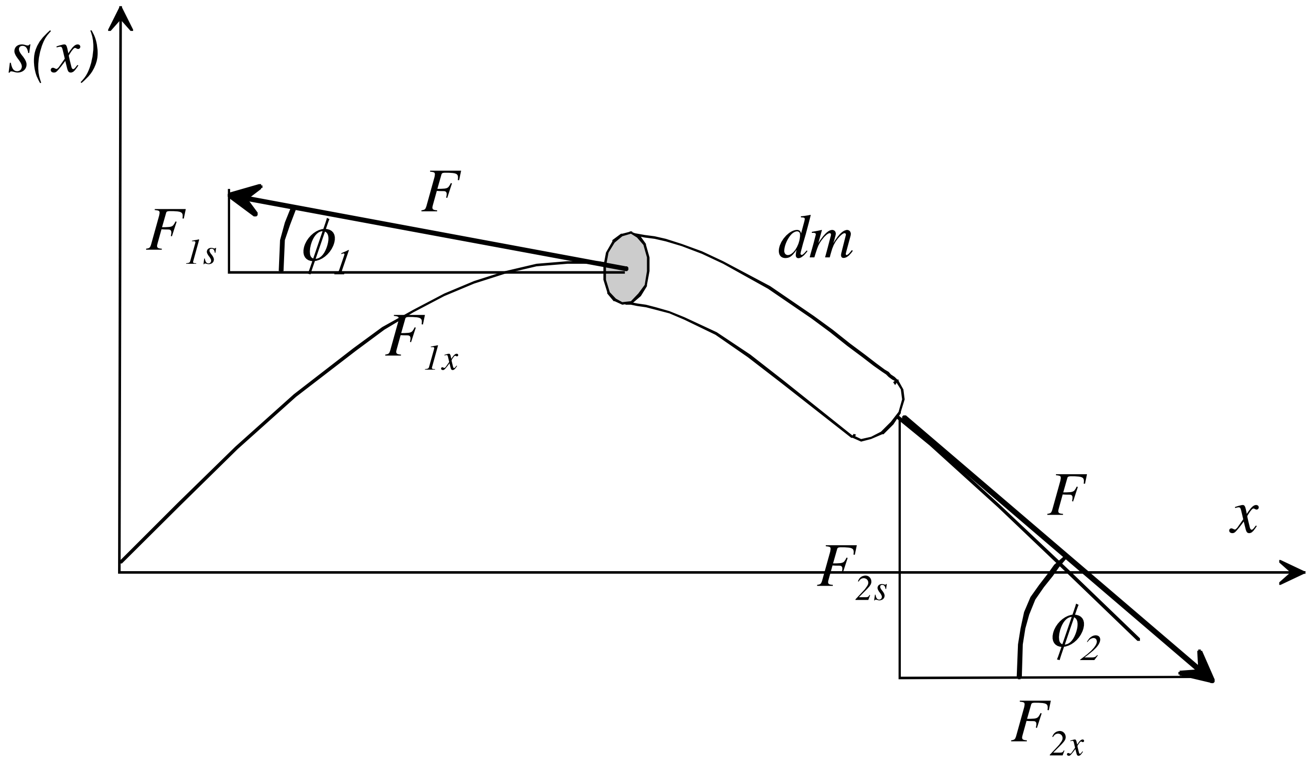


612 Theorie

$$dm \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$= \rho A_{fil} \cdot dx \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = \sum_i F_{is}$$

$F = \ldots?$



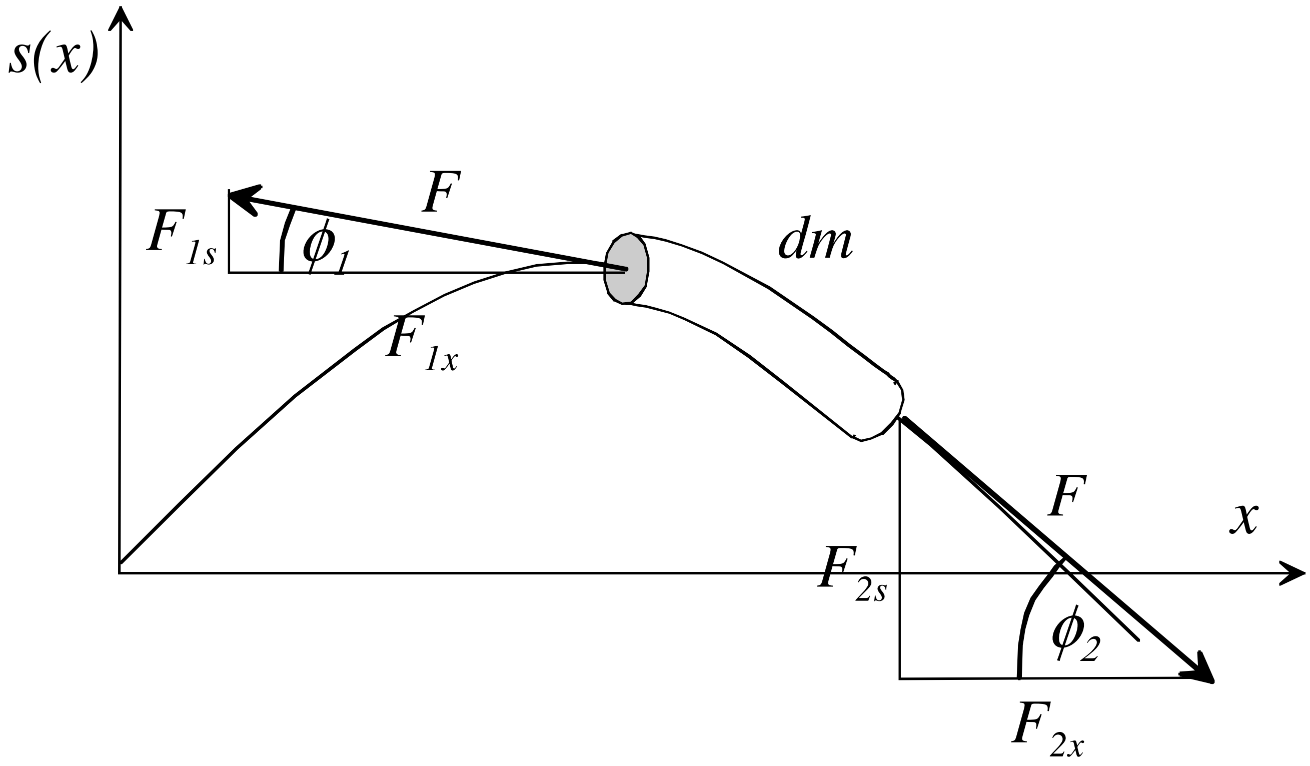
$$dm \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$$

612 Theorie

$$= \rho A_{fil} \cdot dx \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = \sum_i F_{is}$$

$F = \ldots ?$

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_2 - \vec{F}_1$$



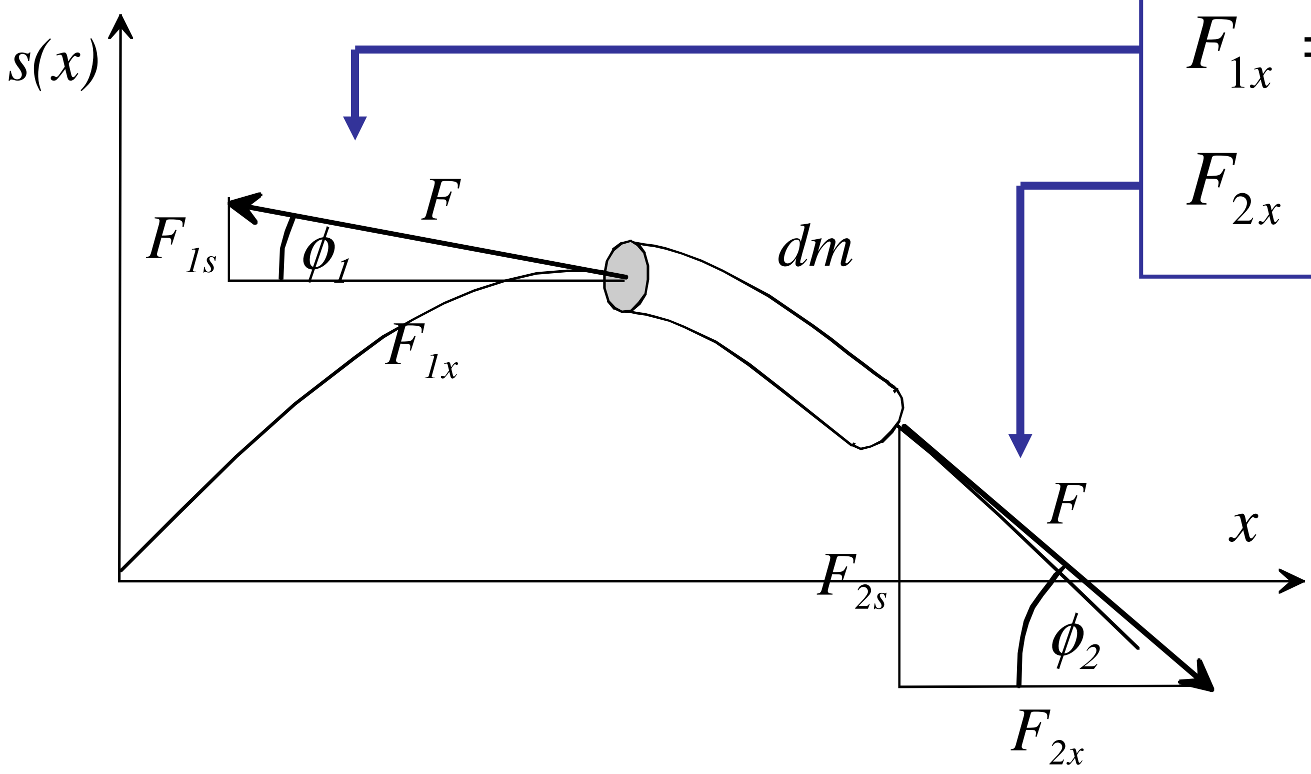
$$dm \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$$

612 Theorie

$$= \rho A_{fil} \cdot dx \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = \sum_i F_{is} \qquad \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_2 - \vec{F}_1$$

$$F_{1x} = F \cdot \cos \phi_1$$

$$F_{2x} = F \cdot \cos \phi_2$$

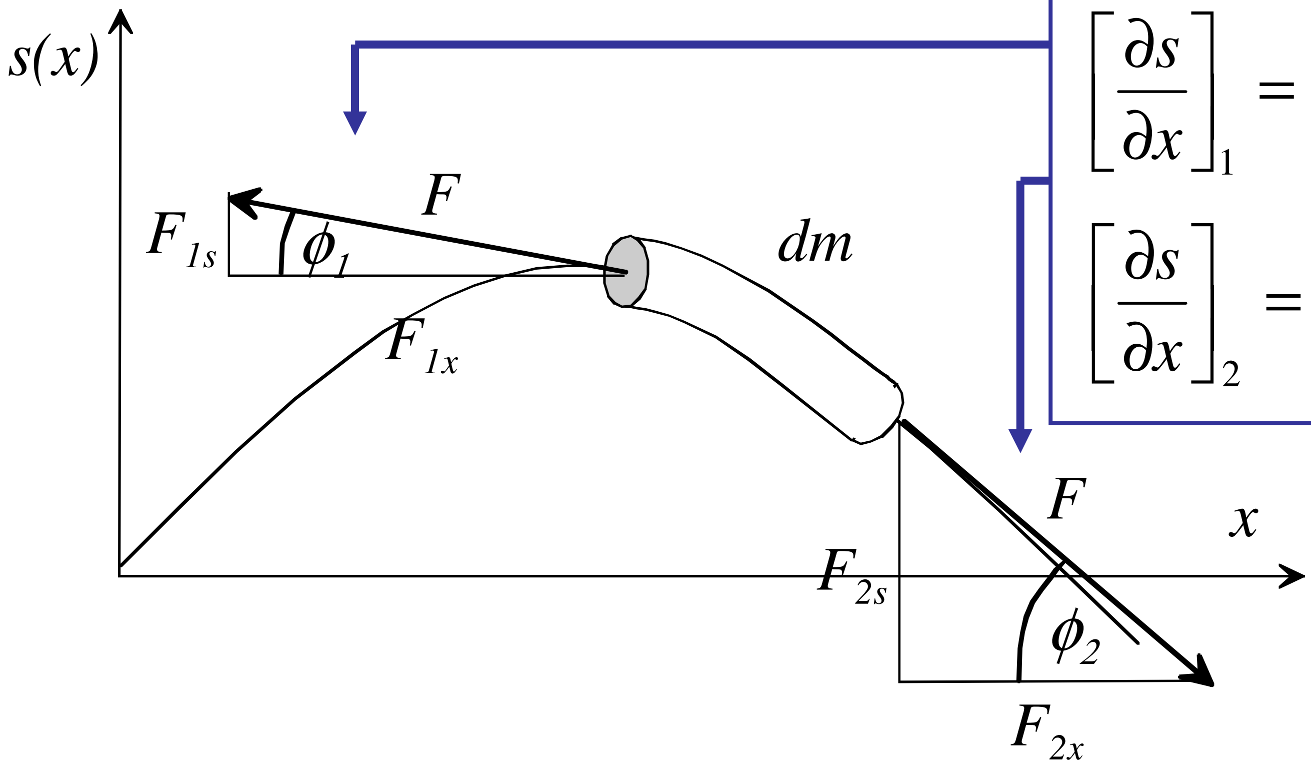


612 Theorie

$$dm \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$= \rho A_{fil} \cdot dx \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = \sum_i F_{is}$$

Steigungen für *s*(*x*):



$$\left[\frac{\partial s}{\partial x}\right]_1 = \frac{F_{1s}}{F_{1x}} = \frac{F_{1s}}{F \cdot \cos\phi_1}$$

$$\left[\frac{\partial s}{\partial x}\right]_2 = \frac{F_{2s}}{F_{2x}} = \frac{F_{2s}}{F \cdot \cos\phi_2}$$

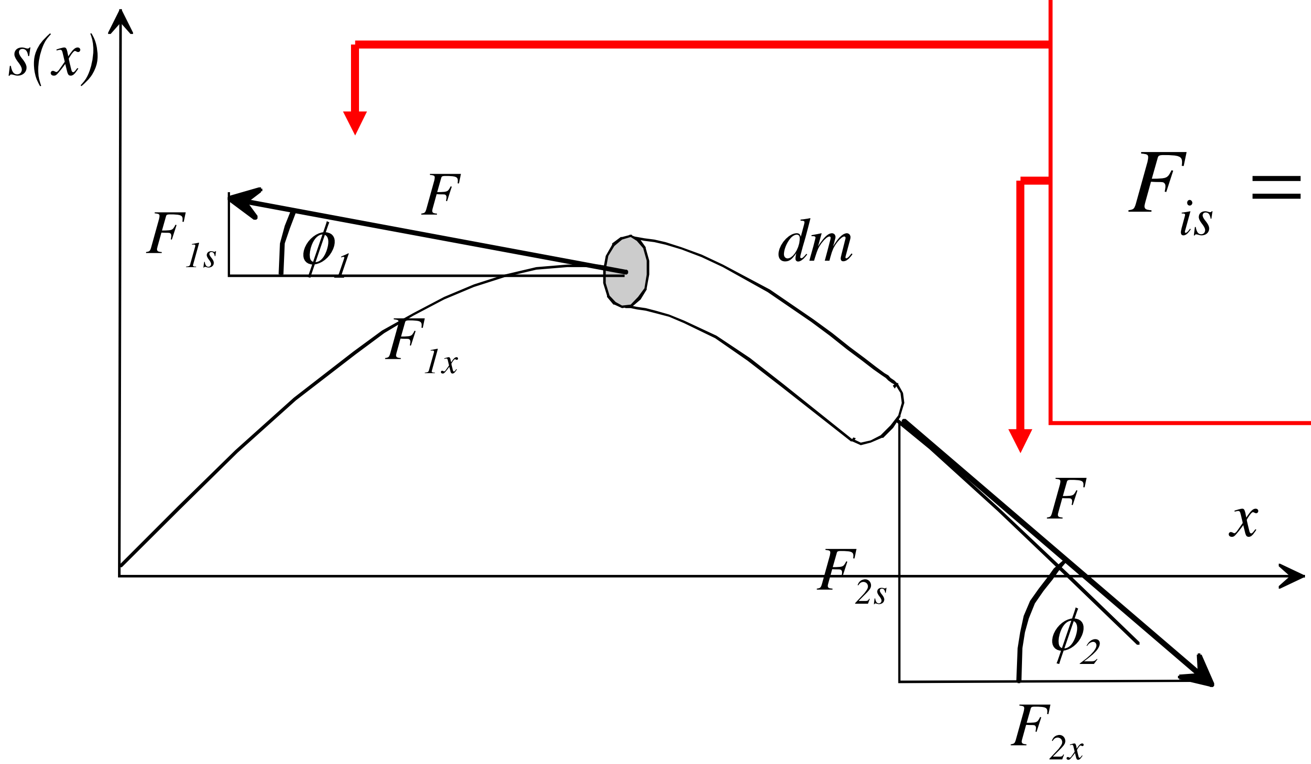
612 Theorie

$$dm \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$= \rho A_{fil} \cdot dx \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = \sum_i F_{is}$$

Für kleine Auslenkungen

$$\cos\phi_1 \approx \cos\phi_2 \approx 1$$



$$F_{is} = F \cdot \left[\frac{\partial s}{\partial x}\right]_i$$

Keine kleinen Auslenkungen …

Keine kleinen Auslenkungen …

612 Theorie

$$dm \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$= \rho A_{fil} \cdot dx \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = \sum_i F_{is}$$

Einsetzten in Bewegungsgleichung

$$\boxed{F_{is} = F \cdot \left[\frac{\partial s}{\partial x}\right]_i}$$

$$\rho A_{fil} \cdot \Delta x \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$= \left(\left[\frac{\partial s}{\partial x}\right]_2 - \left[\frac{\partial s}{\partial x}\right]_1 \right) \cdot F$$

612 Theorie

$$dm \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$= \rho A_{fil} \cdot dx \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = \sum_i F_{is}$$

Einsetzten in Bewegungsgleichung

$$\boxed{F_{is} = F \cdot \left[\frac{\partial s}{\partial x} \right]_i}$$

$$\rho A_{fil} \cdot \Delta x \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$= \left(\left[\frac{\partial s}{\partial x} \right]_2 - \left[\frac{\partial s}{\partial x} \right]_1 \right) \cdot F = F \cdot \Delta(\partial s / \partial x)$$

612 Theorie

Division durch Δx

$$\rho A_{fil} \cdot \Delta x \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$= \left(\left[\frac{\partial s}{\partial x} \right]_2 - \left[\frac{\partial s}{\partial x} \right]_1 \right) \cdot F = F \cdot \Delta(\partial s / \partial x)$$

$$\rho A_{fil} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = F \cdot \frac{\Delta(\partial s / \partial x)}{\Delta x}$$

612 Theorie

$$\rho A_{fil} \cdot \Delta x \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Division durch Δx und Grenzwertbildung

$$= \left(\left[\frac{\partial s}{\partial x} \right]_2 - \left[\frac{\partial s}{\partial x} \right]_1 \right) \cdot F = F \cdot \Delta(\partial s / \partial x)$$

$$\rho A_{fil} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = F \cdot \frac{\Delta(\partial s / \partial x)}{\Delta x} = F \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

612 Theorie

$$\rho A_{fil} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = F \cdot \frac{\Delta(\partial s / \partial x)}{\Delta x} = F \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\rho A_{fil}}{F} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{\rho}{\sigma} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$$

612 Theorie

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\rho A_{fil}}{F} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{\rho}{\sigma} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Diese Gleichung hat die typische Form einer Wellengleichung

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} \\[2em] c = \sqrt{\sigma / \rho}\end{gathered}}$$

612 Theorie

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\rho A_{fil}}{F} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{\rho}{\sigma} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} \qquad c = \sqrt{\sigma / \rho}}$$

Diese Gleichung hat die typische Form einer Wellengleichung

Fragen:

Welche Bedeutung hat *c*?

Welche Funktionen sind Lösungen?

612 Theorie

Welche Funktionen sind Lösungen?

Ansatz:

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} \\[2em] c = \sqrt{\sigma / \rho}\end{gathered}}$$

$$s(x,t) = \hat{s} \cdot \sin(kx \mp \omega t)$$

$$s(x,t) = \hat{s} \cdot \cos(kx \mp \omega t)$$

612 Theorie

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} \\ &s(x,t) \\ &= \hat{s} \cdot \cos(kx - \omega t) \end{aligned}}$$

Welche Funktionen sind Lösungen?

Ansatz:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\hat{s} \cdot \cos(kx - \omega t)\right] = -\hat{s} \cdot k^2 \cdot \cos(kx - \omega t)$$

612 Theorie

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}\\ &s(x,t)\\ &= \hat{s} \cdot \cos(kx \mp \omega t)\end{aligned}}$$

Welche Funktionen sind Lösungen?

Ansatz:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\hat{s} \cdot \cos(kx - \omega t)\right] = -\hat{s} \cdot k^2 \cdot \cos(kx - \omega t)$$

$$= \frac{1}{c^2} \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left[\hat{s} \cdot \cos(kx - \omega t)\right]$$

612 Theorie

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$s(x,t)$$

$$= \hat{s} \cdot \cos(kx \mp \omega t)$$

Welche Funktionen sind Lösungen?

Ansatz:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\hat{s} \cdot \cos(kx - \omega t\right] = -\hat{s} \cdot k^2 \cdot \cos(kx - \omega t)$$

$$= \frac{1}{c^2} \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left[\hat{s} \cdot \cos(kx - \omega t)\right] = -\frac{\hat{s} \cdot \omega^2}{c^2} \cdot \cos(kx - \omega t)$$

612 Theorie

$$\boxed{\begin{aligned} c &= \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{2\pi}\cdot\lambda \\ &= \nu\cdot\lambda \end{aligned}}$$

Vergleich der beiden Seiten

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\hat{s}\cdot\cos(kx-\omega t\right] = -\hat{s}\cdot k^2\cdot\cos(kx-\omega t)$$

$$= \frac{1}{c^2}\cdot\frac{d^2}{dt^2}\left[\hat{s}\cdot\cos(kx-\omega t)\right] = -\frac{\hat{s}\cdot\omega^2}{c^2}\cdot\cos(kx-\omega t)$$

612 Theorie

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{2\pi} \cdot \lambda$$
$$= \nu \cdot \lambda$$

Wellenzahl und Frequenz

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

612 Theorie

Bedeutung von *c*?

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{2\pi} \cdot \lambda$$

$$= \nu \cdot \lambda$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

612 Theorie

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{2\pi} \cdot \lambda$$

$$= \nu \cdot \lambda$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

Bedeutung von *c*?

Betrachtung der folgenden Wellenfunktion:

$$s(x,t) = \hat{s} \cdot \sin(2\pi\nu \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} x)$$

$$c = \nu \cdot \lambda$$

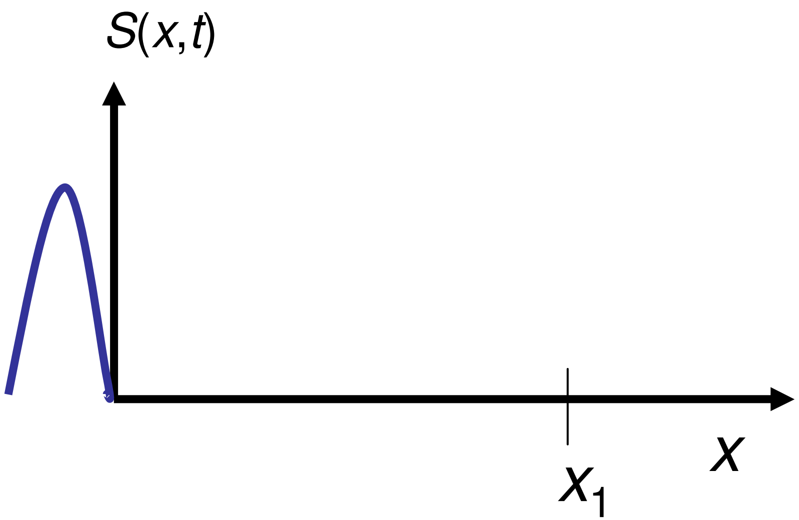
612 Theorie

Bedeutung von *c*?

Betrachtung der folgenden Wellenfunktion:

$$s(x,t) = \hat{s} \cdot \sin(2\pi\nu \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} x)$$

$$c = \frac{x_1 - x}{t_1 - t} = \frac{x_1}{t_1}$$



$$\boxed{c = \nu \cdot \lambda}$$

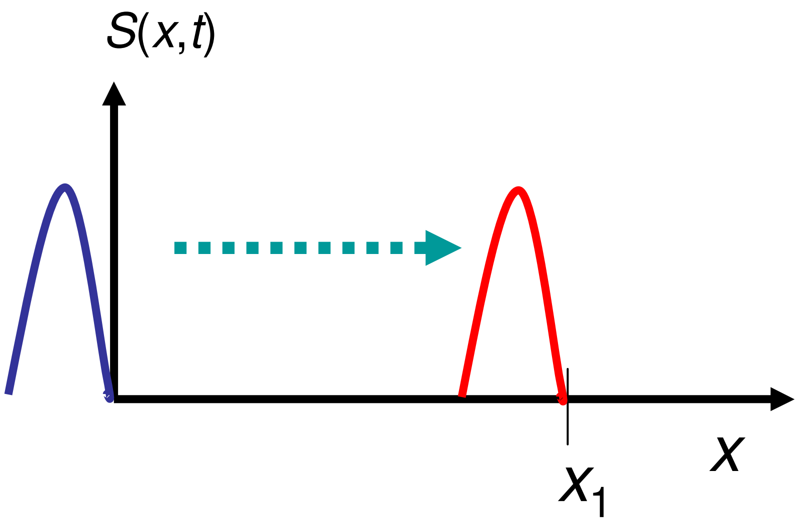
612 Theorie

Bedeutung von *c*?

Betrachtung der folgenden Wellenfunktion:

$$s(x,t) = \hat{s} \cdot \sin(2\pi\nu \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} x)$$

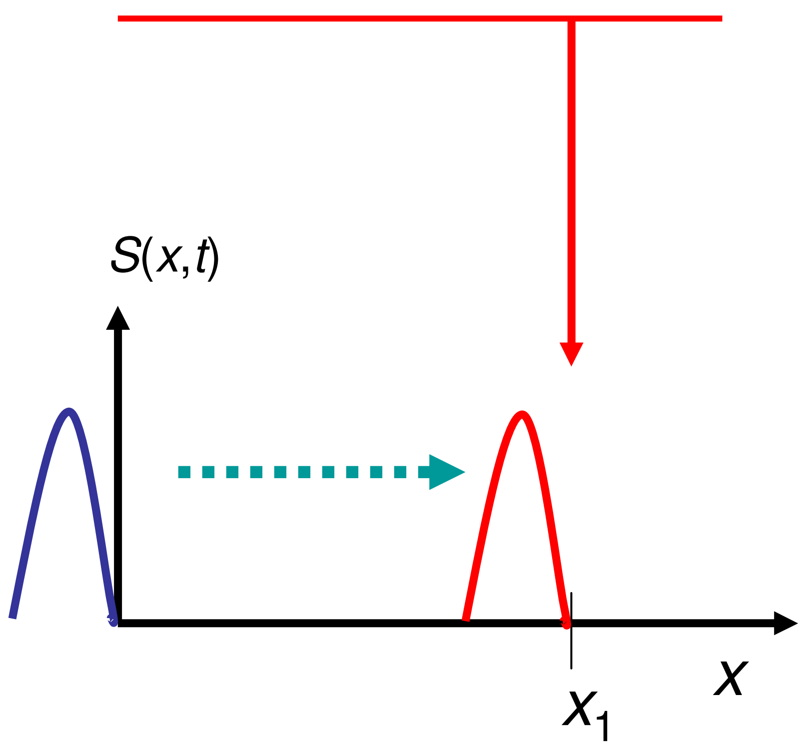
$$c = \frac{x_1 - x}{t_1 - t} = \frac{x_1}{t_1}$$



612 Theorie

$$s(x_1, t)$$

$$= \hat{s} \cdot \sin(2\pi\nu \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} x_1)$$



Bedeutung von *c*?

Betrachtung der folgenden Wellenfunktion:

$$s(x,t) = \hat{s} \cdot \sin(2\pi\nu \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} x)$$

$$c = \frac{x_1 - x}{t_1 - t} = \frac{x_1}{t_1}$$

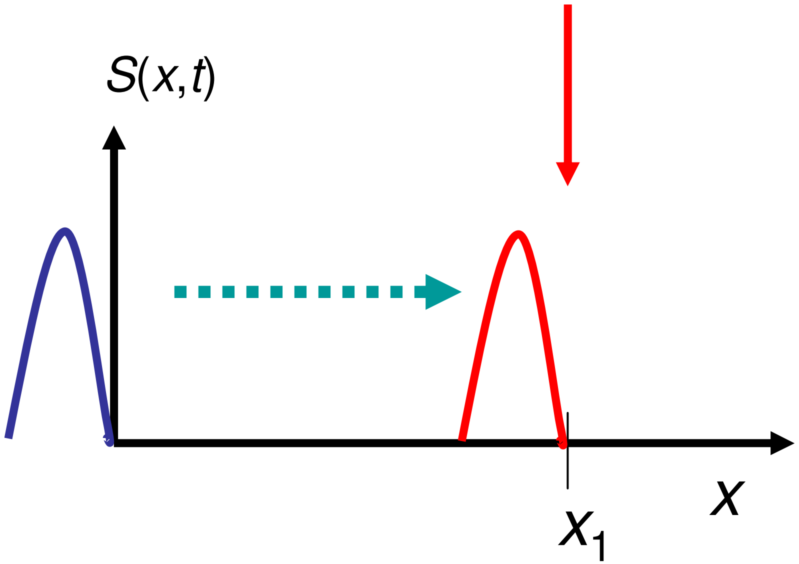
612 Theorie

$$s(x_1,t)$$

$$= \hat{s}\cdot\sin(2\pi\nu\cdot t-\frac{2\pi}{\lambda}x_1)$$

$$x_1 = ct_1$$

$$\Rightarrow s(x_1,t)=\hat{s}\cdot\sin(2\pi\nu\cdot t-\frac{2\pi}{\lambda}ct_1)$$



$$c=\frac{x_1-x}{t_1-t}=\frac{x_1}{t_1}$$

612 Theorie

$$s(x_1, t)$$

$$= \hat{s} \cdot \sin(2\pi\nu \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} x_1)$$

$$x_1 = ct_1$$

$$\Rightarrow s(x_1, t) = \hat{s} \cdot \sin(2\pi\nu \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} ct_1)$$

$$s(x_1, t_1) = \hat{s} \cdot \sin(2\pi\nu \cdot t_1 - \frac{2\pi}{\lambda} ct_1) = \hat{s} \cdot \sin\left[2\pi \cdot t_1 \cdot (\nu - \frac{c}{\lambda})\right]$$

Zeit *t* festhalten

$s(x_1, t)$

612 Theorie

$$= \hat{s} \cdot \sin(2\pi\nu \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} x_1)$$

$$x_1 = ct_1$$

$$\Rightarrow s(x_1, t) = \hat{s} \cdot \sin(2\pi\nu \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} ct_1)$$

$$s(x_1, t_1) = \hat{s} \cdot \sin(2\pi\nu \cdot t_1 - \frac{2\pi}{\lambda} ct_1) = \hat{s} \cdot \sin\left[2\pi \cdot t_1 \cdot (\nu - \frac{c}{\lambda})\right]$$

= 0, da Knoten betrachtet wird!

612 Theorie

$$s(x_1, t_1) = \hat{s} \cdot \sin(2\pi\nu \cdot t_1 - \frac{2\pi}{\lambda} c t_1) = \hat{s} \cdot \sin\left[2\pi \cdot t_1 \cdot (\nu - \frac{c}{\lambda})\right]$$

= 0, da Knoten betrachtet wird!

$$\rightarrow \quad \left[2\pi \cdot t_1 \cdot (\nu - \frac{c}{\lambda})\right] = 0$$

612 Theorie

$$s(x_1, t_1) = \hat{s} \cdot \sin(2\pi\nu \cdot t_1 - \frac{2\pi}{\lambda} c t_1) = \hat{s} \cdot \sin\left[2\pi \cdot t_1 \cdot (\nu - \frac{c}{\lambda})\right]$$

= 0, da Knoten betrachtet wird!

$$\rightarrow \quad \left[2\pi \cdot t_1 \cdot (\nu - \frac{c}{\lambda})\right] = 0 \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda}$$

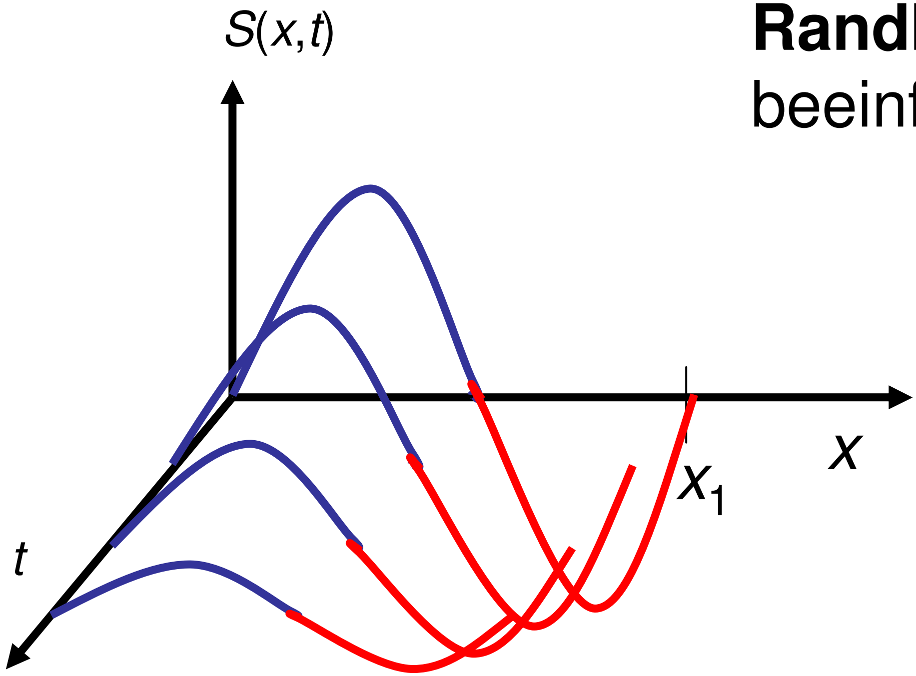
613 stehende Wellen

613 Ziele

- Mögliche Lösungen der Wellengleichung für eingespannte Saite finden und beschreiben können
- Einfluss der Randbedingungen auf die möglichen Frequenzen berechnen können
- Grundintervalle zu den entsprechenden Schwingungsmodi zuordnen können

613 Theorie

Wellengleichung hat zeit- und ortsabhängige Lösungen, welche durch die **Anfangs**- und **Randbedingungen** beeinflusst werden

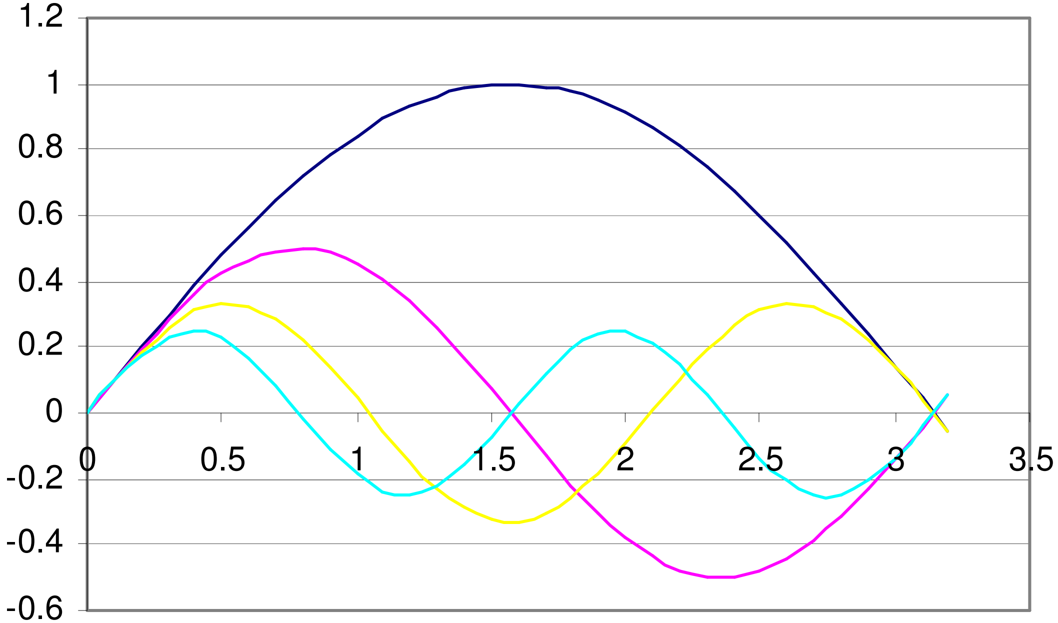


613 Theorie

$$s(x,t) = \hat{s} \cdot \sin(kx) \cdot \sin(\omega t)$$

Spezielle Bedingungen:
eingespannte Saite,

$S(0,t)=0$ und $S(l,t)=0$

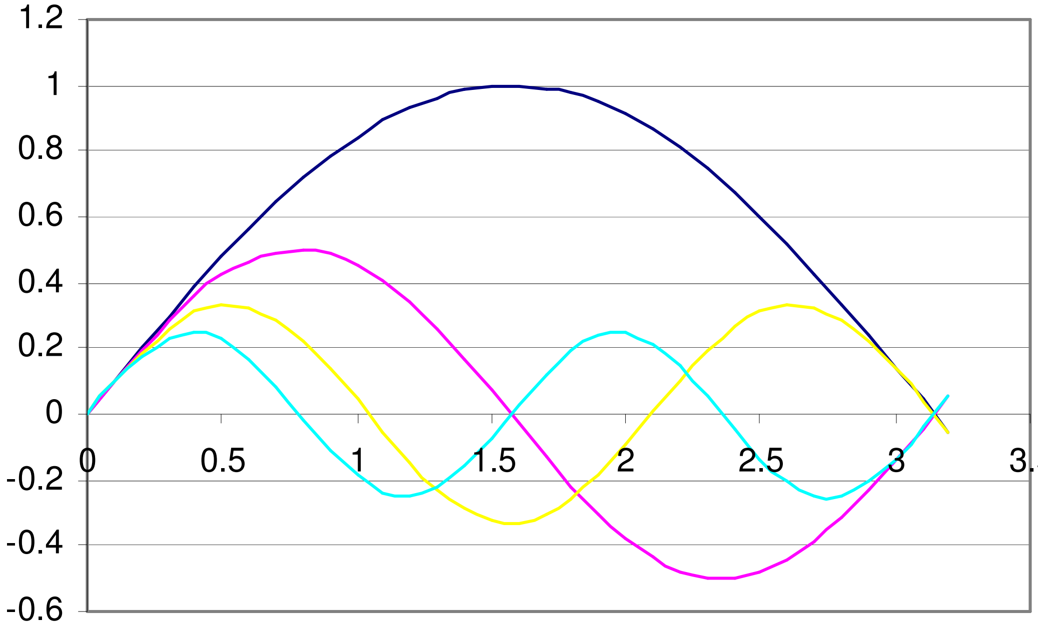


613 Theorie

$$s(x,t) = \hat{s} \cdot \sin(kx) \cdot \sin(\omega t)$$

Spezielle Bedingungen:
eingespannte Saite,

$S(0,t)$=0 und $S(l,t)$=0



$$\lambda_n = \frac{2l}{n}$$

$$\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c}{2l} \cdot n$$

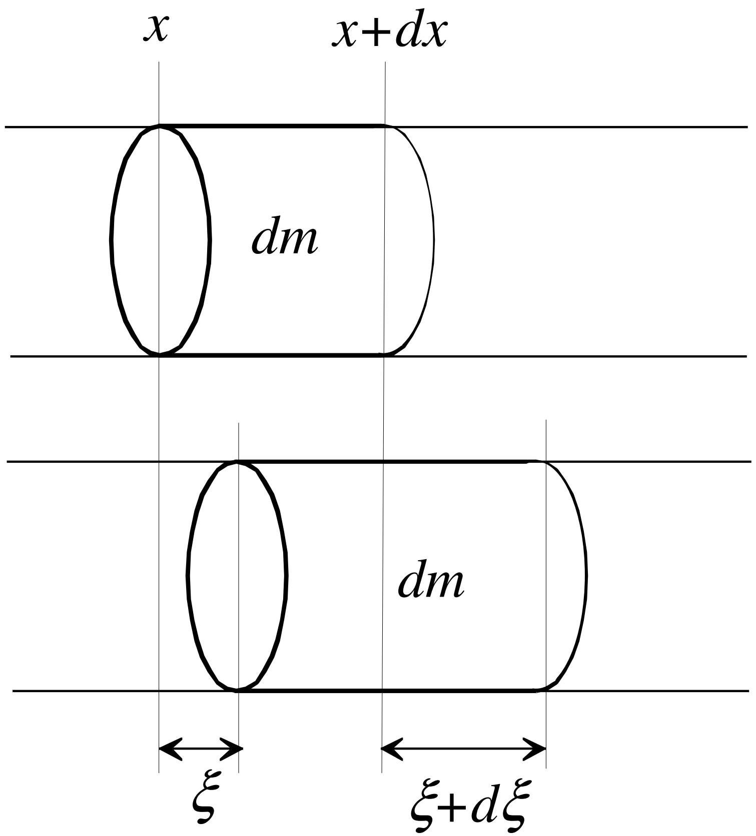
614 Longitudinalwellen in Festkörpern

614 Ziele

- Unterschiede zwischen Transversalwellen und Longitudinalwellen erklären können
- Einfluss der elatsischen Konstanten beschreiben und Wellenausbreitungs-geschwindigkeit berechnen können

614 Theorie

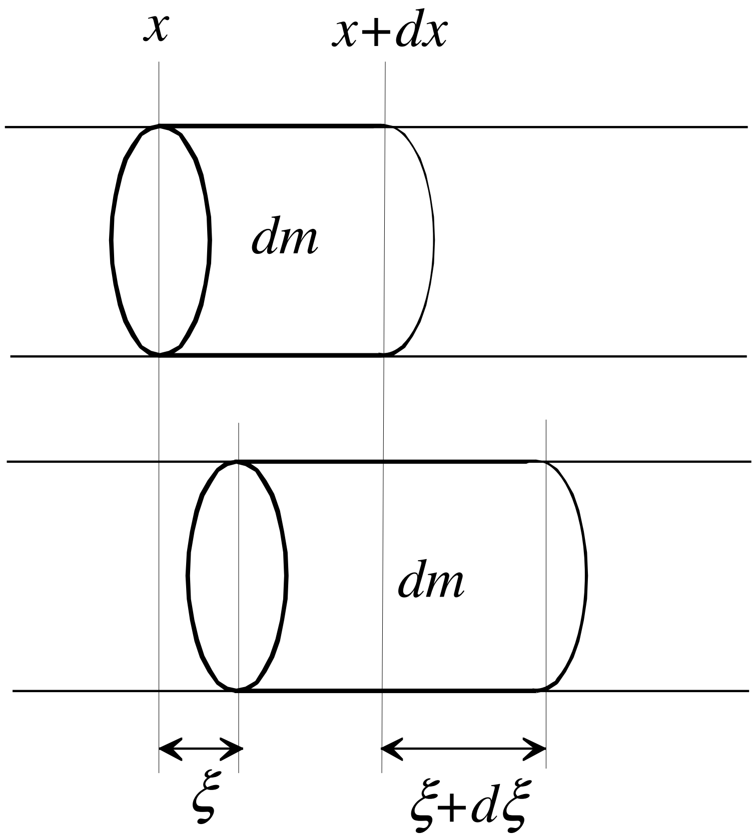
Modell für Longitudinalwelle



614 Theorie

$$\sigma = \varepsilon E \qquad l = dx$$

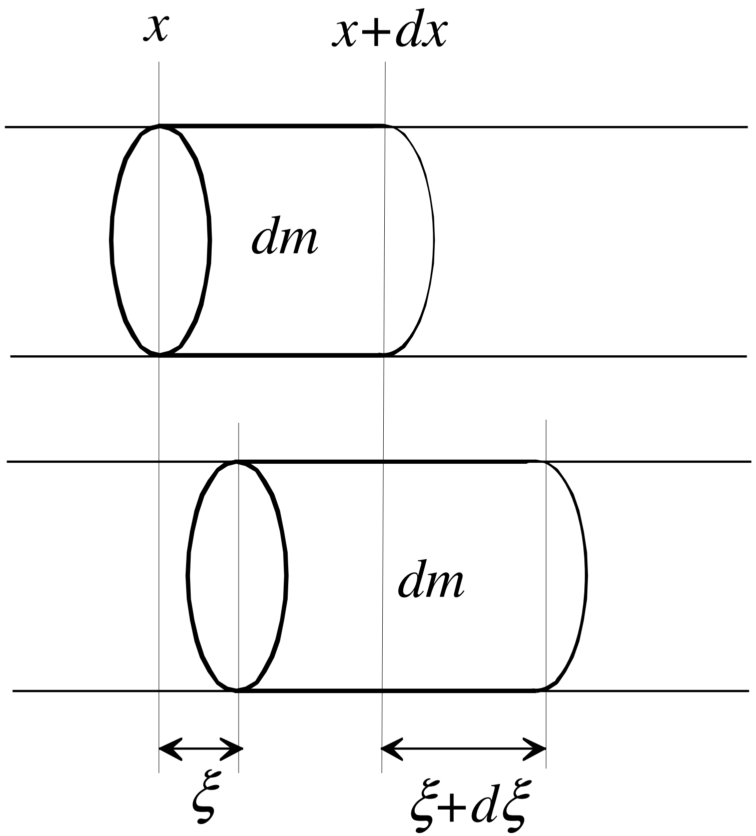
Modell für Longitudinalwelle



614 Theorie

$$\sigma = \varepsilon E \qquad l = dx$$

Modell für Longitudinalwelle

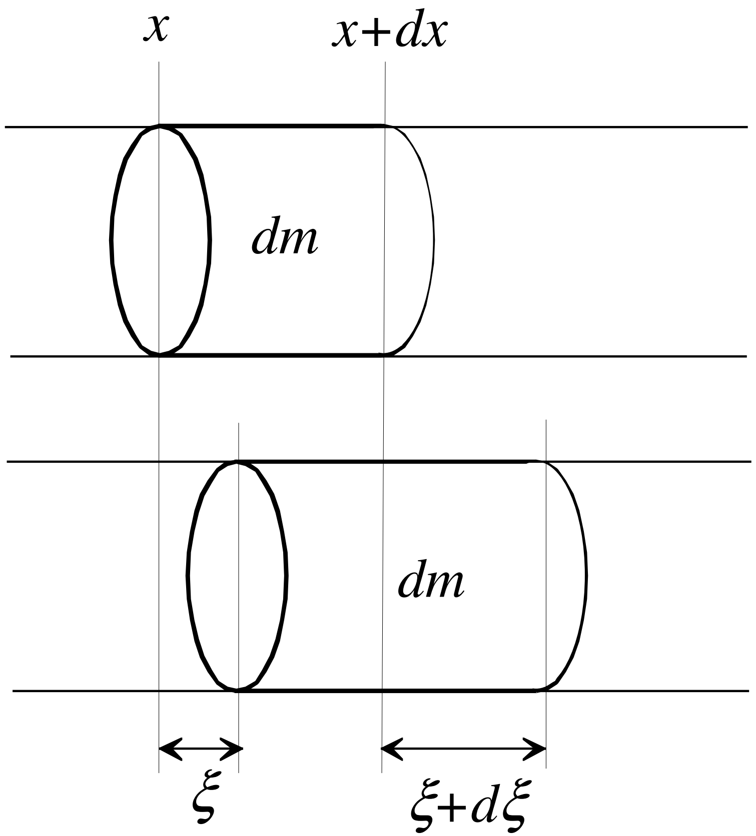


$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\xi + d\xi - \xi}{dx} = \frac{d\xi}{dx}$$

614 Theorie

$$\sigma = \varepsilon E \qquad l = dx$$

Wellengleichung



$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\xi + d\xi - \xi}{dx} = \frac{d\xi}{dx}$$

$$F = \sigma A$$

614 Theorie

$$\sigma = \varepsilon E \qquad l = dx$$

Wellengleichung

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\xi + d\xi - \xi}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \qquad F = \sigma A$$

$$\rho A \cdot dx \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = \left(F(x+dx,t) - F(x,t)\right)$$

614 Theorie

$$\sigma = \varepsilon E \qquad l = dx$$

Wellengleichung

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\xi + d\xi - \xi}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \qquad F = \sigma A$$

$$\rho A \cdot dx \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = A \cdot \big(\sigma(x + dx, t) - \sigma(x, t)\big) =$$

614 Theorie

$$\sigma = \varepsilon E \qquad l = dx$$

Wellengleichung

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\xi + d\xi - \xi}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \qquad F = \sigma A$$

$$\rho A \cdot dx \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = A \cdot \left(\sigma(x+dx,t) - \sigma(x,t)\right) =$$

$$= AE \cdot \left(\varepsilon(x+dx) - \varepsilon(x)\right)$$

614 Theorie

$$\sigma = \varepsilon E \qquad l = dx$$

Wellengleichung

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\xi + d\xi - \xi}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \qquad F = \sigma A$$

$$\rho A \cdot dx \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = A \cdot \left(\sigma(x+dx,t) - \sigma(x,t)\right) =$$

$$= AE \cdot \left(\varepsilon(x+dx) - \varepsilon(x)\right) = AE \cdot \left(\left[\frac{d\xi}{dx}\right]_{x+dx} - \left[\frac{d\xi}{dx}\right]_{x}\right)$$

614 Theorie

Wellengleichung

$$\rho A \cdot dx \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = A \cdot \big(\sigma(x+dx,t) - \sigma(x,t)\big) =$$

$$= AE \cdot \big(\varepsilon(x+dx) - \varepsilon(x)\big) = AE \cdot \left(\left[\frac{d\xi}{dx}\right]_{x+dx} - \left[\frac{d\xi}{dx}\right]_{x} \right)$$

$$\rightarrow \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

614 Theorie

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Wellengleichung

Wellenausbreitungs-
geschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$