500 Rotation des starren Körpers

510 *Drehungen und Drehmomente*
520 *Rotationsenergie und Drehimpuls*

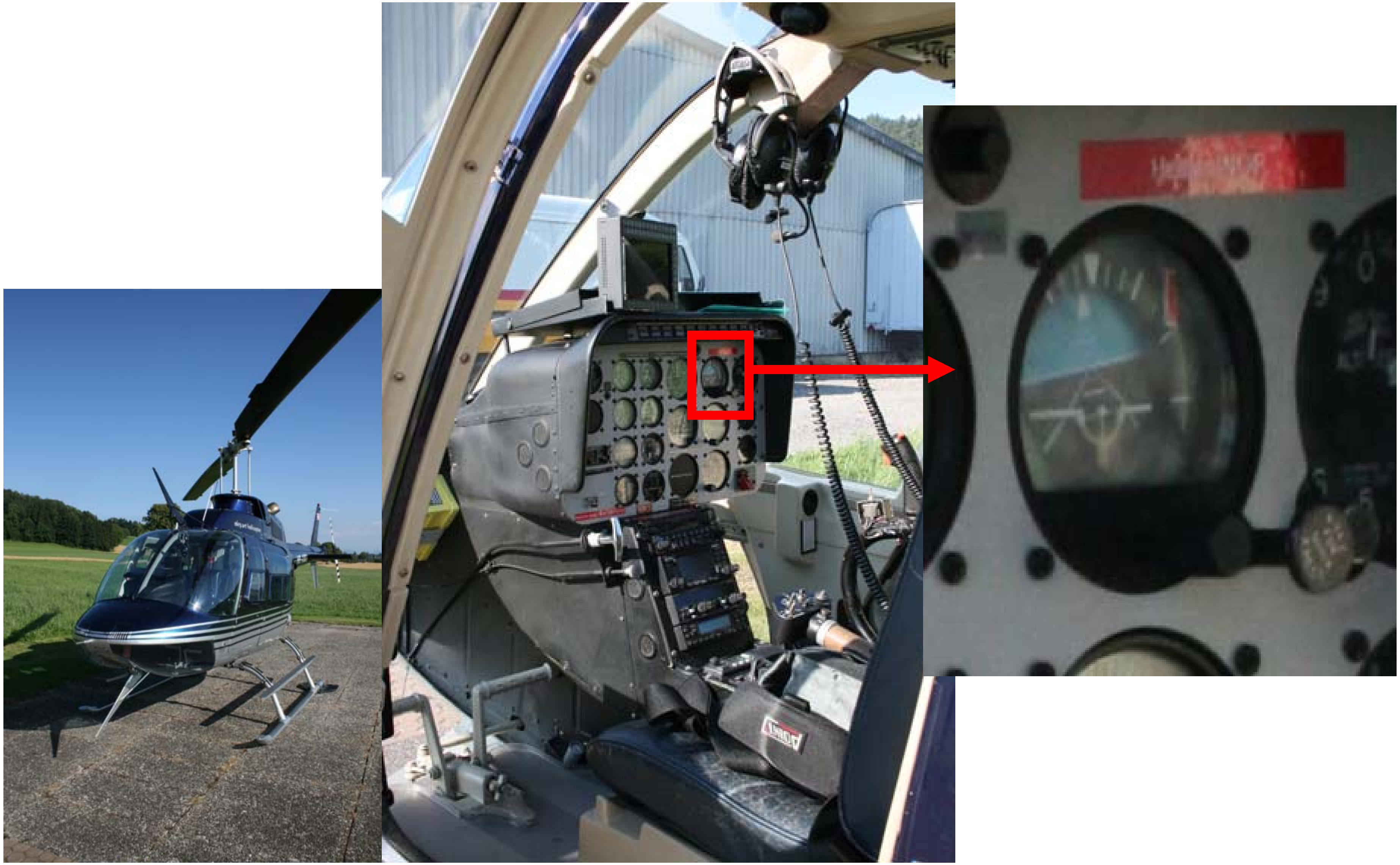
um was geht es?

Beschreibung von Bewegungen (primär Drehungen) des starren Körpers

Analogie zu Kap. 200 und 300:
Kraft – Drehmoment
Impuls – Drehimpuls
Energie – Rotationsenergie

Mathematik: Drehachsen sind Axialvektoren

Kreisel-Instrumente: DG, Attitude Indicator

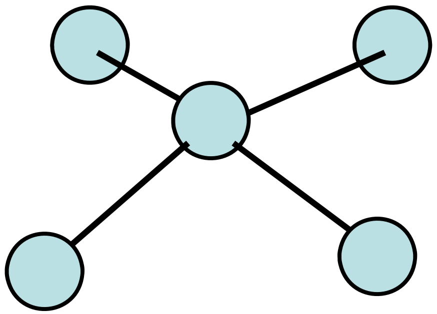


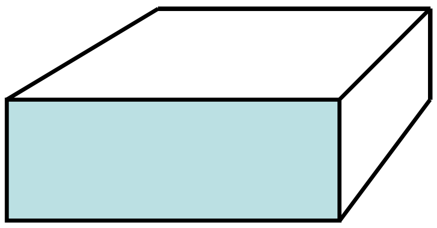
511 Schwerpunkt

511 Ziele

- Schwerpunkt und Geschwindigkeit des Schwerpunktes für einfache Körper berechnen können

511 Theorie





Konzept starrer Körper

2 Approaches:
- Punktmassen mit starren Verbindungen
- nicht-elastisches, nicht-plastisch deformierbares Kontinuum

511 Theorie

$$\vec{r}_{CG} = \frac{\int \vec{r} \cdot dm}{\int dm} \approx \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Schwerpunkt

511 Theorie

$$\vec{r}_{CG} = \frac{\int \vec{r} \cdot dm}{\int dm} \approx \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Schwerpunkt

$$\vec{v}_{CG} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{m_{tot}}$$

Geschwindigkeit des Schwerpunktes (vgl. 231)

512 Drehmoment und Axialvektoren

512 Ziele

- Drehungen, Drehbewegungen vektoriell beschreiben können
- Drehmomente definieren und berechnen können

512 Theorie

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Drehmoment **M**

512 Theorie

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Drehmoment **M**

Winkelgeschwindigkeit ω

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left[r\varphi\right]$$

$$= r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = r \cdot \omega$$

512 Theorie

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Drehmoment **M**

Winkelgeschwindigkeit ω

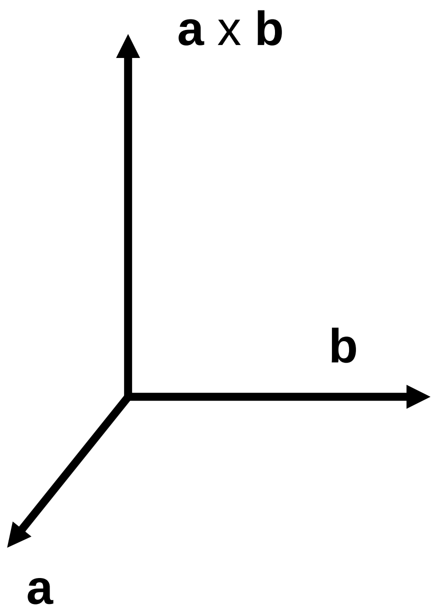
Vektor der Winkelgeschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left[r\varphi\right]$$

$$= r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = r \cdot \omega$$

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \frac{\vec{M}}{M}$$

512 Theorie



Intermezzo: Kreuz- bzw. Vektorprodukte in der Physik

512 Theorie

Vektorprodukt als Tensorprodukt

Tensor 0.Stufe	Skalar T
Tensor 1. Stufe Vektor	$\vec{T} = T_i$
Tensor 2.Stufe	Matrix T_{ik}
Tensor 3.Stufe	"Zahlenwürfel" T_{ikl}

512 Theorie

Vektorprodukt als Tensorprodukt:

T_{ikl} = ?

$$\vec{a} \times \vec{b} = T_{ikl} a_k b_l$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - b_y a_z \\ a_z b_x - b_z a_x \\ a_x b_y - b_x a_y \end{pmatrix}$$

512 Theorie

$T_{ikl} = ?$

Idee: Koeffizientenvergleich

$$T_{1kl} a_k b_l =$$

$$= T_{111} a_1 b_1 + T_{112} a_1 b_2 + T_{113} a_1 b_3 +$$
$$T_{121} a_2 b_1 + T_{122} a_2 b_2 + T_{123} a_2 b_3 +$$
$$T_{131} a_3 b_1 + T_{132} a_3 b_2 + T_{133} a_3 b_3$$

$$= a_2 b_3 - b_2 a_3$$

512 Theorie

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformationsverhalten von

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

512 Theorie

Transformationsverhalten von

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A_{ik} a_k) \times (A_{ik} b_k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

512 Theorie

Transformationsverhalten von

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

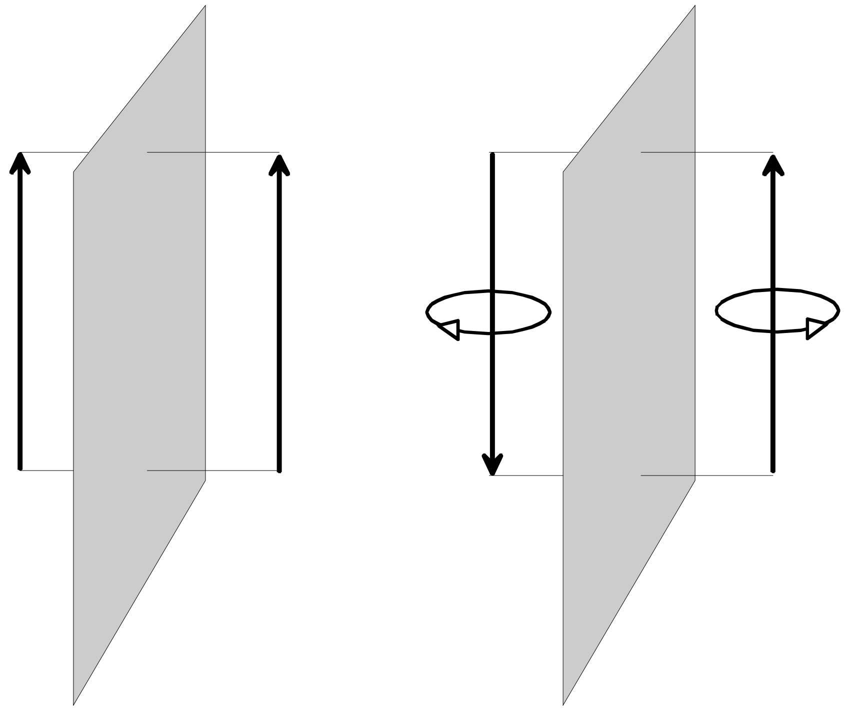
$$\boxed{\begin{aligned} (A_{ik} a_k) \times (A_{ik} b_k) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ A_{ik} (T_{klm} a_l b_m) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

512 Theorie

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformationsverhalten von

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

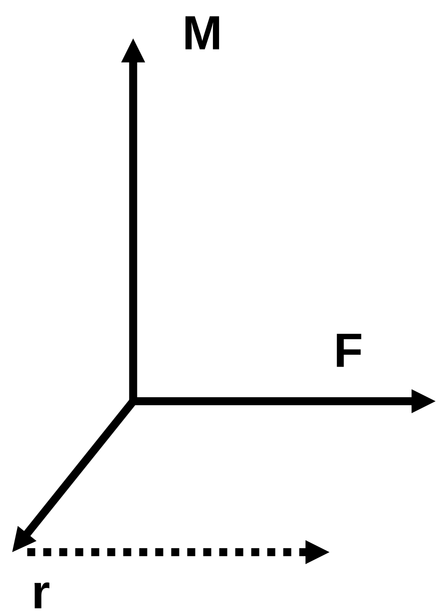


512 Theorie

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Drehmoment als Axialvektor

$$M = \left| \vec{r} \times \vec{F} \right| = r \cdot F \cdot \sin\alpha$$



512 Theorie

$$\vec{M}_{tot} = \sum_i \vec{M}_i$$

Prinzipien

Summe aller Drehmomente

512 Theorie

$$\vec{M}_{tot} = \sum_i \vec{M}_i$$

Prinzipien

Summe aller Drehmomente

Gleichgewichtsbedingungen (statisch)

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_i \vec{F}_i &= 0 \\ \sum_i M_i &= 0\end{aligned}}$$

521 Rotationsenergie

521 Ziele

- Rotationsenergie berechnen können
- Trägheitsmoment definieren und zur Berechnung der Rotationsenergie anwenden können
- Satz von Steiner anwenden können

521 Theorie

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \frac{1}{2} m r^2 \cdot \omega^2$$

kinetische Energie für Rotation (Bewegung auf exakter Kreisbahn)

521 Theorie

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \frac{1}{2} m r^2 \cdot \omega^2$$

kinetische Energie für Rotation (Bewegung auf exakter Kreisbahn)

Für mehrere Massen m_i

$$\frac{1}{2} m_1 r_1^2 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} m_3 r_3^2 \cdot \omega^2 + \ldots$$

521 Theorie

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \frac{1}{2} m r^2 \cdot \omega^2$$

kinetische Energie für Rotation (Bewegung auf exakter Kreisbahn)

Für mehrere Massen m_i

$$\frac{1}{2} m_1 r_1^2 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} m_3 r_3^2 \cdot \omega^2 + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \theta \omega^2$$

521 Theorie

Def. Trägheitsmoment

$$\theta = \int_K r^2 \cdot dm$$

Tab.1. Trägheitsmomente für einfache Körper

	θ_s	Bemerkung
dünner Stab	$\frac{1}{12}ml^2$	Länge l, Drehachse senkrecht zur Längsachse
Quader	$\frac{1}{12}m\cdot(a^2+b^2)$	Dimensionen a, b, c: Drehachse parallel zu c
Zylinder	$\frac{1}{2}mr^2$	Radius r, Achse parallel zur Höhe
Zylinder	$m\cdot\left(\frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right)$	Achse senkrecht zur Höhe h
Hohlzylinder	$\frac{1}{2}m(r_1^2+r_2^2)$	Drehachse parallel zur Höhe
Kugel (voll)	$\frac{2}{5}mr^2$	Radius r
Kugel (hohl)	$\approx\frac{2}{3}mr^2$	Wandstärke viel kleiner als Radius r

521 Theorie

$$\theta_s = \sum_i m_i r_i^2$$

$$= \sum_i m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2)$$

Rotationsachse nicht durch Schwerpunkt: Satz von Steiner

521 Theorie

$$\theta_s = \sum_i m_i r_i^2$$

$$= \sum_i m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2)$$

Rotationsachse nicht durch Schwerpunkt: Satz von Steiner

$$\theta = \sum_i m_i \tilde{r}_i^{\,2} = \sum_i m_i \left((x_i - \tilde{x})^2 + (y_i - \tilde{y})^2 \right)$$

521 Theorie

Rotationsachse nicht durch Schwerpunkt: Satz von Steiner

$$\theta_s = \sum_i m_i r_i^2$$

$$= \sum_i m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2)$$

$$\theta = \sum_i m_i \tilde{r}_i^2 = \sum_i m_i \left((x_i - \tilde{x})^2 + (y_i - \tilde{y})^2 \right)$$

$$= \sum_i m_i \left(x_i^2 + \tilde{x}^2 \right) - \sum_i m_i \cdot 2x_i \cdot \tilde{x} - \sum_i m_i \cdot 2y_i \cdot \tilde{y} + \sum_i m_i \left(y_i^2 + \tilde{y}^2 \right)$$

521 Theorie

Rotationsachse nicht durch Schwerpunkt: Satz von Steiner

$$\theta_s = \sum_i m_i r_i^2$$

$$= \sum_i m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2)$$

$$\theta = \sum_i m_i \tilde{r}_i^2 = \sum_i m_i \left((x_i - \tilde{x})^2 + (y_i - \tilde{y})^2 \right)$$

$$= \sum_i m_i \left(x_i^2 + \tilde{x}^2 \right) - \sum_i m_i \cdot 2x_i \cdot \tilde{x} - \sum_i m_i \cdot 2y_i \cdot \tilde{y} + \sum_i m_i \left(y_i^2 + \tilde{y}^2 \right)$$

$$= \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right) - 2\tilde{x} \sum_i m_i \cdot x_i - 2\tilde{y} \sum_i m_i \cdot y_i + \left(\sum_i m_i \right) \cdot \left(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \right)$$

521 Theorie

$$\boxed{\sum_i m_i\left(x_i^2+y_i^2\right)=\theta_s}$$

Rotationsachse nicht durch Schwerpunkt: Satz von Steiner

$$\theta=\sum_i m_i\tilde{r}_i^2=\sum_i m_i\left((x_i-\tilde{x})^2+(y_i-\tilde{y})^2\right)$$

$$=\sum_i m_i\left(x_i^2+\tilde{x}^2\right)-\sum_i m_i\cdot 2x_i\cdot\tilde{x}-\sum_i m_i\cdot 2y_i\cdot\tilde{y}+\sum_i m_i\left(y_i^2+\tilde{y}^2\right)$$

$$\boxed{=\sum_i m_i\left(x_i^2+y_i^2\right)}-2\tilde{x}\sum_i m_i\cdot x_i-2\tilde{y}\sum_i m_i\cdot y_i+\left(\sum_i m_i\right)\cdot\left(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2\right)$$

521 Theorie

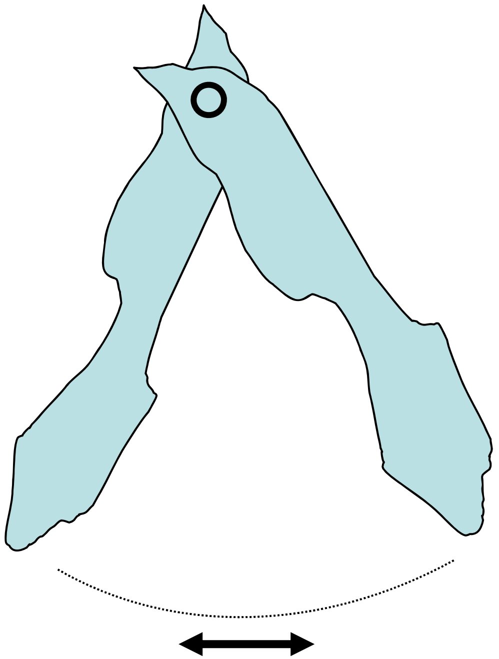
$$\boxed{\sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) = \theta_s}$$

$$\theta = \sum_i m_i \tilde{r}_i^{\,2} = \sum_i m_i \left((x_i - \tilde{x})^2 + (y_i - \tilde{y})^2\right)$$

$$= \boxed{\sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)} \boxed{- 2\tilde{x} \sum_i m_i \cdot x_i - 2\tilde{y} \sum_i m_i \cdot y_i} + \left(\sum_i m_i\right) \cdot \left(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2\right)$$

=0 für Schwerp. bei (0,0)

$$\rightarrow \quad \theta = \theta_s + \left(\sum_i m_i\right) \cdot \left(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2\right) = \theta_s + ms^2$$



521 Theorie

Anwendung: Physikalisches Pendel

Periode *T*:

$$T \approx 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\theta_s + ms^2}{mgs}}$$

522 Drehimpuls

522 Ziele

- Zusammenhang zwischen Drehmoment und Drehimpuls verstehen (→ Analogie zu Kraft und Impuls)
- Drehimpuls berechnen können
- Präzession eines Kreisels erklären und die Präzessionsfrequenz berechnen können

522 Theorie

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Drehimpuls **L**

522 Theorie

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Drehimpuls **L**

Zeitl. Ableitung

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{r} \times \vec{p}\right]$$

522 Theorie

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Drehimpuls **L**

Zeitl. Ableitung

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{r} \times \vec{p}\right] = \vec{p} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

522 Theorie

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Drehimpuls **L**

Zeitl. Ableitung

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{r} \times \vec{p}\right] = \vec{p} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$= \vec{p} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}$$

522 Theorie

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Drehimpuls **L**

Zeitl. Ableitung → Drehmoment **M**

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{r} \times \vec{p}\right] = \vec{p} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$= \boxed{\vec{p} \times \vec{v}} + \vec{r} \times \vec{F}$$

=0, da p und v in die gleiche Richtung schauen

$$= \vec{r} \times \vec{F}$$

522 Theorie

Drehimpuls **L**

Zeitl. Ableitung → Drehmoment **M**

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

522 Theorie

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Drehimpuls **L**, Betrag *L* und Trägheitsmoment

$$L = r \cdot p \cdot \sin \vartheta$$

522 Theorie

Drehimpuls **L**, Betrag *L* und Trägheitsmoment

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$L = r \cdot p \cdot \sin \vartheta$$

$$L = r \cdot p = r \cdot mv$$

522 Theorie

Drehimpuls **L**, Betrag *L* und Trägheitsmoment

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$L = r \cdot p \cdot \sin \vartheta$$

$$L = r \cdot p = r \cdot mv = r \cdot m \cdot r\omega = mr^2\omega$$

522 Theorie

Drehimpuls **L**, Betrag *L* und Trägheitsmoment

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$L = r \cdot p \cdot \sin \vartheta$$

$$L = r \cdot p = r \cdot mv = r \cdot m \cdot r\omega = mr^2\omega$$

$$\longrightarrow \quad L = \left(\sum_i m_i \cdot r_i^2 \right) \cdot \omega = \theta\omega$$

522 Theorie

Zusammenhang von Drehimpuls und Rotationsenergie ist in Analogie zu Impuls und kinetischer Energie

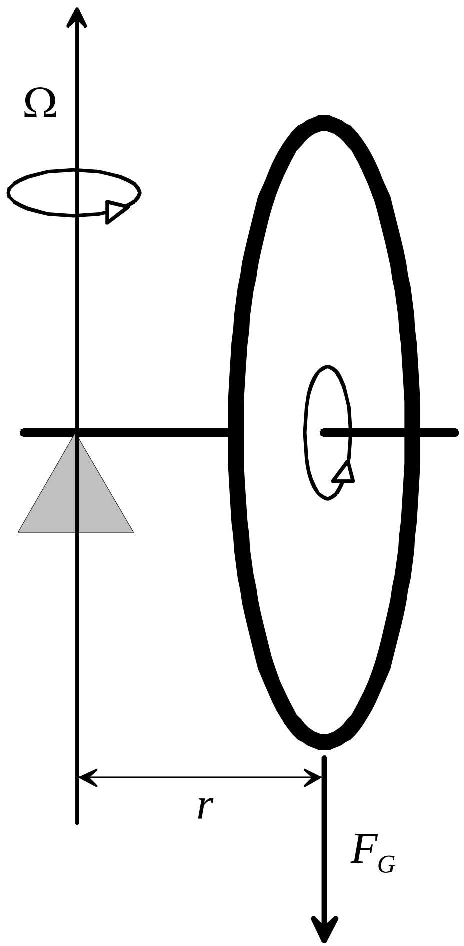
$$E_{rot} = \frac{L^2}{2\theta} \quad \Longleftrightarrow \quad E_{kin} = \frac{p^2}{2m}$$

522 Theorie

kräftefrei gelagerter symmetrischer Kreisel

→ keine Drehmomenteinwirkung, auch nicht durch Reibung

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$



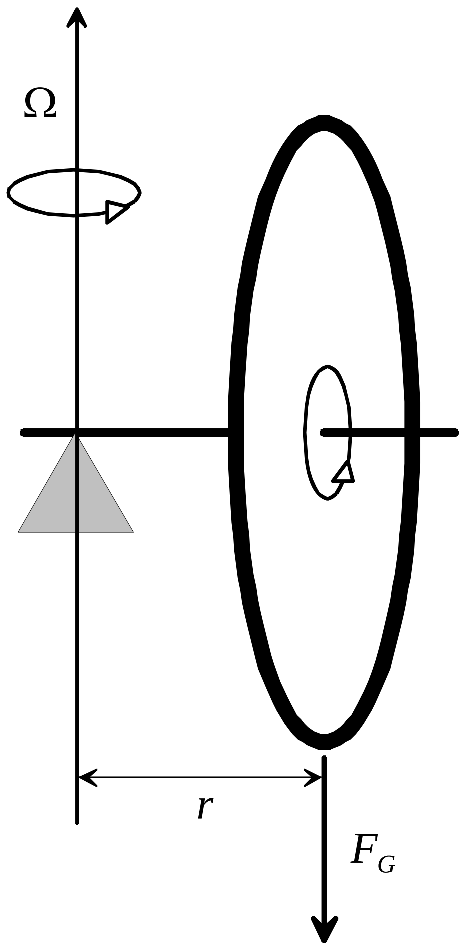
522 Theorie

nicht kräftefrei gelagerter Kreisel

→ Präzession

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_G \neq 0$$

522 Theorie



nicht kräftefrei gelagerter Kreisel

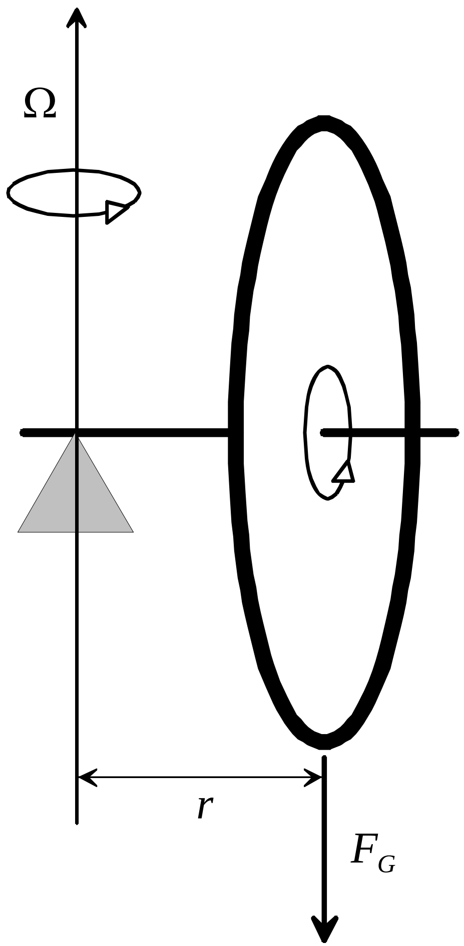
→ Präzession

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_G \neq 0$$

$$r \cdot F_G \cdot \sin\vartheta = rmg \cdot \sin\vartheta$$

$$= \Omega L \cdot \sin\vartheta$$

522 Theorie



nicht kräftefrei gelagerter Kreisel

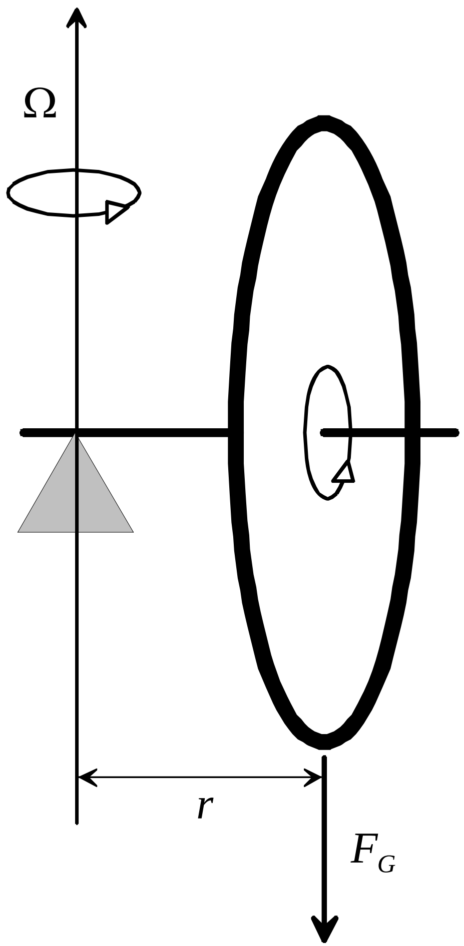
→ Präzession

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_G \neq 0$$

$$r \cdot F_G \cdot \sin\vartheta = rmg \cdot \sin\vartheta$$

$$= \Omega L \cdot \sin\vartheta$$

$$\left|\frac{d\vec{L}}{dt}\right| = \left|\vec{\Omega} \times \vec{L}\right|$$



522 Theorie

Präzessionsfrequenz

$$r \cdot F_G \cdot \sin\vartheta = rmg \cdot \sin\vartheta$$
$$= \Omega L \cdot \sin\vartheta$$

$$\longrightarrow \quad \Omega = \frac{rmg}{L}$$

523 Trägheitsmomententensor

523 Ziele

- Drehimpuls und Rotationsenergie für einfache Körper, aber allgemeiner Lage der Drehachse (durch Schwerpunkt) berechnen können
- Tensoreigenschaft des Trägheitsmoments erklären können

523 Theorie

Trägheitsmomenten-Tensor

$$\theta_{ik} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i x_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i x_i z_i & -\sum_i m_i y_i z_i & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}$$

523 Theorie

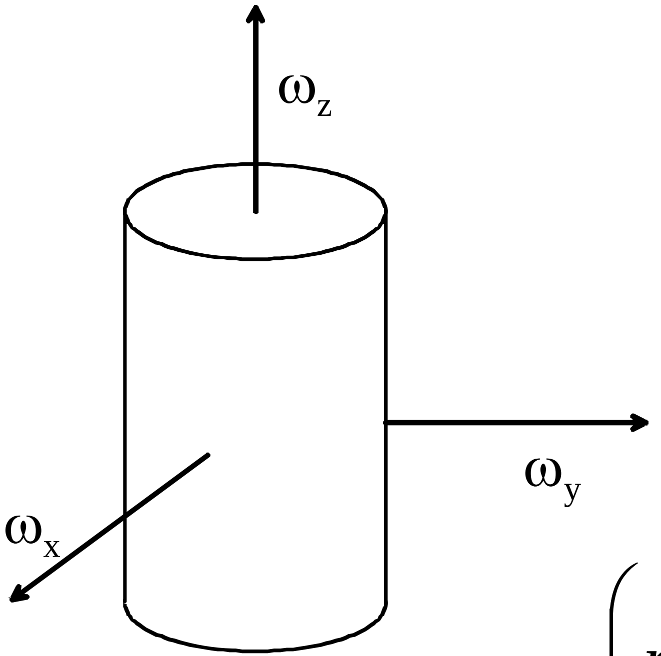
Trägheitsmomenten-Tensor:

Hauptachsenform

$$\theta_{ik} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & 0 & 0 \\ 0 & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & 0 \\ 0 & 0 & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}$$

523 Theorie

Bsp. Zylinder



$$\theta_{ik} = \begin{pmatrix} m\left(\frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mr^2 \end{pmatrix}$$

523 Theorie

Berechnung von Energie und Drehimpuls

$$E_{rot} = \frac{1}{2}\omega_i \theta_{ik} \omega_k$$

$$E_{rot} = E_{rot,x} + E_{rot,y} + E_{rot,z}$$

(für Hauptachsenform)

$$L_i = \theta_{ik} \omega_k$$

523 Theorie

Euler-Gleichungen

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\theta_{ik}\omega_k\right] = M_k$$

$$\theta_{ik} = \theta_{ik}(t)$$

523 Theorie

Euler-Gleichungen

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\theta_{ik}\omega_k\right] = M_k$$

$$\theta_{ik} = \theta_{ik}(t)$$

$$\Theta\vec{\omega} = R\Theta_L R^T \vec{\omega}$$

523 Theorie

Euler-Gleichungen

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\theta_{ik}\omega_k\right] = M_k$$

$$\theta_{ik} = \theta_{ik}(t)$$

$$\Theta\vec{\omega} = R\Theta_L R^T \vec{\omega}$$

$$d/dt\left[R\Theta R^T \vec{\omega}\right] = \dot{R}\Theta_L R^T \vec{\omega} + R\Theta_L \dot{R}^T \vec{\omega} + R\Theta_L R^T \dot{\vec{\omega}}$$

523 Theorie

Euler-Gleichungen

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\theta_{ik}\omega_k\right] = M_k$$

$$\theta_{ik} = \theta_{ik}(t)$$

$$\Theta\vec{\omega} = R\Theta_L R^T \vec{\omega}$$

$$d/dt\left[R\Theta R^T \vec{\omega}\right] = \dot{R}\Theta_L R^T \vec{\omega} + R\Theta_L \dot{R}^T \vec{\omega} + R\Theta_L R^T \dot{\vec{\omega}}$$

$$RR^T = I \quad \rightarrow \quad \dot{R}\Theta_L R^T = \dot{R}R^T \Theta R R^T = \dot{R}R^T \Theta$$

523 Theorie

Euler-Gleichungen

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\theta_{ik}\omega_k\right] = M_k$$

$$\theta_{ik} = \theta_{ik}(t)$$

$$\Theta\vec{\omega} = R\Theta_L R^T \vec{\omega}$$

$$d/dt\left[R\Theta R^T \vec{\omega}\right] = \dot{R}\Theta_L R^T \vec{\omega} + R\Theta_L \dot{R}^T \vec{\omega} + R\Theta_L R^T \dot{\vec{\omega}}$$

$$RR^T = I \quad \rightarrow \quad \dot{R}\Theta_L R^T = \dot{R}R^T\Theta R R^T = \dot{R}R^T\Theta$$

$$d/dt\left[R\Theta R^T \vec{\omega}\right] = \dot{R}R^T\Theta\vec{\omega} + \Theta R\dot{R}^T \vec{\omega} + \Theta\dot{\vec{\omega}}$$

523 Theorie

Euler-Gleichungen

$$d/dt\left[R\Theta R^T\overrightarrow{\omega}\right]=\dot{R}R^T\Theta\overrightarrow{\omega}+\Theta R\dot{R}^T\overrightarrow{\omega}+\Theta\dot{\vec{\omega}}$$

... $\rightarrow$ $$\vec{M}_L=\vec{\omega}_L\times(\Theta_L\vec{\omega}_L)+\Theta_L\frac{d\vec{\omega}_L}{dt}$$