

**400** Schwingungen

410 *Pendel*

420 *Untersuchung von  
oszillierenden Systemen*

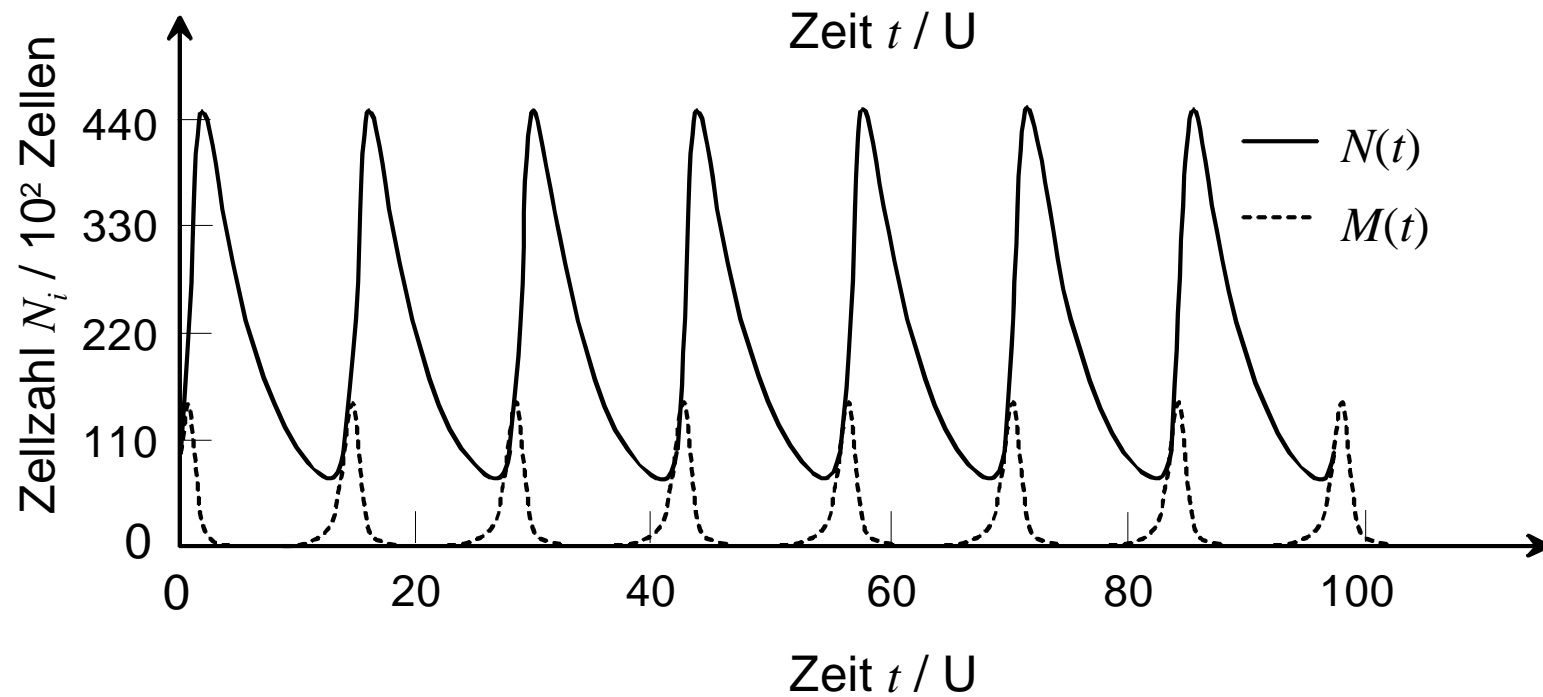
um was geht es?

Schwingungen = Oszillationen

Beschreibung von schwingenden  
Systemen

Methoden zur Analyse, Modellierung  
und Simulation oszillierender  
Systeme

# Oszillierende Populationen im Lotka-Volterra-Modell

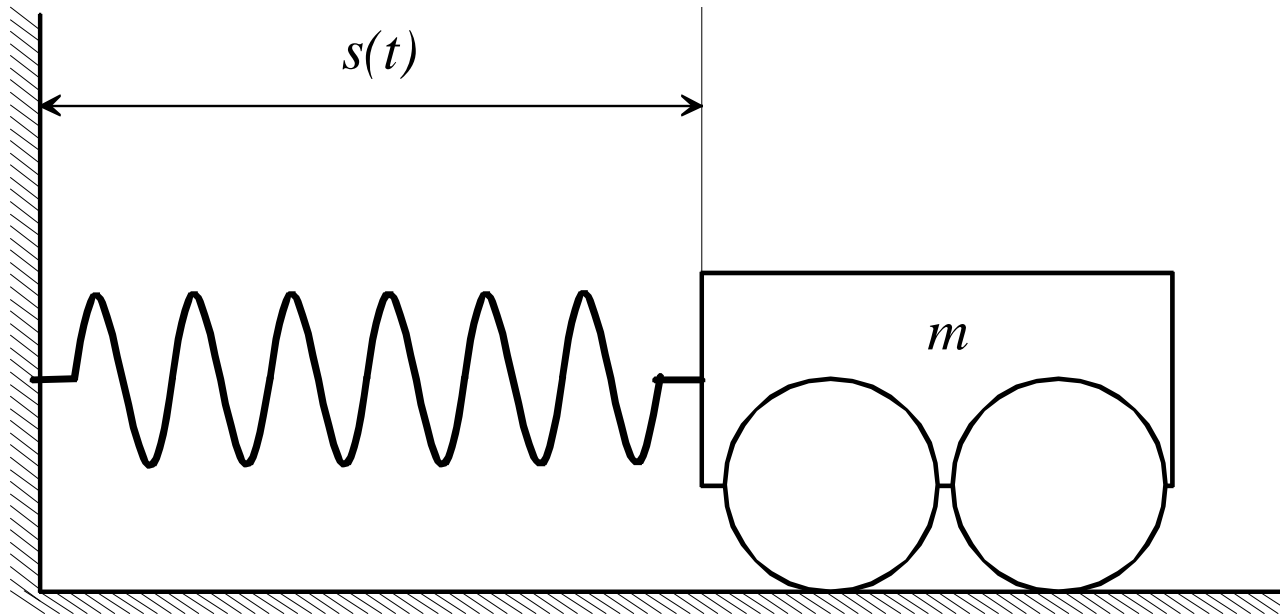


# 411 Energiebetrachtung eines ungedämpften Federpendels



# 411 Theorie

Auslenkung von  
Gleichgewichtszustand:  $s(t)$

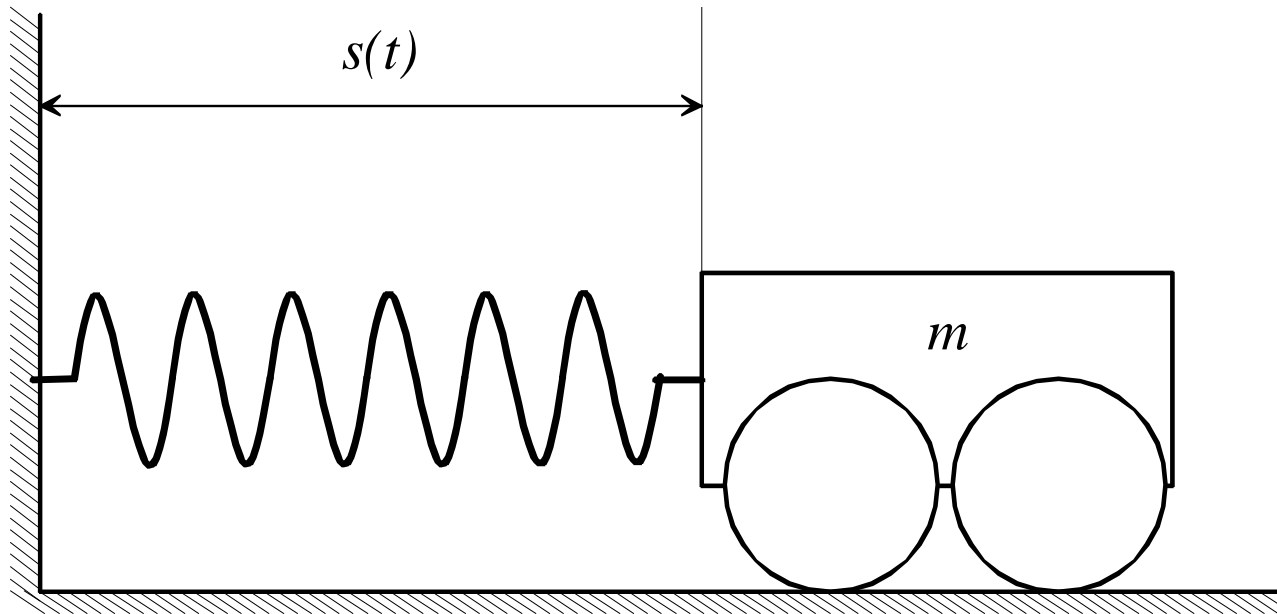


$$F_D = D \cdot s$$

## 411 Theorie

Auslenkung von  
Gleichgewichtszustand:  $s(t)$

Federkraft  $F_D$



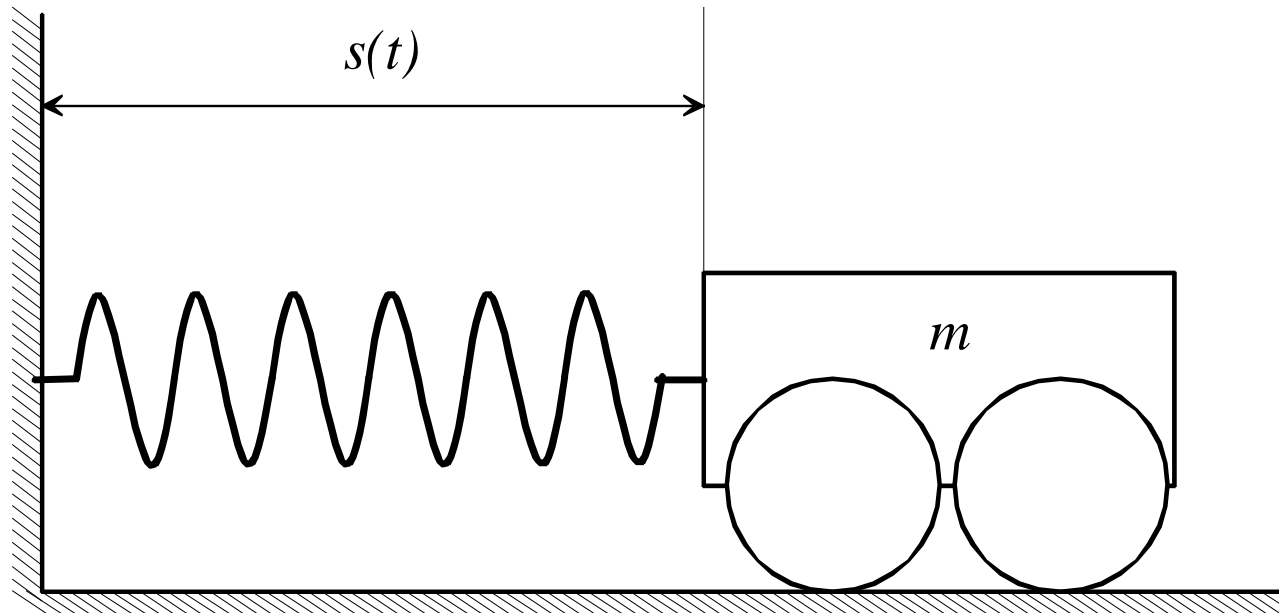
$$F_D = D \cdot s$$

$$dW = F_D \cdot ds = D \cdot s \cdot ds$$

## 411 Theorie

Auslenkung von  
Gleichgewichtszustand:  $s(t)$

Federkraft  $F_D$





$$F_D = D \cdot s$$

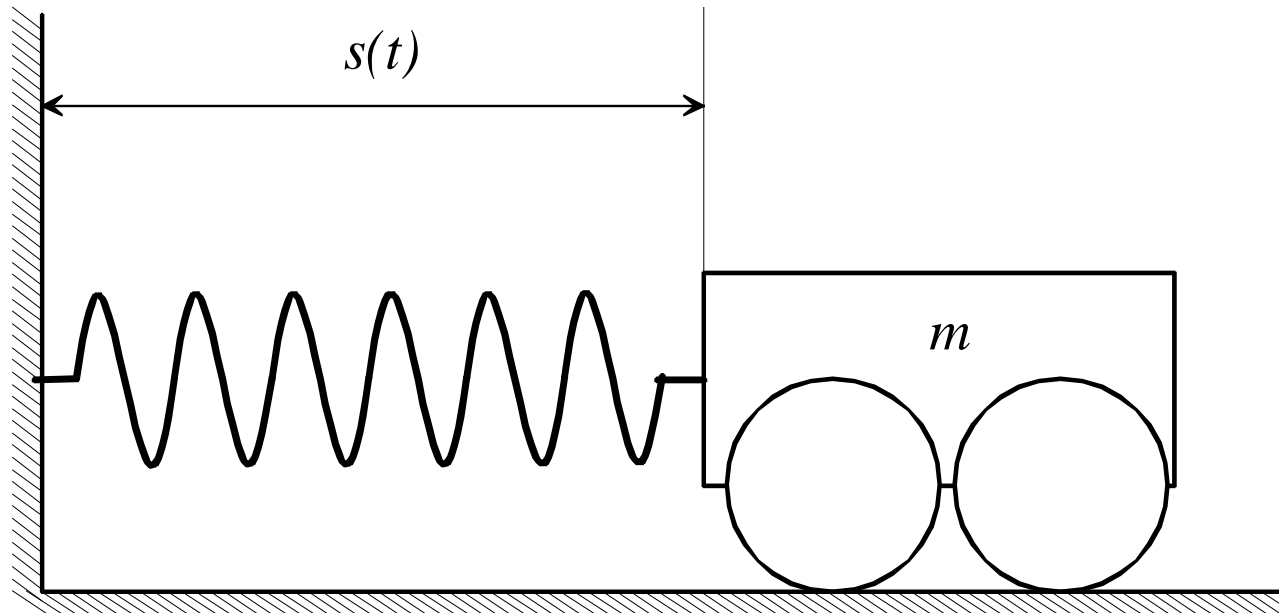
$$dW = F_D \cdot ds = D \cdot s \cdot ds$$

$$W = D \int s \cdot ds = \frac{1}{2} D s^2$$

## 411 Theorie

Auslenkung von  
Gleichgewichtszustand:  $s(t)$

Federkraft  $F_D$



$$F_D = D \cdot s$$

$$dW = F_D \cdot ds = D \cdot s \cdot ds$$

$$W = D \int s \cdot ds = \frac{1}{2} D s^2$$

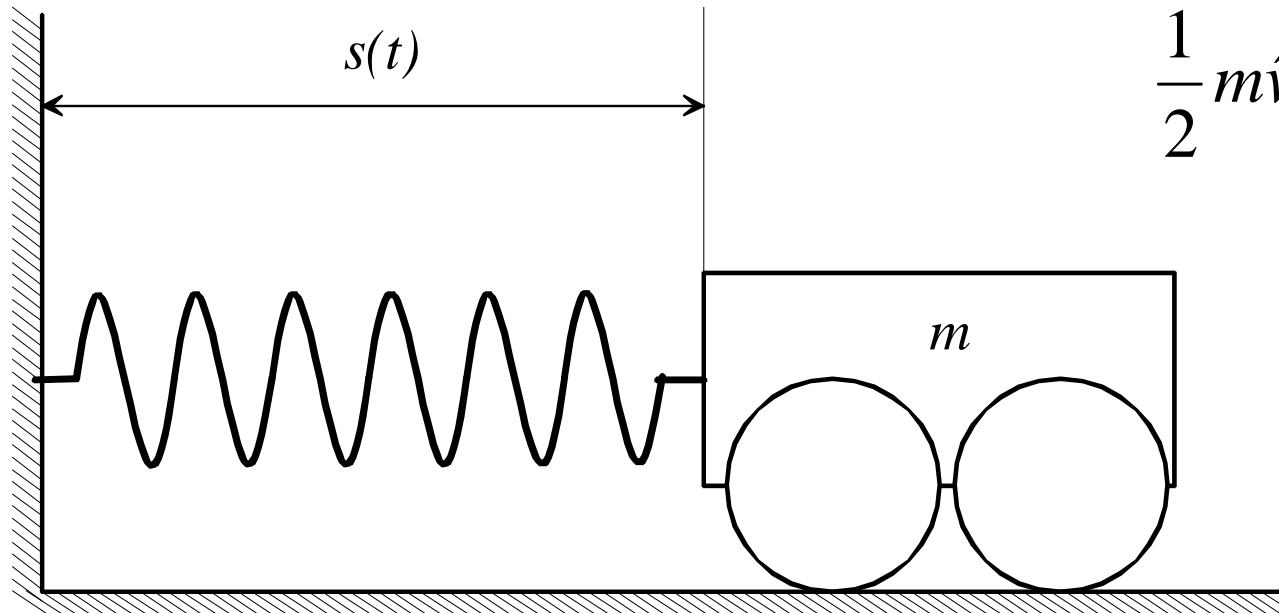
## 411 Theorie

Auslenkung von  
Gleichgewichtszustand:  $s(t)$

Federkraft  $F_D$

Energieerhaltung:

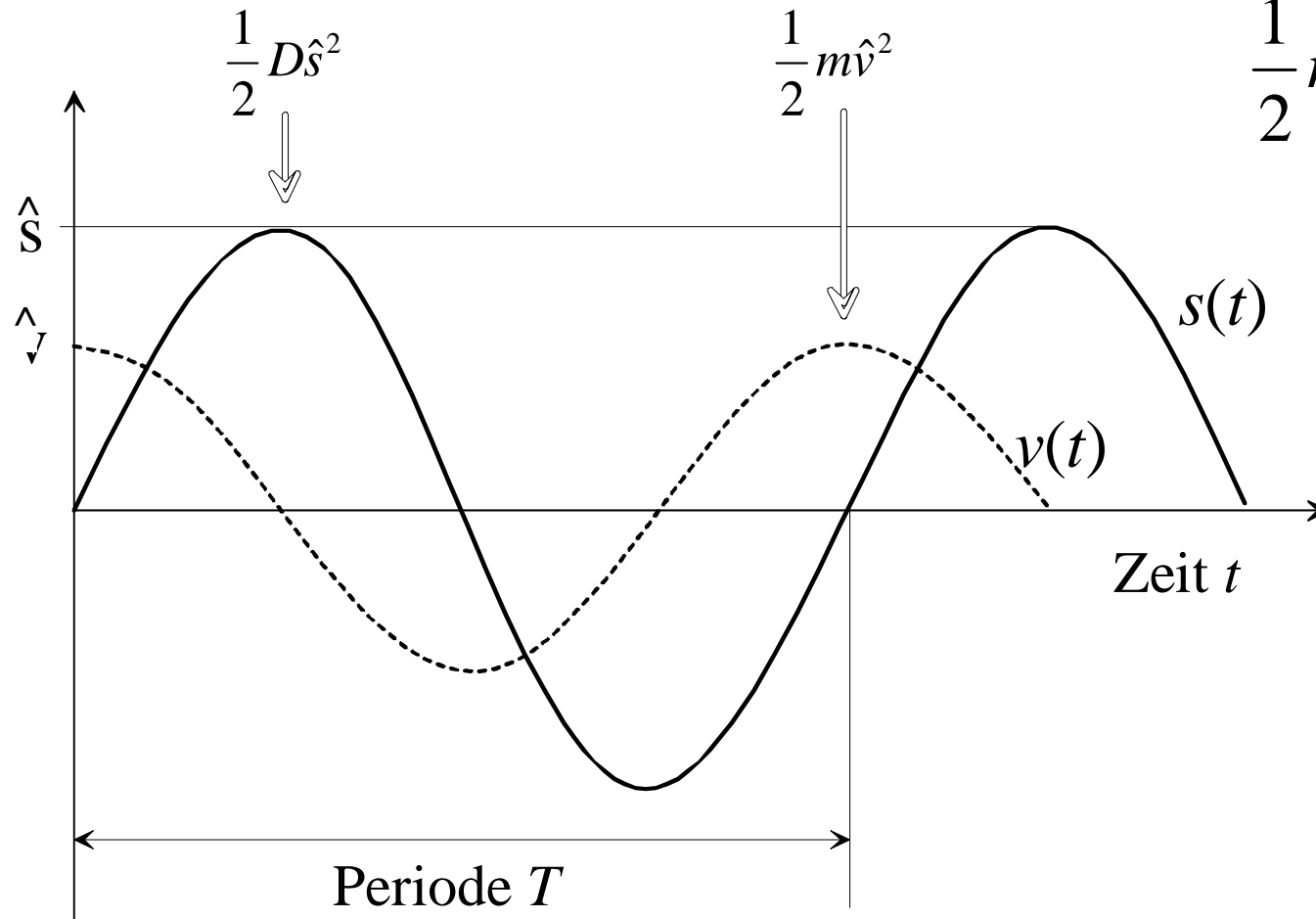
$$\frac{1}{2} m \hat{v}^2 = \frac{1}{2} D \hat{s}^2$$



# 411 Theorie

Energieerhaltung:

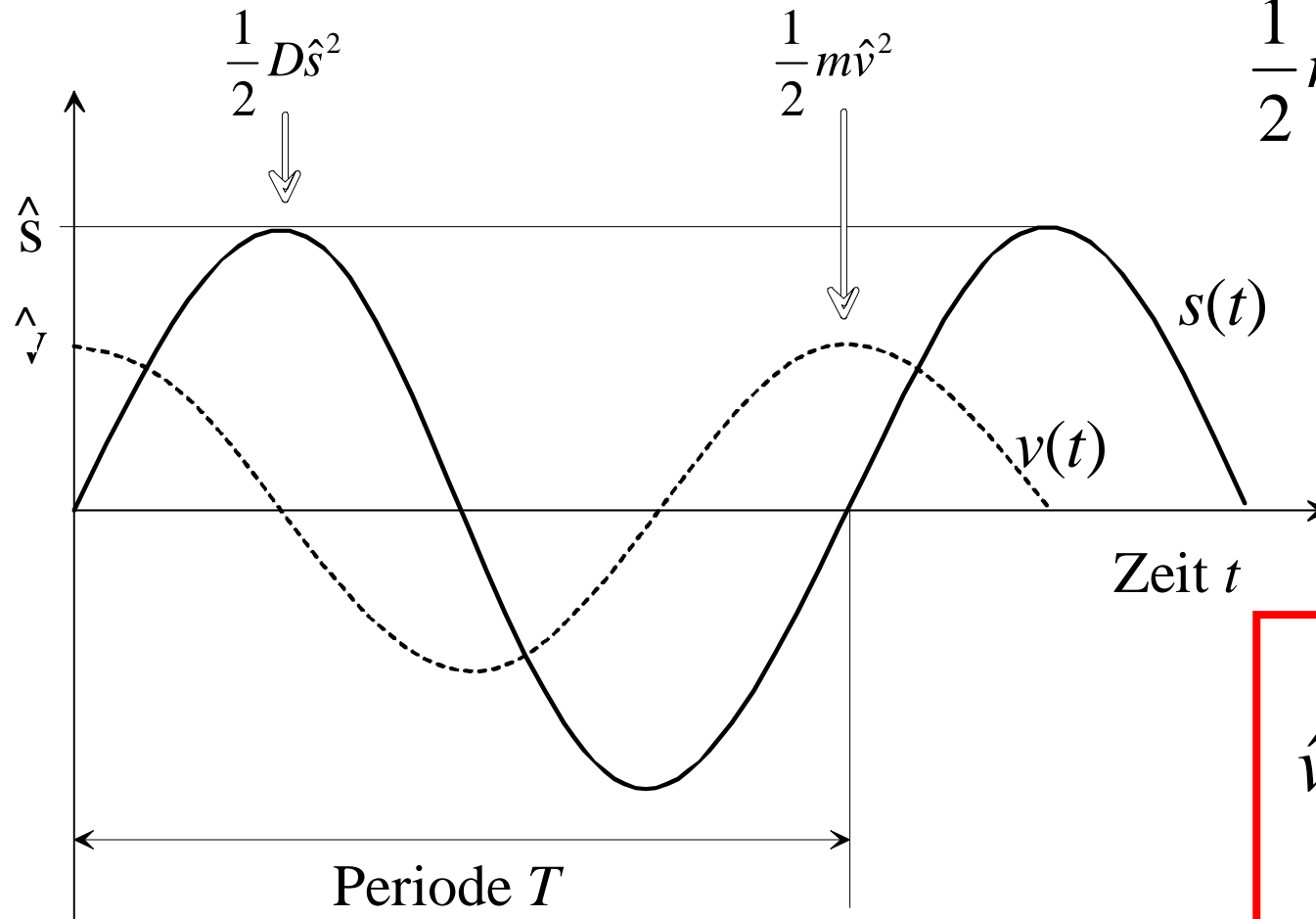
$$\frac{1}{2} m \hat{v}^2 = \frac{1}{2} D \hat{s}^2$$



# 411 Theorie

Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2} m \hat{v}^2 = \frac{1}{2} D \hat{s}^2$$



$$\hat{v} = \hat{s} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}$$

# **412 Kräftebetrachtung des ungedämpften Federpendels**



## 412 Ziele

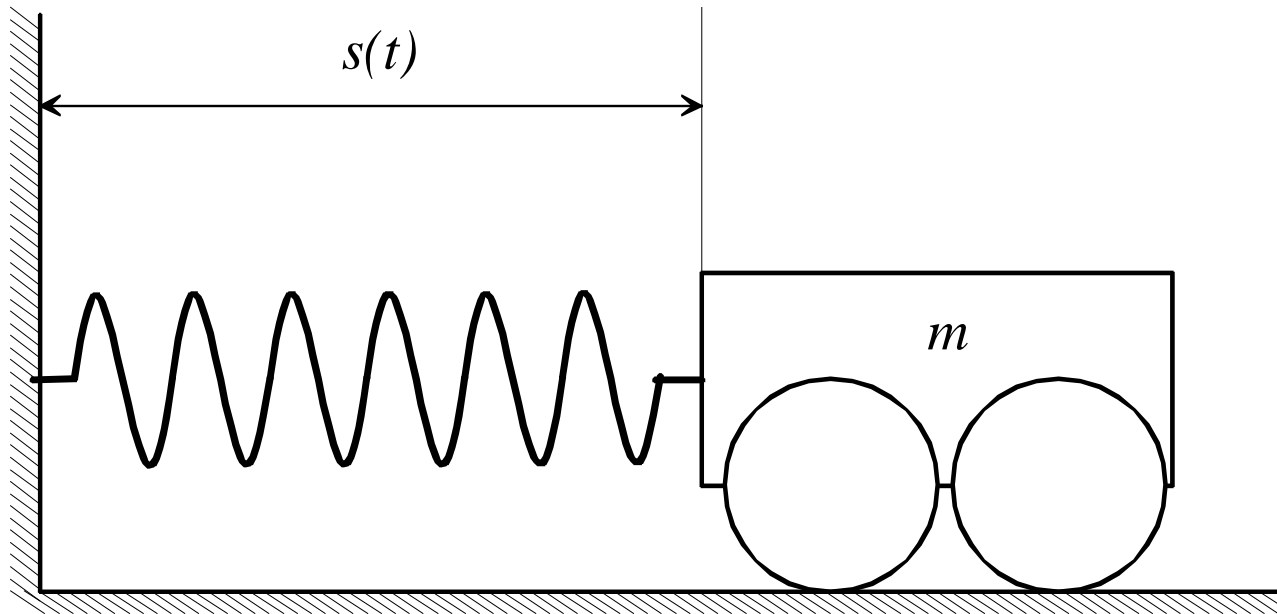
- Herleitung der Bewegungsgleichung via Kräftebetrachtung für Pendel verstehen
- ungedämpftes, harmonisches Pendel mit graphischem Modelleditor modellieren und simulieren können

$$F_D = -D \cdot s$$

## 412 Theorie

Auslenkung von  
Gleichgewichtszustand:  $s(t)$

Federkraft  $F_D$



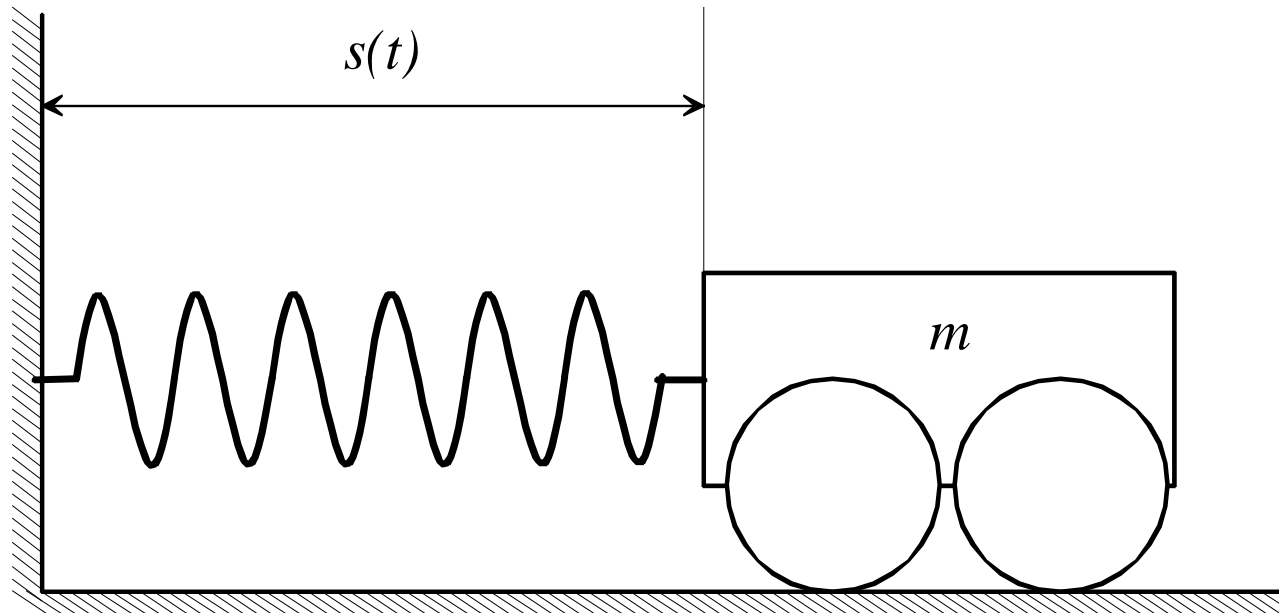
$$F_D = -D \cdot s$$

$$ma = F_D = -D \cdot s \rightarrow a = -\frac{D}{m} \cdot s$$

## 412 Theorie

Auslenkung von  
Gleichgewichtszustand:  $s(t)$

Federkraft  $F_D$





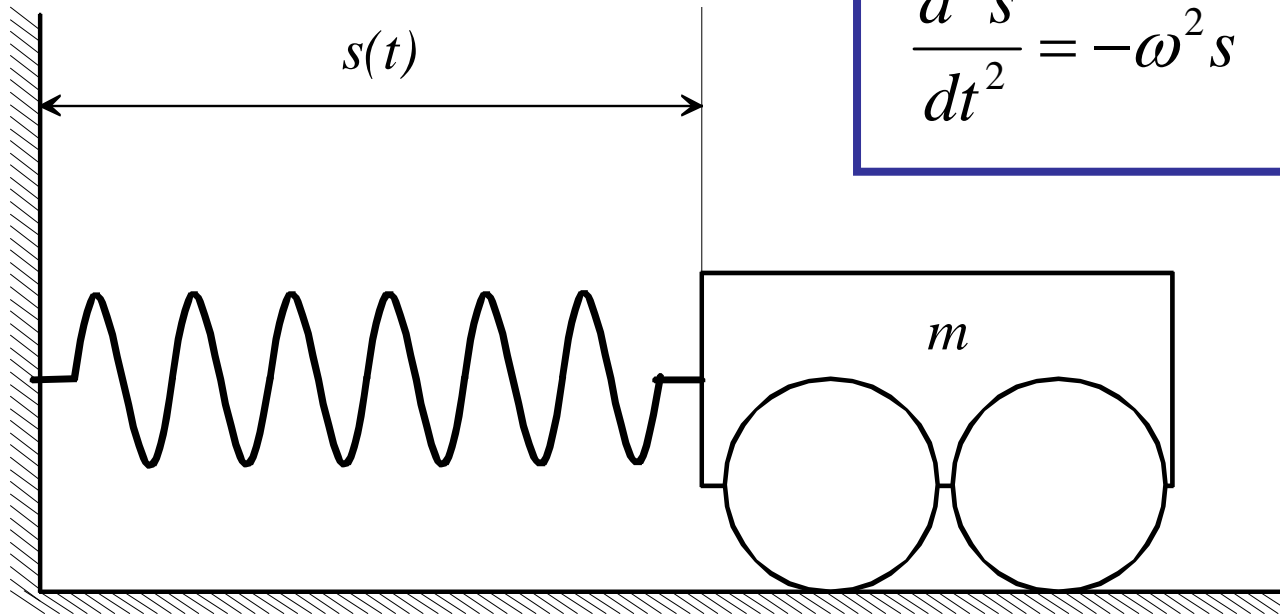
$$F_D = -D \cdot s$$

$$ma = F_D = -D \cdot s \rightarrow a = -\frac{D}{m} \cdot s$$

## 412 Theorie

Auslenkung von  
Gleichgewichtszustand:  $s(t)$

Federkraft  $F_D$



$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\omega^2 s \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

## 412 Theorie

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\omega^2 s$$

Analytische Lösung für die Bewegungsgleichung?

Ansatz:



$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\omega^2 s$$

## 412 Theorie

Analytische Lösung für die Bewegungsgleichung?

Ansatz:

$$s(t) = \hat{s} \cdot \sin(\omega t)$$

$$s(t) = \hat{s} \cdot \cos(\omega t)$$

## 412 Theorie

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\omega^2 s$$

$$\begin{aligned} v(t) &= \dot{s}(t) \\ &= \hat{s} \omega \cos(\omega t) \\ &= v \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Analytische Lösung für die Bewegungsgleichung?

Ansatz:

$$s(t) = \hat{s} \cdot \sin(\omega t)$$

$$s(t) = \hat{s} \cdot \cos(\omega t)$$

## 412 Theorie

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\omega^2 s$$

Analytische Lösung für die Bewegungsgleichung?

Ansatz:

$$\begin{aligned} v(t) &= \dot{s}(t) \\ &= \hat{s} \omega \cos(\omega t) \\ &= v \cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$s(t) = \hat{s} \cdot \sin(\omega t)$$

$$s(t) = \hat{s} \cdot \cos(\omega t)$$

$$\rightarrow \hat{v} = \hat{s} \omega = \sqrt{D / m} \cdot \hat{s}$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\omega^2 s$$

## 412 Theorie

Numerisches Lösen der  
Bewegungsgleichung (mit  
graphischem Modelleditor?)

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\omega^2 s$$

## 412 Theorie

Numerisches Lösen der Bewegungsgleichung (mit graphischem Modelleditor)

$$\frac{ds}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{D}{m} s$$

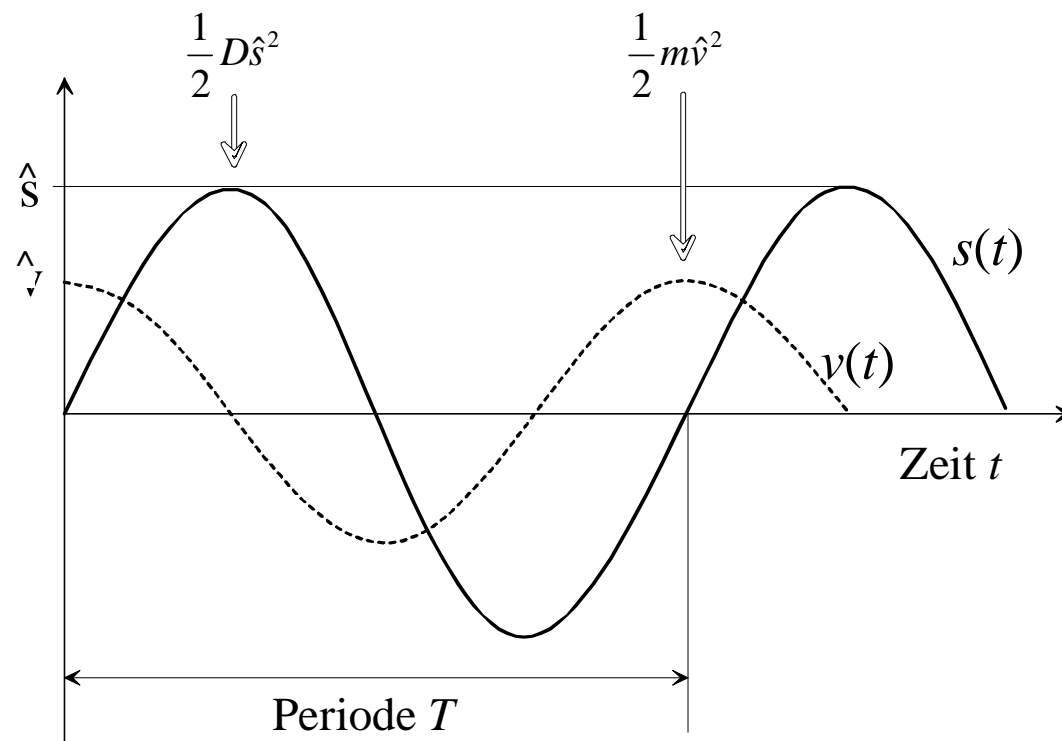
→ Kernidee: Zerlegung in 2 Gleichungen 2.Ordnung

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\omega^2 s$$

## 412 Theorie

Recap: Definitionen

Frequenz  $\nu$  und Periode  $T$



$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$$



**413** gedämpftes Federpendel



## 413 Ziele

- Prinzip der Modellierung (aus Abschnitt 412) auf gedämpfte Systeme erweitern können
- Begriffe Resonanz und lineare Dämpfung erklären können
- Mit Computersimulationen Systemeigenschaften / Verhalten charakterisieren können

## 413 Theorie

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\omega^2 s$$

+ Reibungskraft  $F_R$

## 413 Theorie

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\omega^2 s$$

+ Reibungskraft  $F_R$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\lambda \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

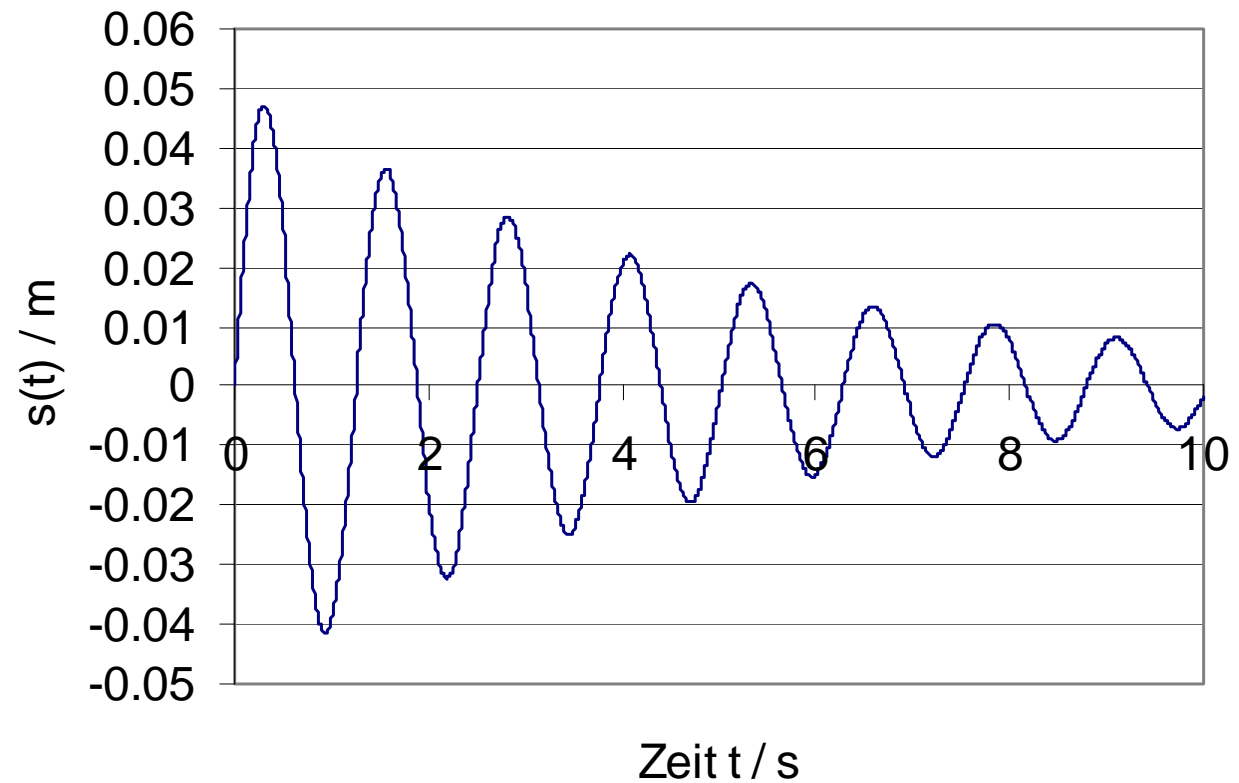
$$\omega_0^2 = \omega^2 + \lambda^2$$

## 413 Theorie

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\lambda \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

+ Reibungskraft  $F_R$

→ Lösung?

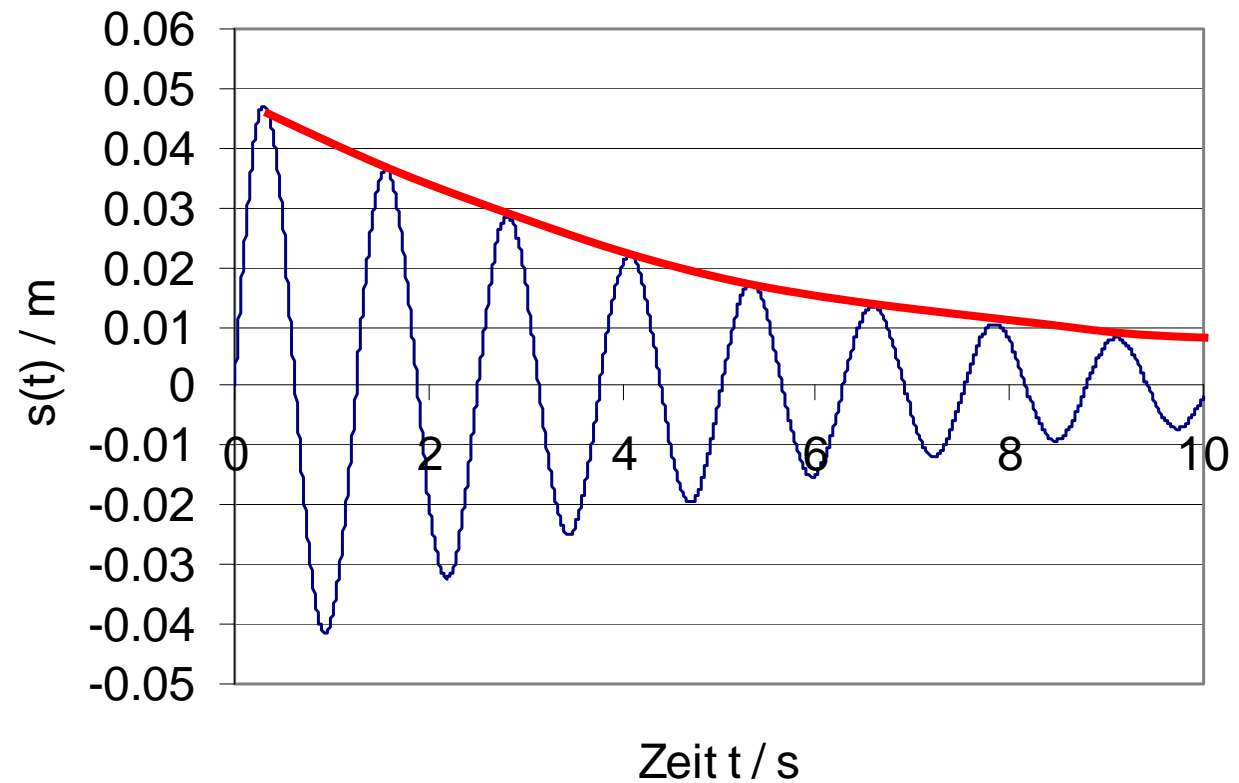


## 413 Theorie

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\lambda \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

+ Reibungskraft  $F_R$

→ Lösung: Ansatz



## 413 Theorie

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\lambda \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

+ Reibungskraft  $F_R$

→ Lösung: Ansatz

$$s(t) = \hat{s} e^{-\lambda t} \cdot \sin(\omega t)$$

## 413 Theorie

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\lambda \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

+ Reibungskraft  $F_R$

→ Lösung: Ansatz

$$s(t) = \hat{s} e^{-\lambda t} \cdot \sin(\omega t)$$

$$\frac{ds}{dt} = \hat{s} \left[ \omega e^{-\lambda t} \cdot \cos(\omega t) - \lambda e^{-\lambda t} \cdot \sin(\omega t) \right]$$



## 413 Theorie

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\lambda \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0 \quad + \text{Reibungskraft } F_R$$

→ Lösung: Ansatz

$$s(t) = \hat{s} e^{-\lambda t} \cdot \sin(\omega t)$$

$$\frac{ds}{dt} = \hat{s} \left[ \omega e^{-\lambda t} \cdot \cos(\omega t) - \lambda e^{-\lambda t} \cdot \sin(\omega t) \right]$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \hat{s} \left[ (\lambda^2 - \omega^2) e^{-\lambda t} \cdot \sin(\omega t) - 2\lambda \omega e^{-\lambda t} \cdot \cos(\omega t) \right]$$

## 413 Theorie

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\lambda \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0 \quad \text{Ansatz einsetzen}$$

$$\begin{aligned} & \hat{s} \left[ (\lambda^2 - \omega^2) e^{-\lambda t} \cdot \sin(\omega t) - 2\lambda \omega e^{-\lambda t} \cdot \cos(\omega t) \right] \\ & + 2\lambda \hat{s} \left[ \omega e^{-\lambda t} \cdot \cos(\omega t) - \lambda e^{-\lambda t} \cdot \sin(\omega t) \right] + \\ & + \omega_0^2 \hat{s} \left[ e^{-\lambda t} \cdot \sin(\omega t) \right] = 0 \end{aligned}$$

## 413 Theorie

Ansatz einsetzen

$$\begin{aligned} & \hat{s} \left[ (\lambda^2 - \omega^2) e^{-\lambda t} \cdot \sin(\omega t) - 2\lambda\omega e^{-\lambda t} \cdot \cos(\omega t) \right] \\ & + 2\lambda \hat{s} \left[ \omega e^{-\lambda t} \cdot \cos(\omega t) - \lambda e^{-\lambda t} \cdot \sin(\omega t) \right] + \\ & + \omega_0^2 \hat{s} \left[ e^{-\lambda t} \cdot \sin(\omega t) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\lambda^2 - \omega^2) \sin(\omega t) - 2\lambda\omega \cos(\omega t) + 2\lambda\omega \cos(\omega t) \\ & - 2\lambda^2 \sin(\omega t) + \omega_0^2 \sin(\omega t) = 0 \end{aligned}$$

## 413 Theorie

Ansatz einsetzen

$$\begin{aligned} & (\lambda^2 - \omega^2) \sin(\omega t) - 2\lambda\omega \cos(\omega t) + 2\lambda\omega \cos(\omega t) \\ & - 2\lambda^2 \sin(\omega t) + \omega_0^2 \sin(\omega t) = 0 \end{aligned}$$

$$(\lambda^2 - \omega^2) \sin(\omega t) - 2\lambda^2 \sin(\omega t) + (\omega^2 + \lambda^2) \sin(\omega t) = 0$$

## 413 Theorie

Ansatz einsetzen

$$\begin{aligned} & (\lambda^2 - \omega^2) \sin(\omega t) - 2\lambda\omega \cos(\omega t) + 2\lambda\omega \cos(\omega t) \\ & - 2\lambda^2 \sin(\omega t) + \omega_0^2 \sin(\omega t) = 0 \end{aligned}$$

$$(\lambda^2 - \omega^2) \sin(\omega t) - 2\lambda^2 \sin(\omega t) + (\omega^2 + \lambda^2) \sin(\omega t) = 0$$

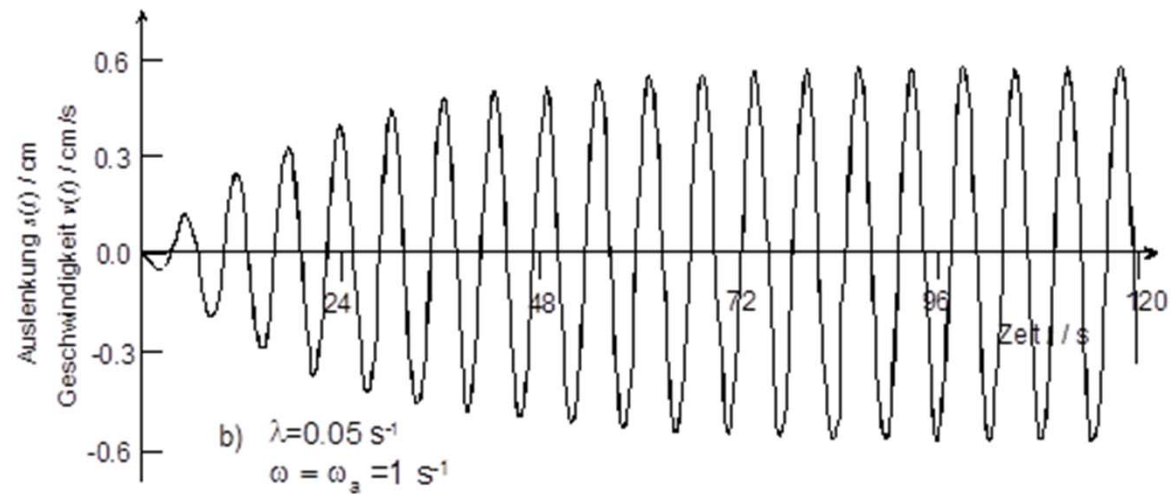
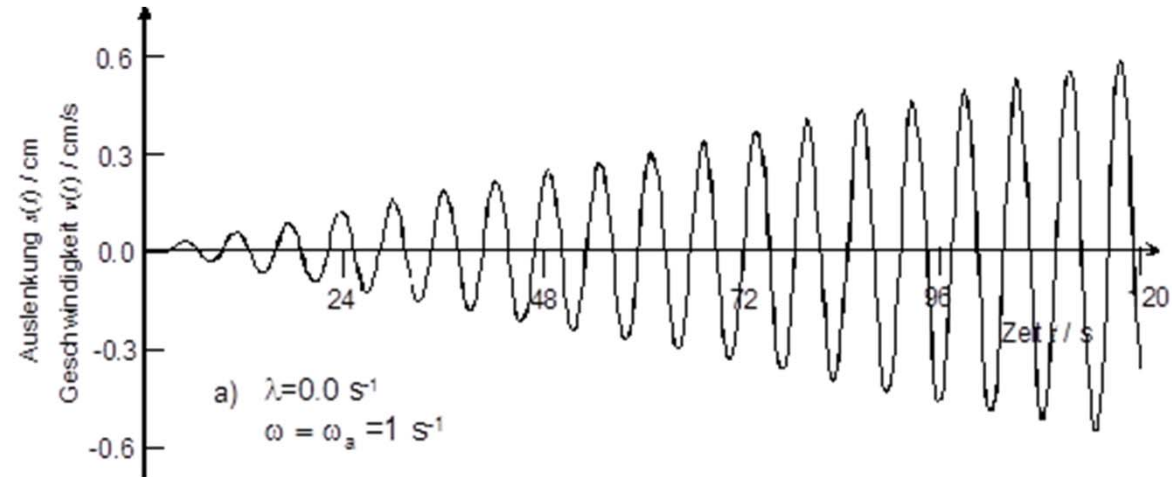
$$\rightarrow 2\lambda^2 \sin(\omega t) - \omega^2 \sin(\omega t) - 2\lambda^2 \sin(\omega t) + \omega^2 \sin(\omega t) = 0$$

## 413 Theorie

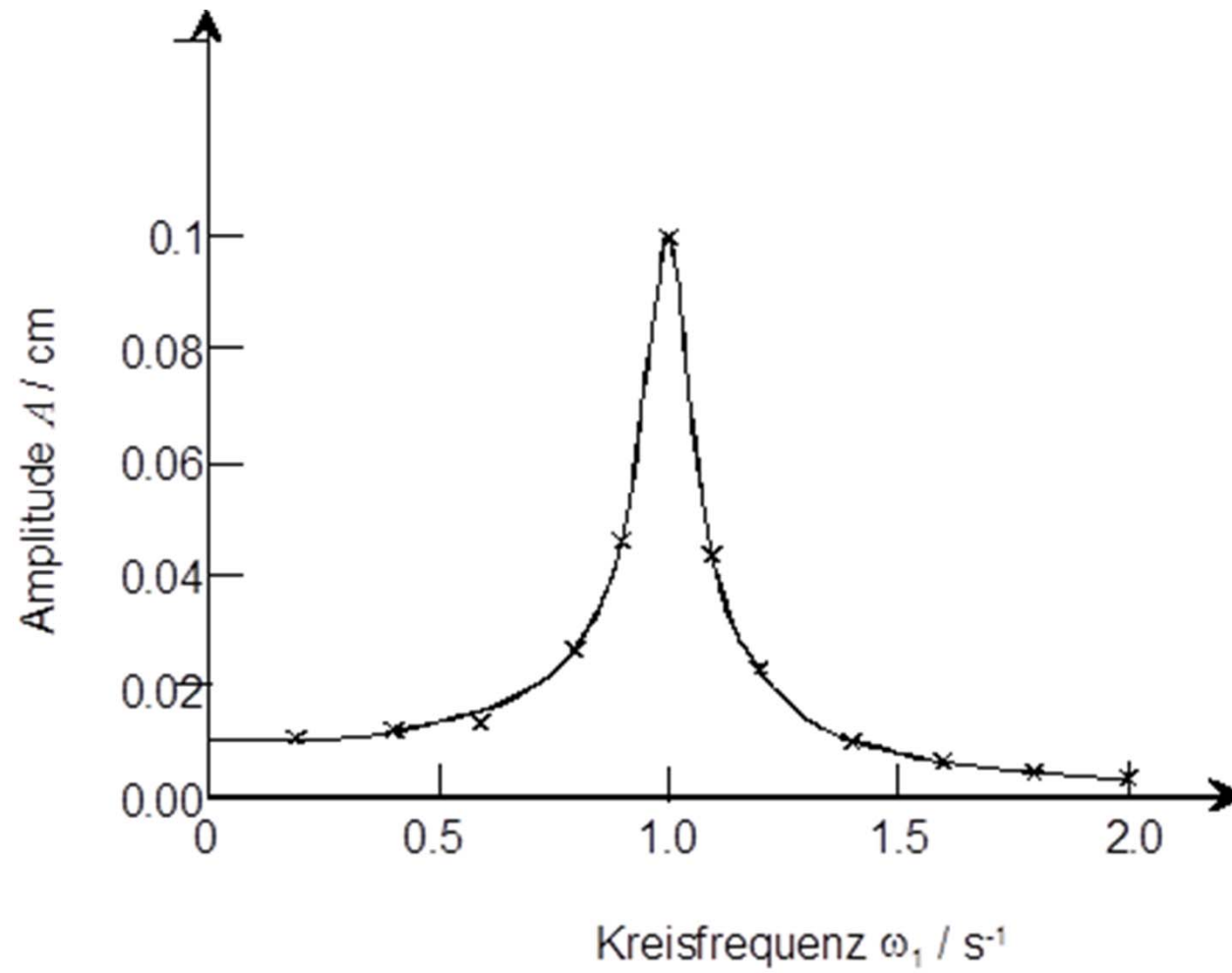
Schlussbemerkung:  
Modellierung für Dämpfung  
und Anregung

$$ma = m \cdot \frac{d^s s}{dt} = -F_D - F_R + F_A$$

# 413 Theorie



# 413 Theorie





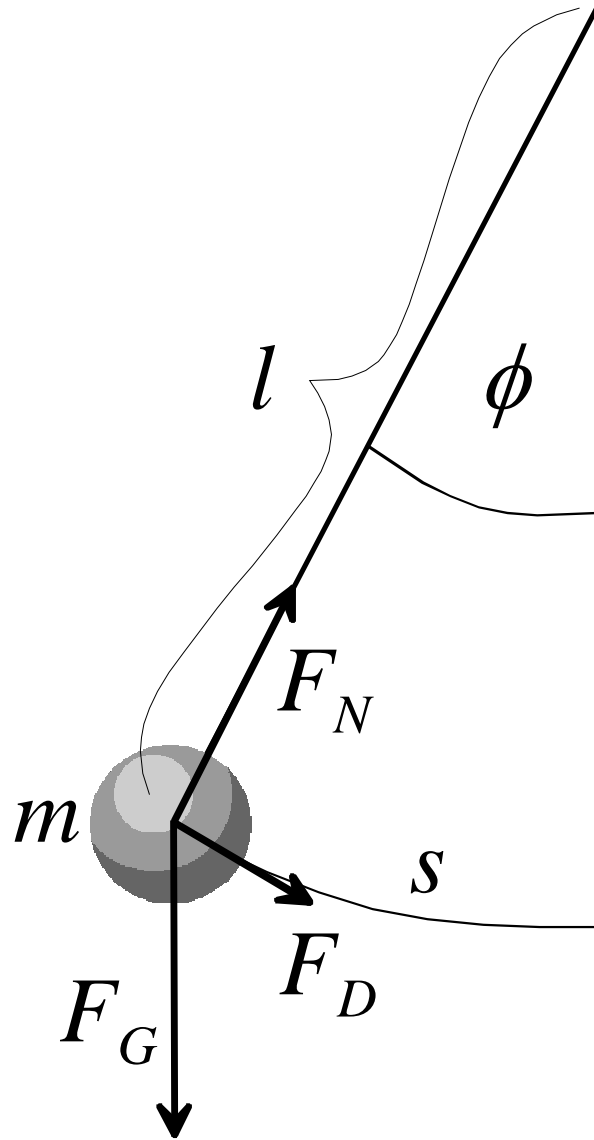
**414** mathematisches Pendel



## 414 Ziele

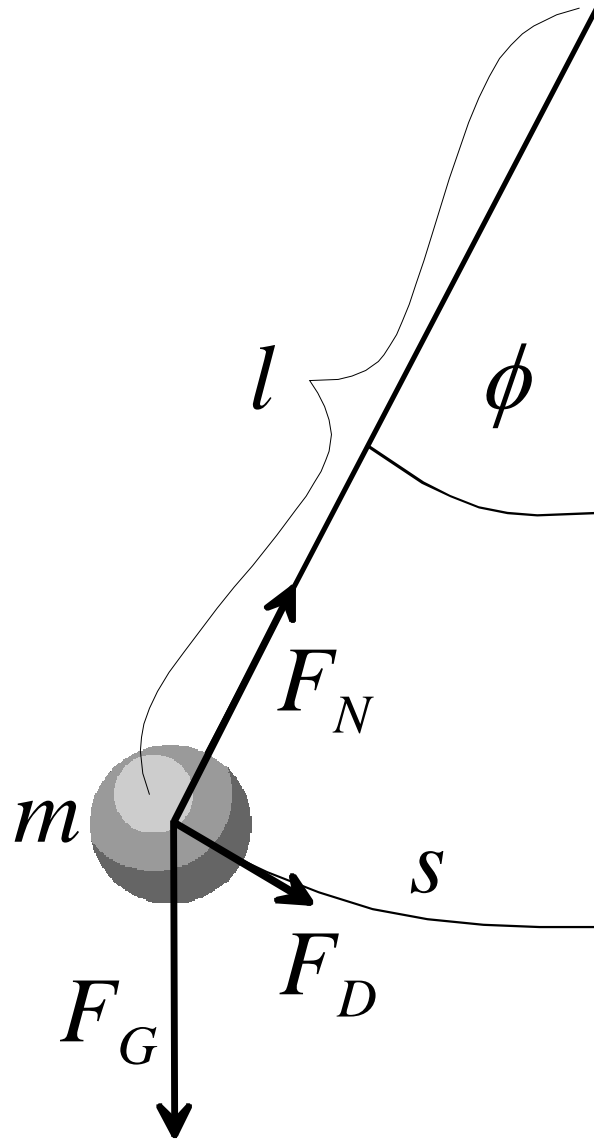
- harmonische und nicht-harmonische Schwingungen unterscheiden können
- Methodik der Modellierung auf math. Pendel erweitern können

## 414 Theorie



$$ma = -F_{Rück} = -mg \cdot \sin \phi$$

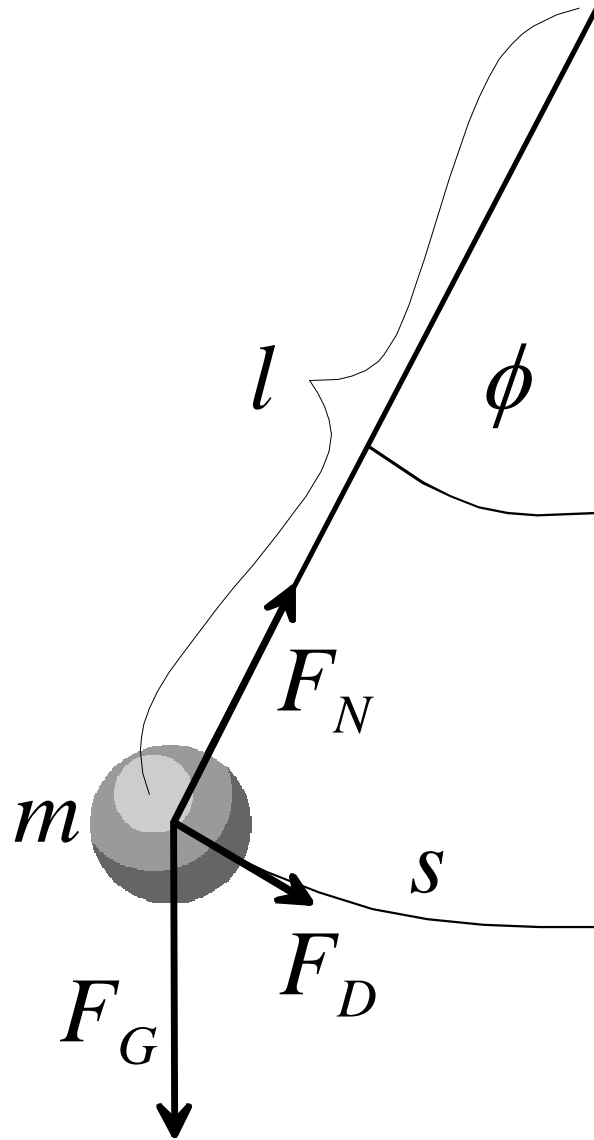
## 414 Theorie



$$ma = -F_{\text{Rück}} = -mg \cdot \sin \phi$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \cdot \sin \left( \frac{s}{l} \right)$$

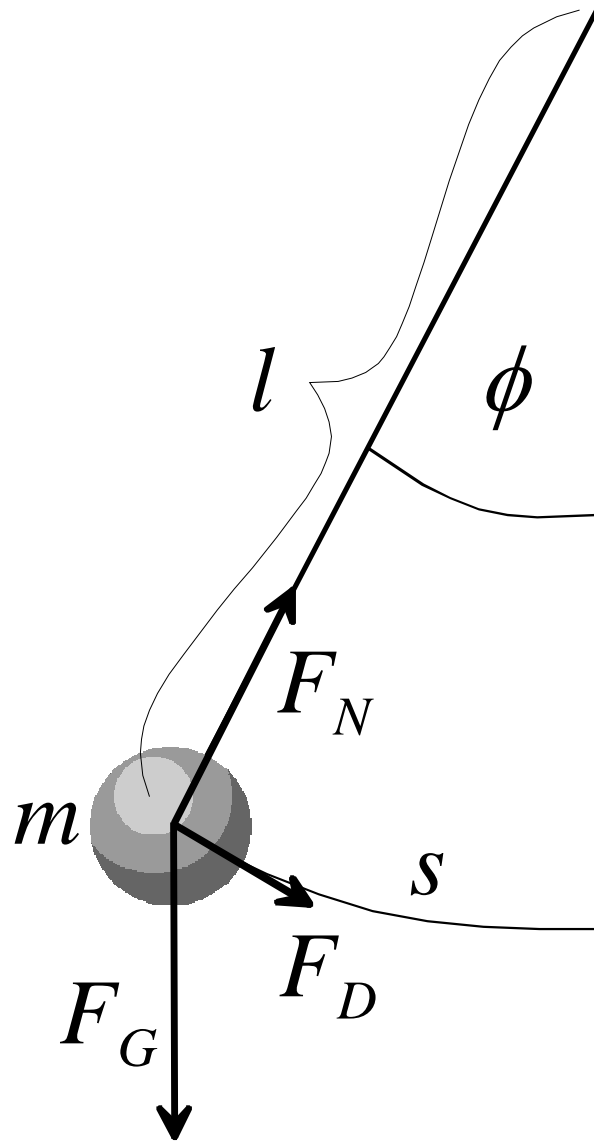
## 414 Theorie



$$ma = -F_{\text{Rück}} = -mg \cdot \sin \phi$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \cdot \sin \left( \frac{s}{l} \right)$$

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \sin \phi$$

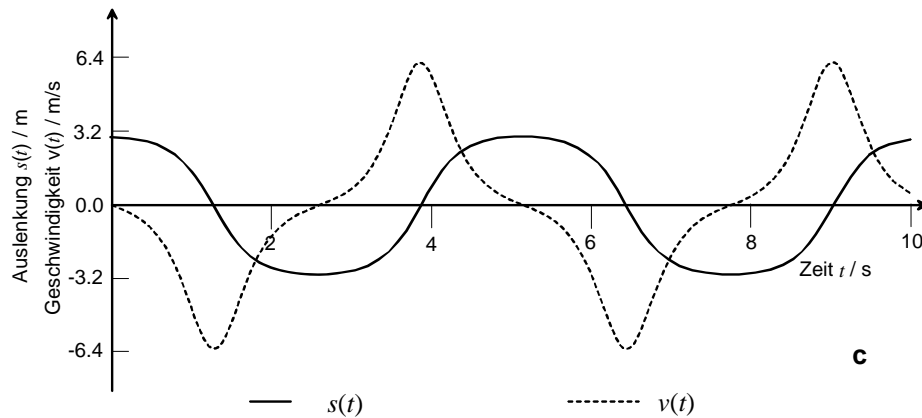
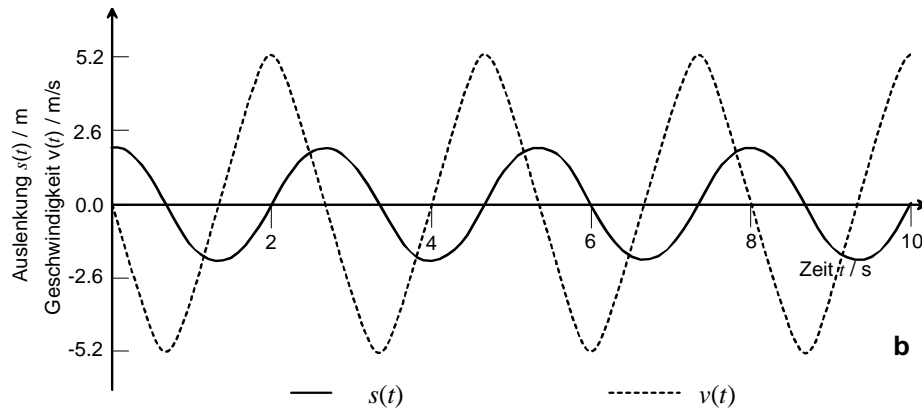
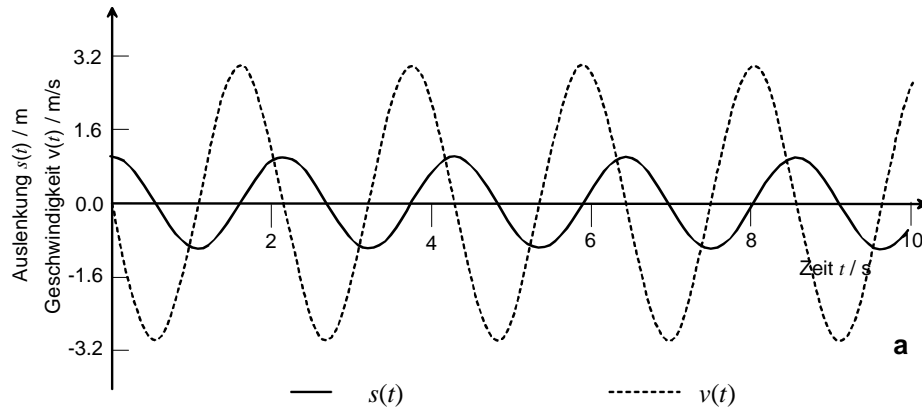


## 414 Theorie

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \sin \phi$$

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \phi}{\phi} \right) = 1$$

$$\rightarrow \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \phi$$



## 414 Aufgaben

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \sin \phi$$

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \phi}{\phi} \right) = 1$$

$$\rightarrow \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \phi$$

# 421 Phasendiagramme

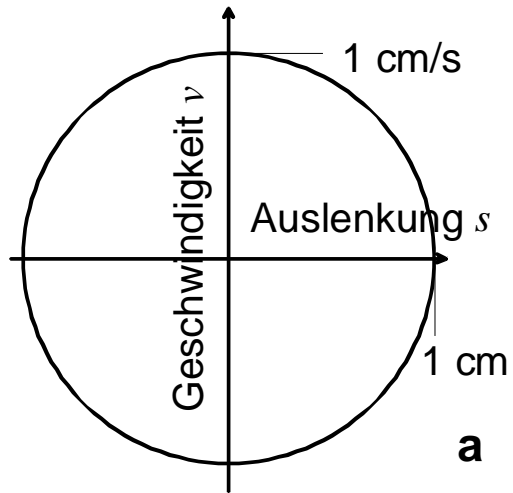




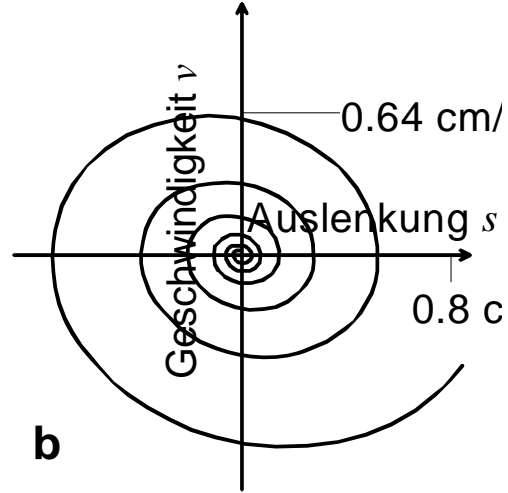
## 421 Ziele

- Phasendiagramm als weitere Darstellungsform interpretieren können
- Aus Phasendiagramm Systemverhalten herauslesen können
- Aus Eigenwerten Form des Phasendiagramms bestimmen können

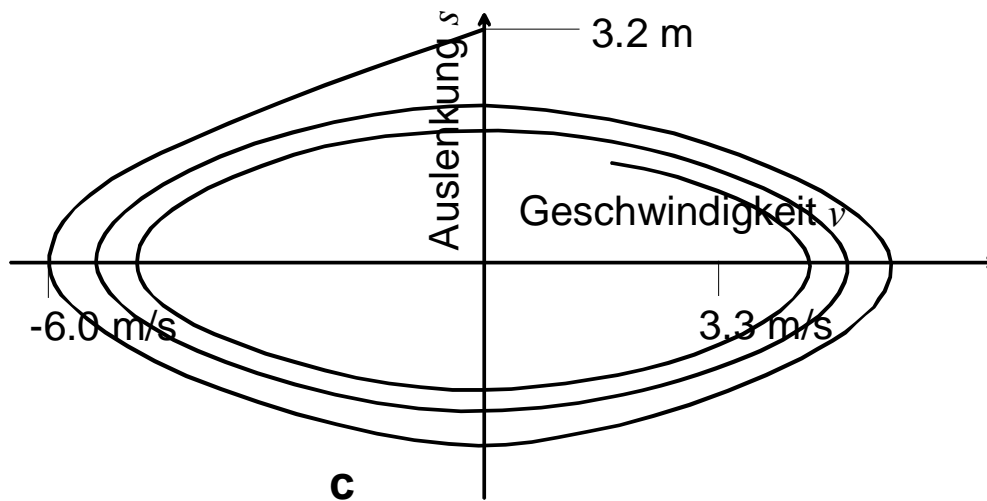
# 421 Theorie



**a**



**b**



**c**

## 421 Theorie

Wie kann ein lineares DGL-System analytisch gelöst werden?

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y$$

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y$$

## 421 Theorie

Wie kann ein lineares DGL-System analytisch gelöst werden?

$$\frac{du_1}{dt} = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3$$

$$\frac{du_2}{dt} = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3$$

$$\frac{du_3}{dt} = a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3$$

# 421 Theorie

analytisches  
Lösungsverfahren

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \dot{u}_i = a_{ik} u_k$$

$$\dot{u}_i = a_{ik} u_k$$

## 421 Theorie

analytisches  
Lösungsverfahren  
( $n \times n$ -System)

$$\dot{u}_i = a_{ik} u_k$$

$$\det(a_{ik} - \lambda \delta_{ik}) = 0$$

## 421 Theorie

analytisches  
Lösungsverfahren  
( $n \times n$ -System)

Eigenwerte  $\lambda_n$

$$\dot{u}_i = a_{ik} u_k$$

$$\det(a_{ik} - \lambda \delta_{ik}) = 0$$

$$(a_{ik} - \lambda_n \delta_{ik}) \bar{x}_n = 0$$

## 421 Theorie

analytisches  
Lösungsverfahren  
( $n \times n$ -System)

Eigenwerte  $\lambda_n$

Eigenvektor  $\mathbf{x}_n$



## 421 Theorie

$$\dot{u}_i = a_{ik} u_k$$

$$\det(a_{ik} - \lambda \delta_{ik}) = 0$$

$$(a_{ik} - \lambda_n \delta_{ik}) \bar{x}_n = 0$$

analytisches  
Lösungsverfahren  
( $n \times n$ -System)

zeitunabh. Eigenwerte  $\lambda_n$

zeitunabh. Eigenvektor  $\mathbf{x}_n$

Ansatz:

$$u_i(t) = \alpha_n(t) \cdot \bar{x}_n = \alpha_1(t) \cdot \bar{x}_1 + \alpha_2(t) \cdot \bar{x}_2 + \alpha_3(t) \cdot \bar{x}_3$$

## 421 Theorie

$$\dot{u}_i = a_{ik} u_k$$

Ansatz einsetzen in DGL:

$$u_i(t) = \alpha_n(t) \cdot \vec{x}_n = \alpha_1(t) \cdot \vec{x}_1 + \alpha_2(t) \cdot \vec{x}_2 + \alpha_3(t) \cdot \vec{x}_3$$

$$\frac{du_i}{dt} = \vec{x}_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \vec{x}_2 \frac{d\alpha_2}{dt} + \vec{x}_3 \frac{d\alpha_3}{dt}$$

## 421 Theorie

$$\frac{du_i}{dt} = \bar{x}_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \bar{x}_2 \frac{d\alpha_2}{dt} + \bar{x}_3 \frac{d\alpha_3}{dt}$$

Da nun die Eigenvektoren die Bedingung  $(a_{ik} - \lambda_n \delta_{ik}) \bar{x}_n = 0$  erfüllen, gilt:  $a_{ik} x_k = \lambda x_i$ . Mit Einsetzen des Ansatzes ergibt sich (unter Verwendung von

$$\dot{u}_i = a_{ik} u_k = a_{ik} \left( \sum_n \alpha_n \bar{x}_n \right) = \sum_n \alpha_n a_{ik} \bar{x}_n = \sum_n \alpha_n \lambda_n \bar{x}_n :$$

|

$$\left( \frac{d\alpha_1}{dt} - \lambda_1 \alpha_1 \right) \bar{x}_1 + \left( \frac{d\alpha_2}{dt} - \lambda_2 \alpha_2 \right) \bar{x}_2 + \left( \frac{d\alpha_3}{dt} - \lambda_3 \alpha_3 \right) \bar{x}_3 = 0$$

(Eq.22)

## 421 Theorie

Das Problem reduziert sich also auf das Lösen von:

$$\left( \frac{d\alpha_i}{dt} - \lambda_i \alpha_i \right) \vec{x}_i = 0$$

## 421 Theorie

Das Problem reduziert sich also auf das Lösen von:

$$\left( \frac{d\alpha_i}{dt} - \lambda_i \alpha_i \right) \vec{x}_i = 0$$

$$\rightarrow \dot{\alpha}_i - \lambda_i \alpha_i = 0$$

## 421 Theorie

Das Problem reduziert sich also auf das Lösen von:

$$\left( \frac{d\alpha_i}{dt} - \lambda_i \alpha_i \right) \vec{x}_i = 0$$

$$\rightarrow \dot{\alpha}_i - \lambda_i \alpha_i = 0$$

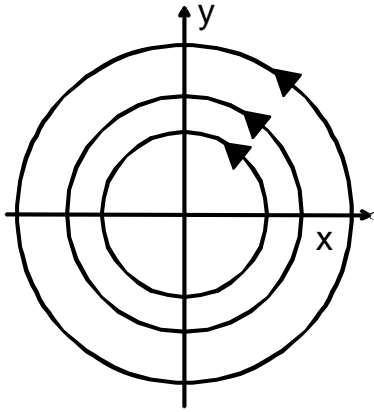
$$\rightarrow \alpha_i(t) = \alpha_0 e^{\lambda_i t}$$

## 421 Theorie

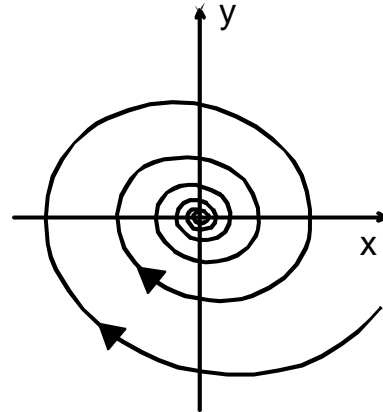
Die Lösung ist somit durch die Eigenwerte bestimmt:

$$u_i(t) =$$

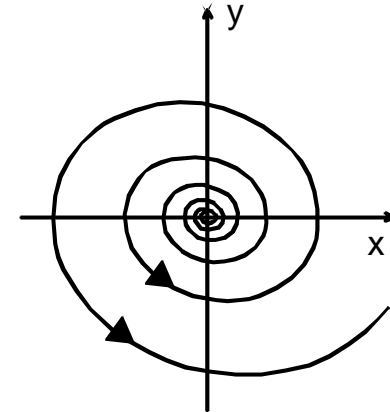
$$\vec{x}_1 \cdot \alpha_1(0) \cdot e^{\lambda_1 t} + \vec{x}_2 \cdot \alpha_2(0) \cdot e^{\lambda_2 t} + \vec{x}_3 \cdot \alpha_3(0) \cdot e^{\lambda_3 t}$$



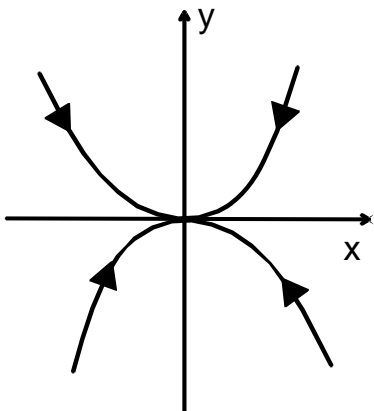
Zentrum,  
 $\xi_1$  und  $\xi_2$  rein imaginär



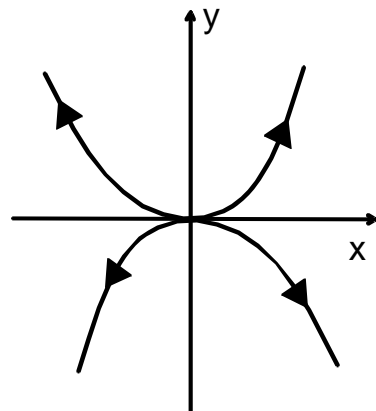
Zentrum,  
 $\xi_1$  und  $\xi_2$  rein imaginär,  
mit negativem Realteil



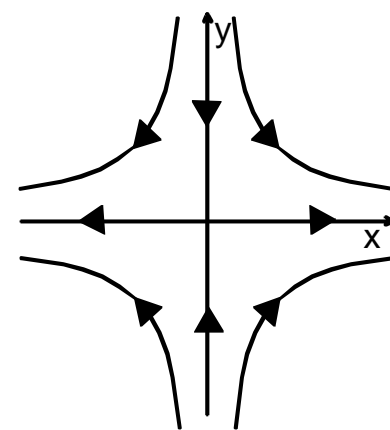
Zentrum,  
 $\xi_1$  und  $\xi_2$  rein imaginär,  
mit positivem Realteil



stabiler Knoten,  
 $\xi_1$  und  $\xi_2$  reell, negativ



instabiler Knoten,  
 $\xi_1$  und  $\xi_2$  reell, positiv



Sattelpunkt,  
 $\xi_1$  und  $\xi_2$  reell,  
 $\xi_1 \xi_2 < 0$



# **422** Untersuchung eines Systems mit gekoppelten Pendeln



## 422 Ziele

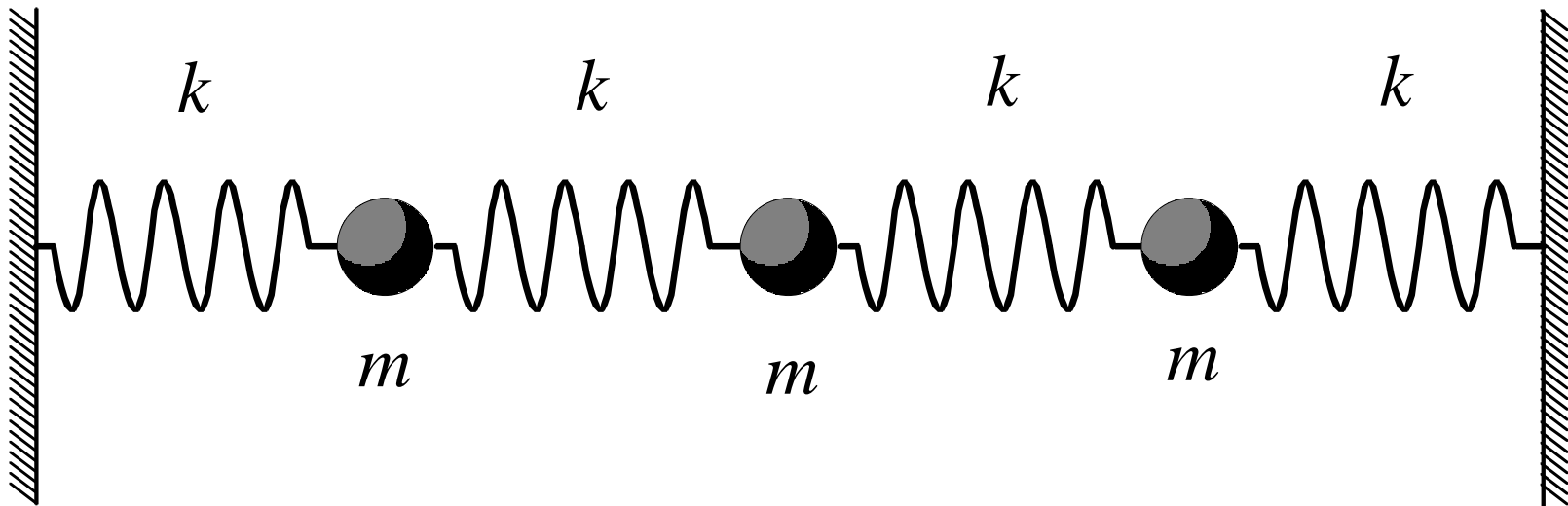
- Eigenwertverfahren auf gekoppelte Pendelsysteme anwenden können
- gekoppelte Pendelsysteme modellieren und mit Computer simulieren können

## 422 Theorie

$$ma = -F_1 + F_{21}$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

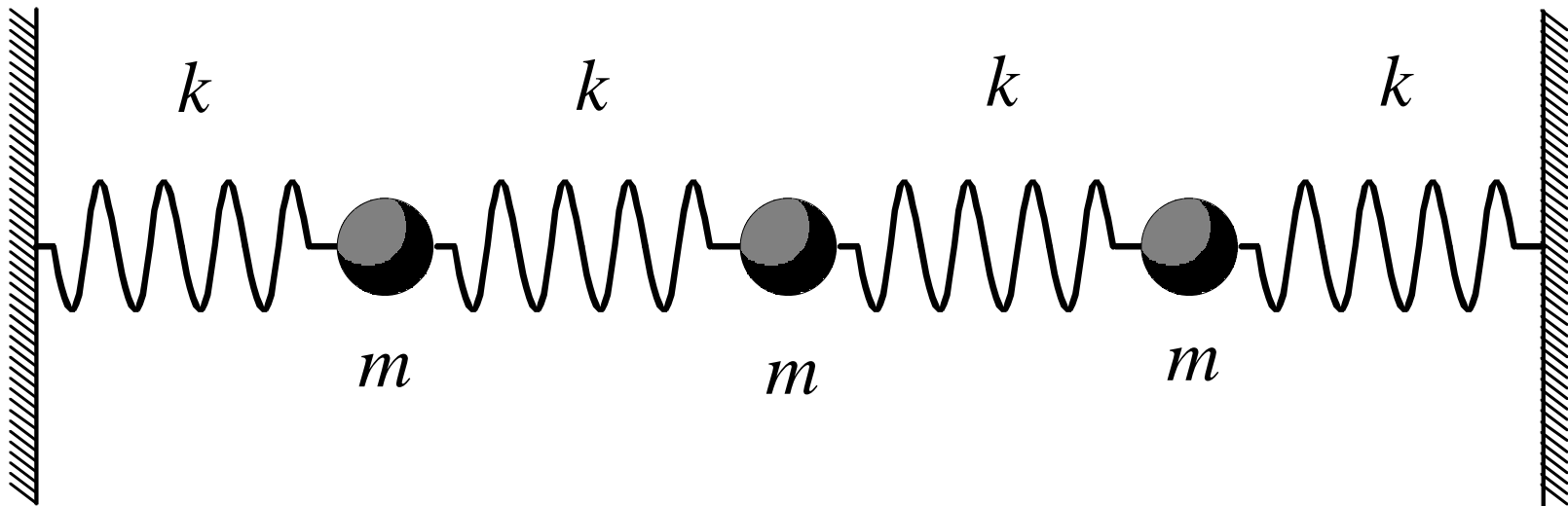
$$\ddot{s}_1 = -\omega_0^2 s_1 + \omega_0^2 \cdot (s_2 - s_1)$$



## 422 Theorie

$$\ddot{s}_1 = -2\omega_0^2 s_1 + \omega_0^2 s_2$$

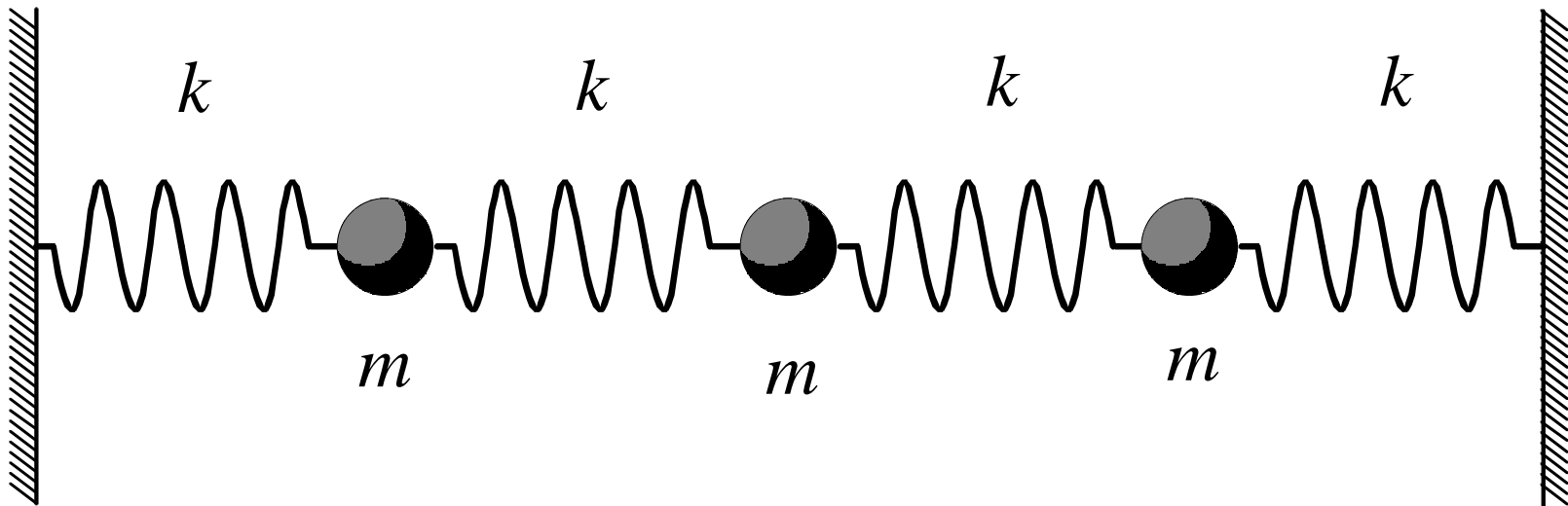
$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$



## 422 Theorie

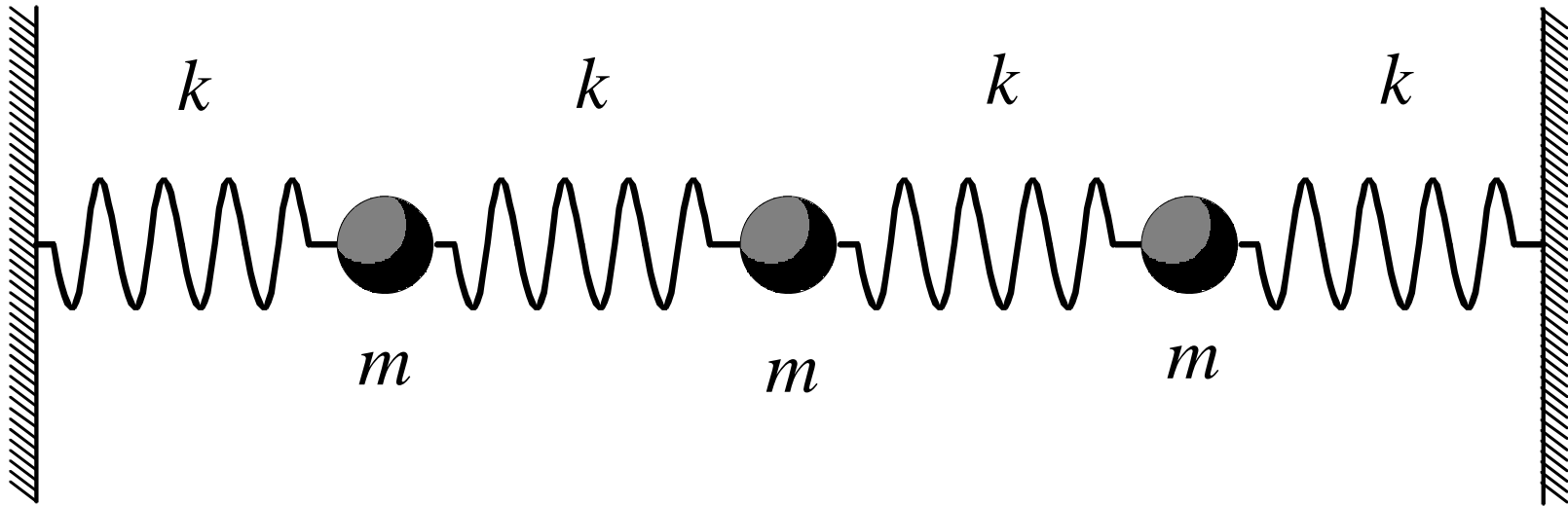
$$\ddot{s}_1 = -2\omega_0^2 s_1 + \omega_0^2 s_2$$

$$\ddot{s}_2 = \omega_0^2 s_1 - 2\omega_0^2 s_2 + \omega_0^2 s_3$$



## 422 Theorie

$$\frac{d^2 s_i}{dt^2} = \omega_0^2 \cdot a_{ik} s_k \quad a_{ik} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$



## 422 Theorie

$$a_{ik} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{Eq.35})$$

Die Eigenwerte von  $a_{ik}$  sind gegeben durch  $\det(a_{ik} - \lambda \delta_{ik}) = 0$ . In diesem Fall betragen sie:  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -2 + \sqrt{2}$  und  $\lambda_3 = -2 - \sqrt{2}$ . Die Berechnung der Eigenvektoren mittels der Bedingung  $(a_{ik} - \lambda_n \delta_{ik}) \bar{x}_n = 0$  führt zu:

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ x_0 \end{pmatrix} \quad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \sqrt{2} \cdot x_0 \\ x_0 \end{pmatrix} \quad \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} x_0 \\ -\sqrt{2} \cdot x_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

# 422 Theorie

## Schwingungs-Modi:

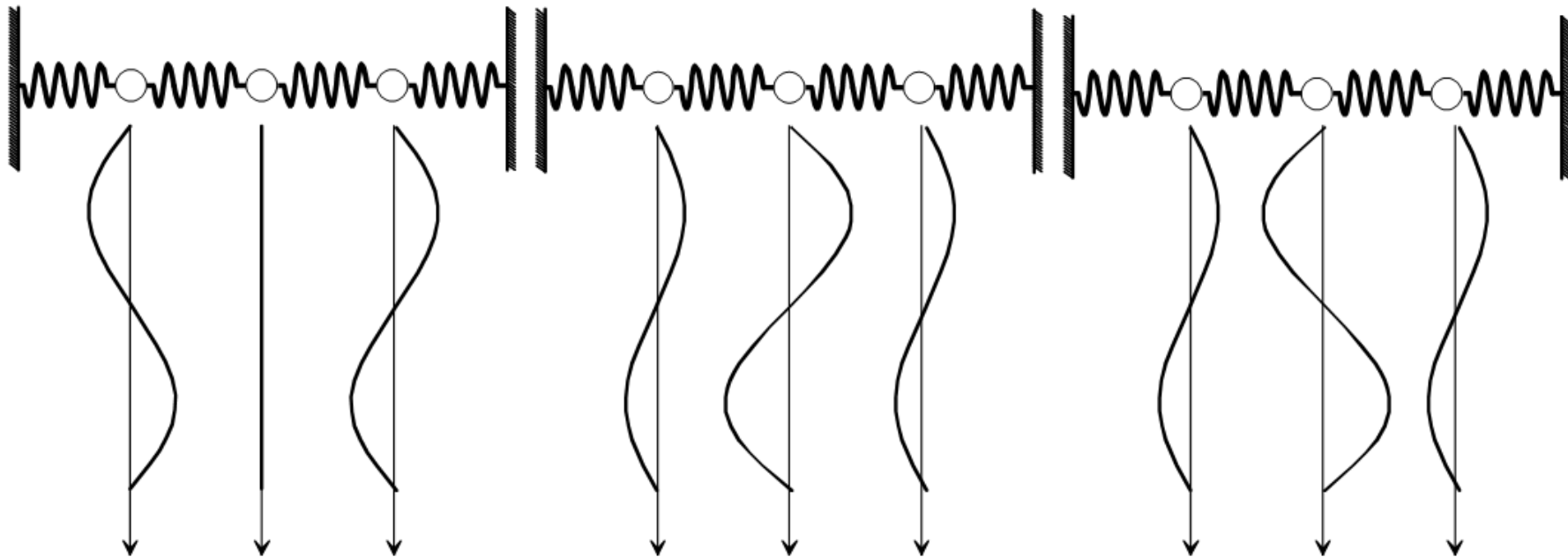
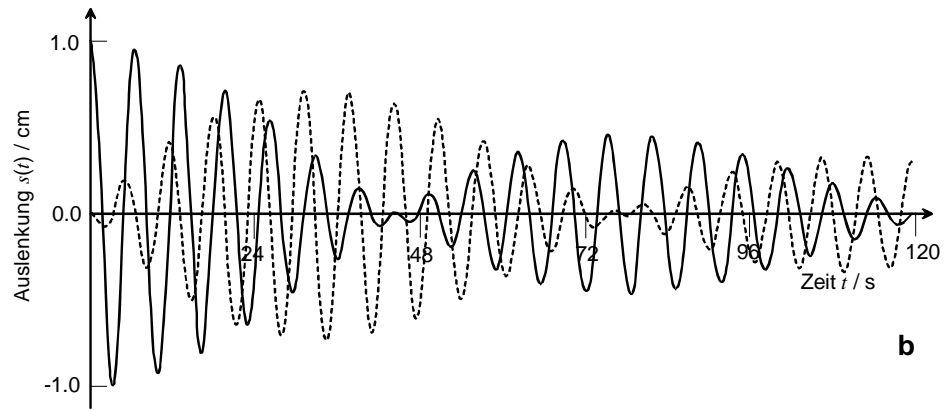
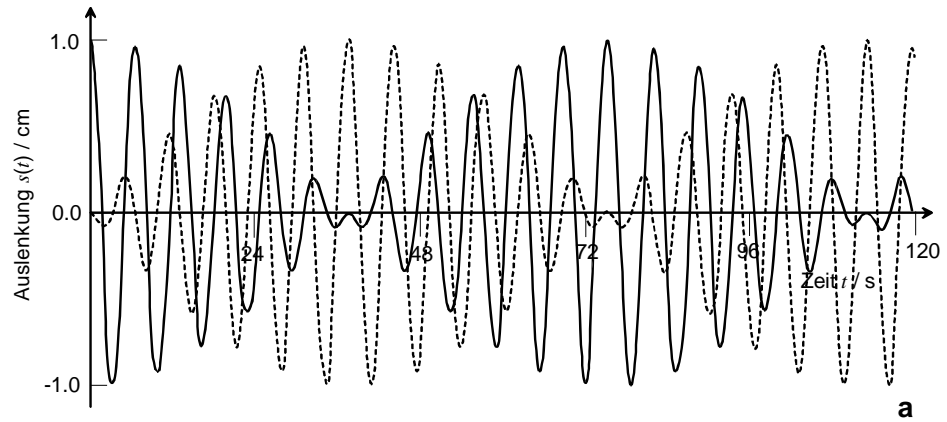
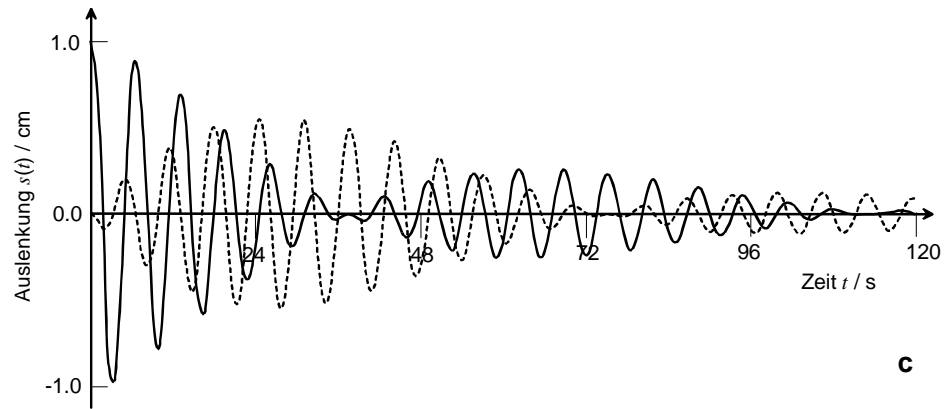


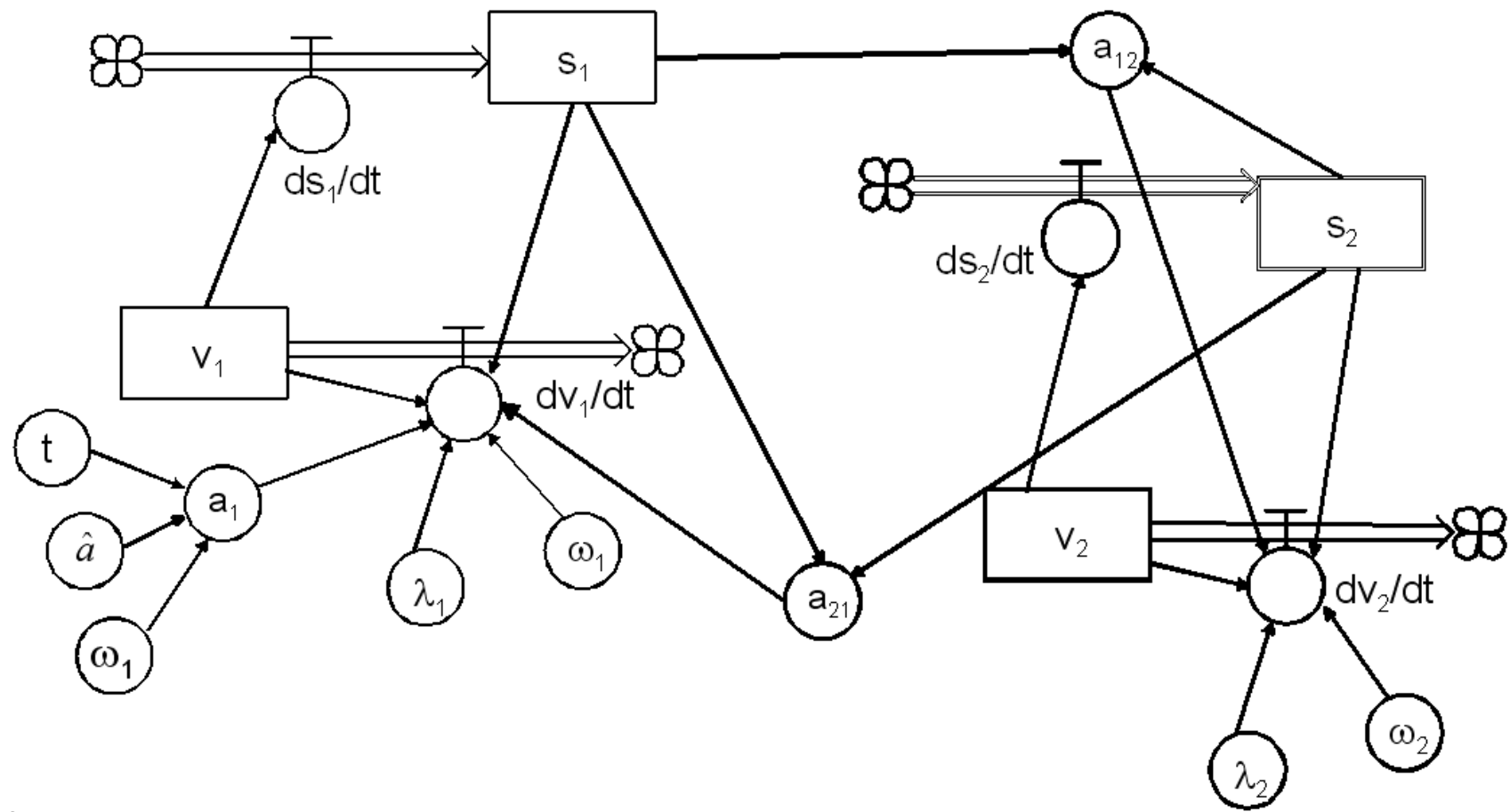
Fig.17. Schematische Darstellung der Schwingungsmodi eines Systems von gekoppelten Pendeln: Die drei Eigenvektoren repräsentieren drei Schwingungsmuster.





— Pendel 1      - - - - - Pendel 2





1

# 423 Fouriertransformation



## 423 Ziele

- Begriff Spektrum erklären können
- Methode einer DFT (sin-FT und cos-FT) erklären können
- FT zur Schwingungsanalyse verwenden können



## 423 Theorie

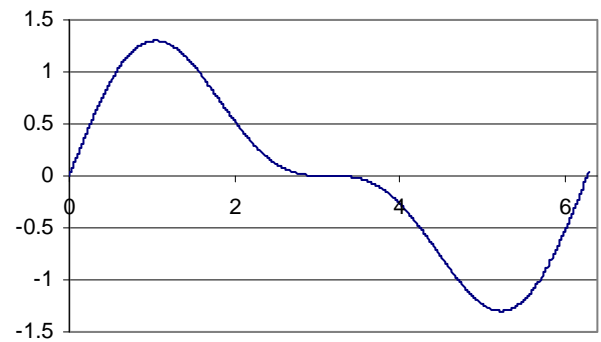
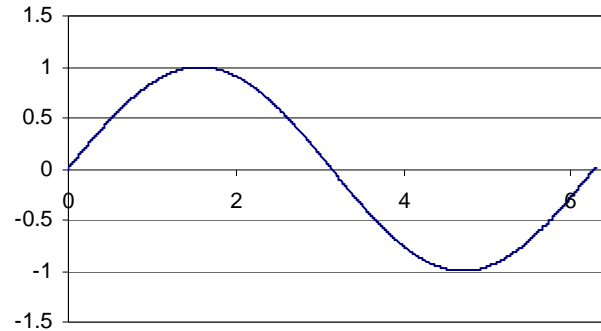
Periodisches Signal lässt sich durch eine diskrete Summe von cos- und sin-Funktionen darstellen

→ Fourier-Synthese

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega \cdot t) + b_n \sin(n\omega \cdot t))$$

# 423 Theorie

Bsp. Sägezahnkurve



$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} \sin(n\omega \cdot t) \right)$$

## 423 Theorie

Inverses Problem: Wie lassen sich die Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  aus gegebenem Signal finden

→ Fourier-Analyse

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega \cdot t) + b_n \sin(n\omega \cdot t))$$



## 423 Theorie

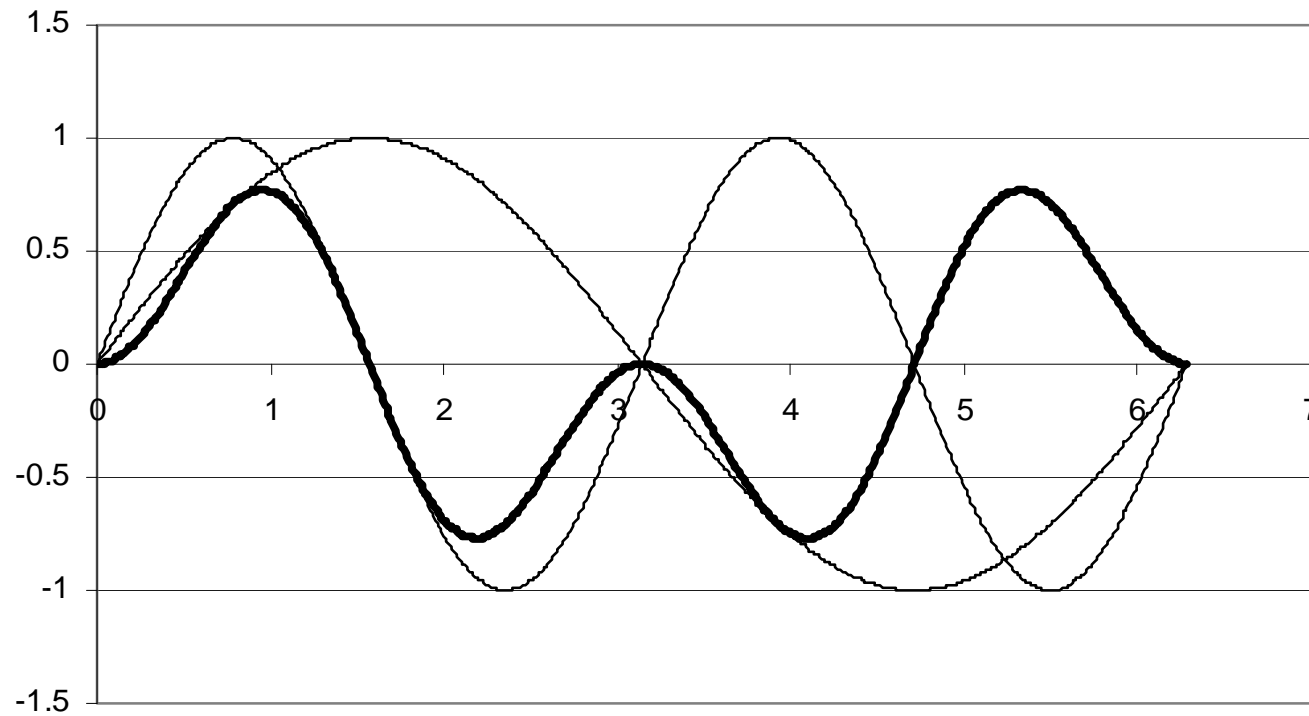
Kernidee: Betrachtung des  
folgenden Integrals:

$$c = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot g(x) \cdot dx$$

## 423 Theorie

$$c = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot g(x) \cdot dx$$

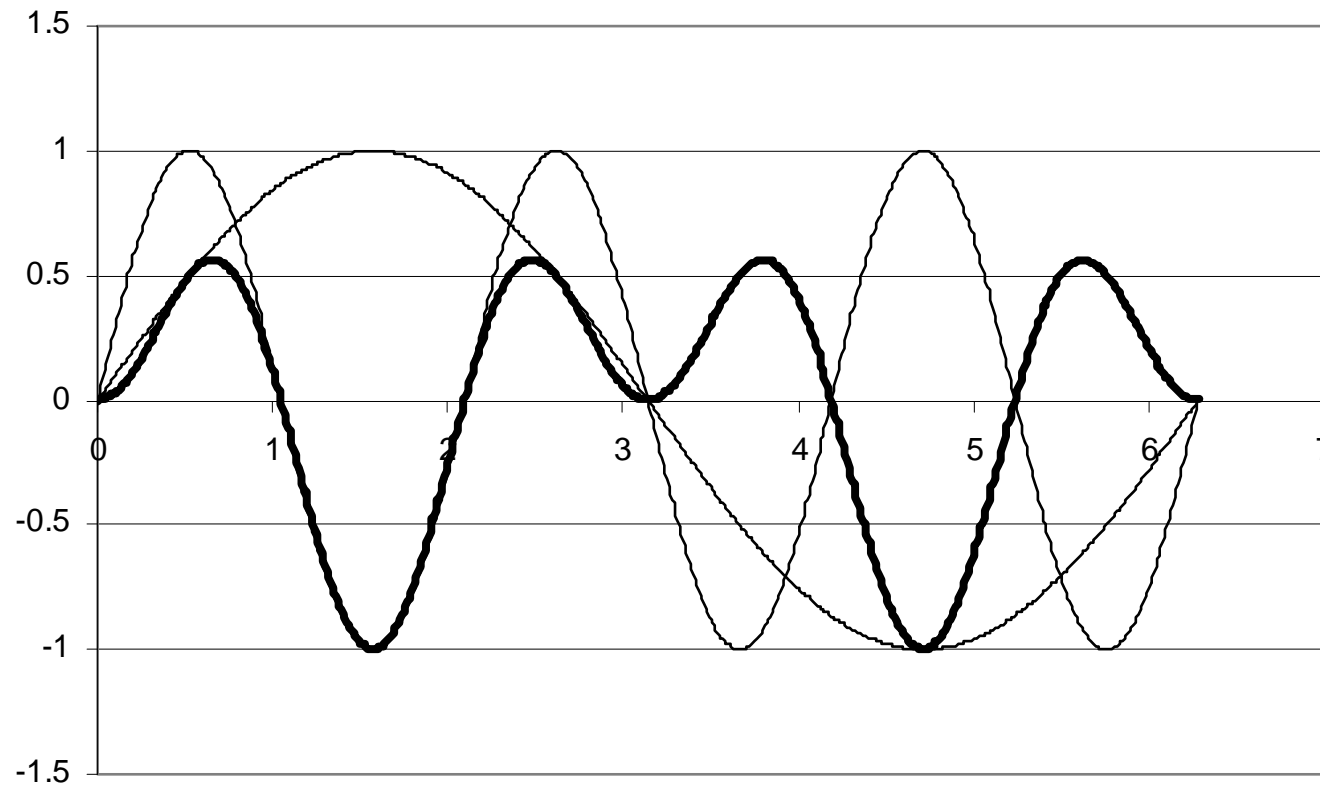
Wert von  $c$  für  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 2\pi$   
 $= 2\pi$ ?



## 423 Theorie

$$c = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot g(x) \cdot dx$$

Wert von  $c$  für  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 2\pi$ ?



## 423 Theorie

$$c = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot g(x) \cdot dx$$

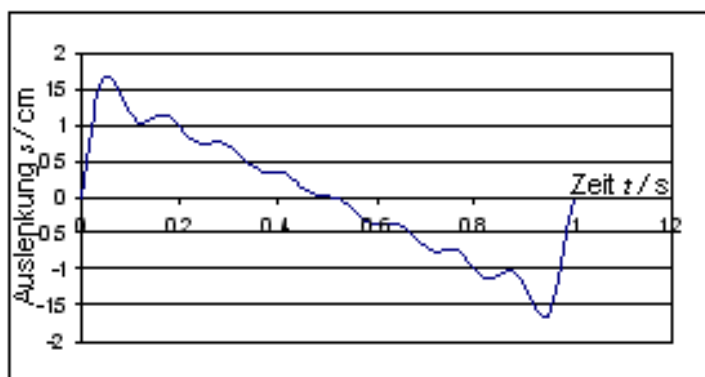
Spez. Wahl für  $g(x)$ :  $\cos(x)$ ,  
 $\sin(x)$

bzw.  $\cos(t)$ ,  $\sin(t)$

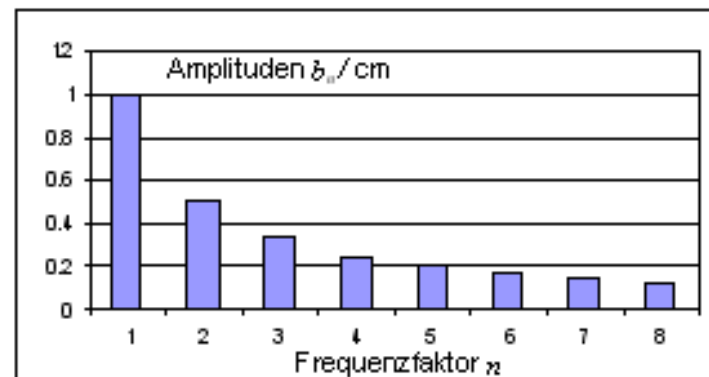
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(n\omega \cdot t) \cdot dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(n\omega \cdot t) \cdot dt$$

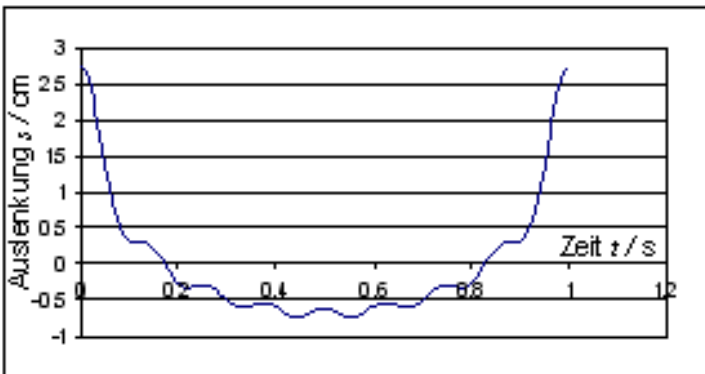
$t$	$f(t) = f_k$	$n = 1$	$n = 2$	...	$n = N$
0	$f(0) = f_0$	$f_0 \sin(1 \omega * 0) \Delta t$	$f_0 \sin(2 \omega * 0) \Delta t$	...	$f_0 \sin(N \omega * 0) \Delta t$
$\Delta t = t_1$	$f(\Delta t) = f_1$	$f_1 \sin(1 \omega t_1) \Delta t$	$f_1 \sin(2 \omega t_1) \Delta t$	...	$f_1 \sin(N \omega t_1) \Delta t$
$2 \Delta t$	$f(2 \Delta t) = f_2$	$f_2 \sin(1 \omega t_2) \Delta t$	$f_2 \sin(2 \omega t_2) \Delta t$	...	$f_2 \sin(N \omega t_2) \Delta t$
$3 \Delta t$	$f(3 \Delta t) = f_3$	$f_3 \sin(1 \omega t_3) \Delta t$	$f_3 \sin(2 \omega t_3) \Delta t$	...	...
$4 \Delta t$	$f(4 \Delta t) = f_4$	$f_4 \sin(1 \omega t_4) \Delta t$	$f_4 \sin(2 \omega t_4) \Delta t$	...	...
$5 \Delta t$	$f(5 \Delta t) = f_5$	$f_5 \sin(1 \omega t_5) \Delta t$	$f_5 \sin(2 \omega t_5) \Delta t$	...	...
$6 \Delta t$	$f(6 \Delta t) = f_6$	$f_6 \sin(1 \omega t_6) \Delta t$	$f_6 \sin(2 \omega t_6) \Delta t$	...	...
...	...	...	...	...	...
$k \Delta t$	$f(k \Delta t) = f_k$	$f_k \sin(1 \omega t_k) \Delta t$	$f_k \sin(2 \omega t_k) \Delta t$	...	$f_k \sin(N \omega t_k) \Delta t$
...	...	...	...	...	...
$K \Delta t = T$	$f(K \Delta t) = f_K = f(T)$	$f_K \sin(1 \omega T) \Delta t$	$f_K \sin(2 \omega T) \Delta t$	...	$f_K \sin(N \omega T) \Delta t$
		$b_1 = \frac{2}{T} \sum_{k=1}^K f_k \sin(1 \omega t_k) \Delta t$	$b_2 = \frac{2}{T} \sum_{k=1}^K f_k \sin(2 \omega t_k) \Delta t$	...	$b_N = \frac{2}{T} \sum_{k=1}^K f_k \sin(N \omega t_k) \Delta t$



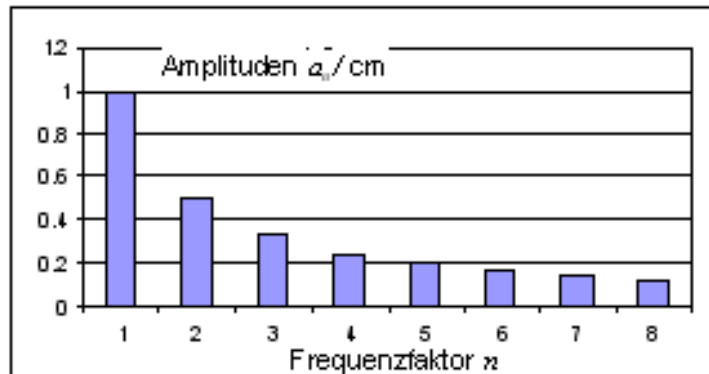
a)



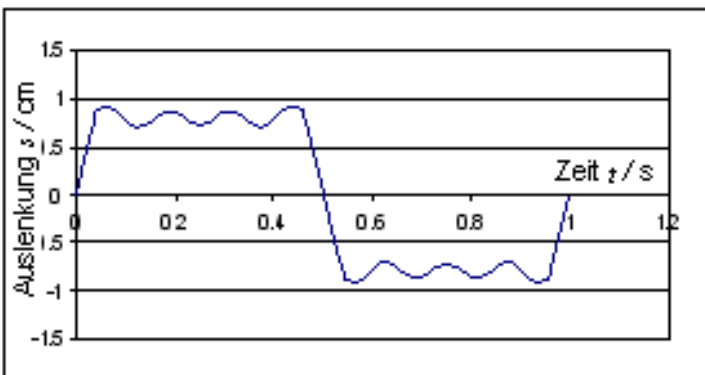
b)



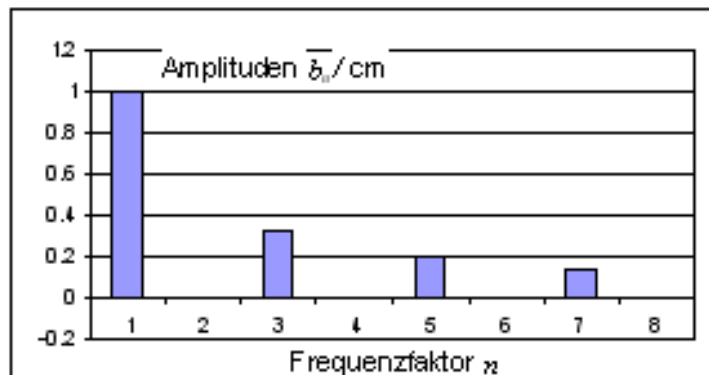
c)



d)



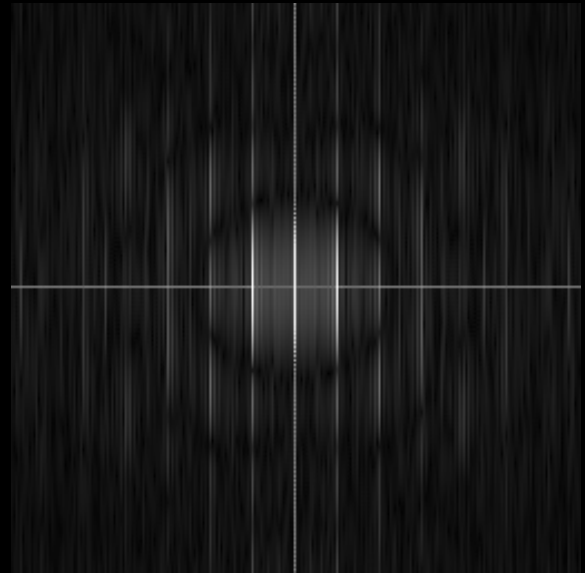
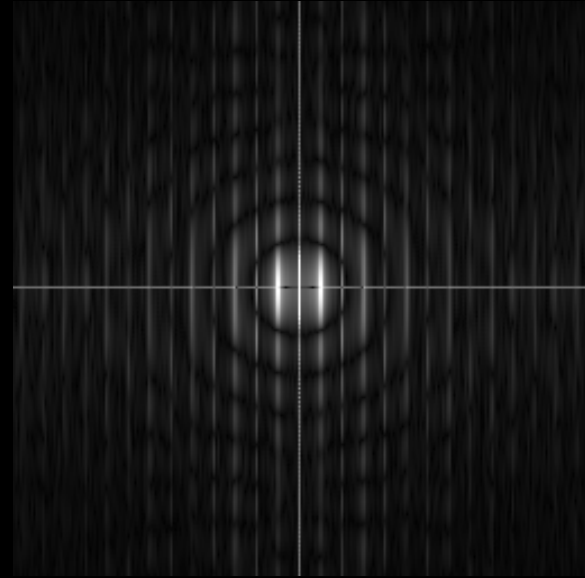
e)

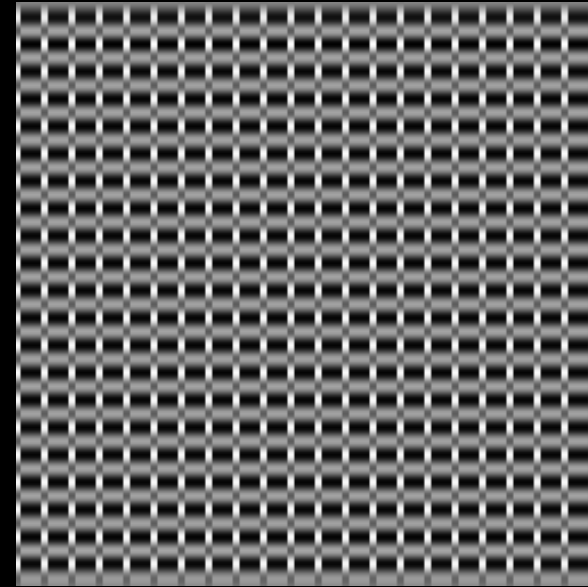
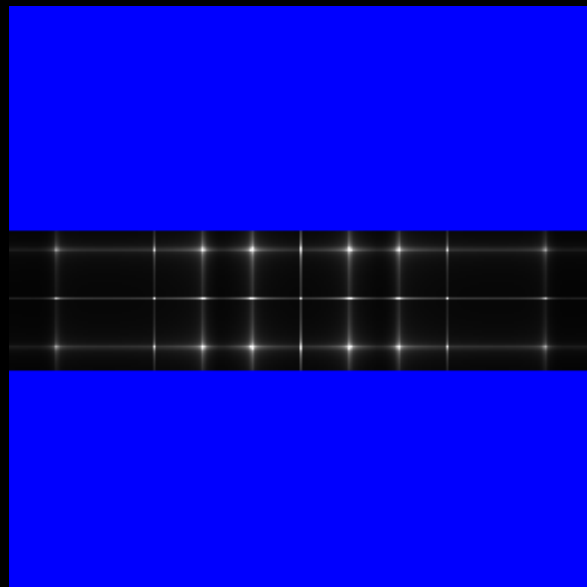
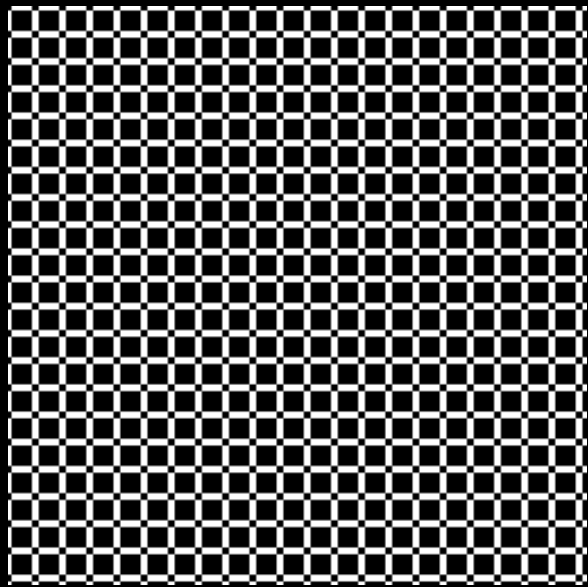
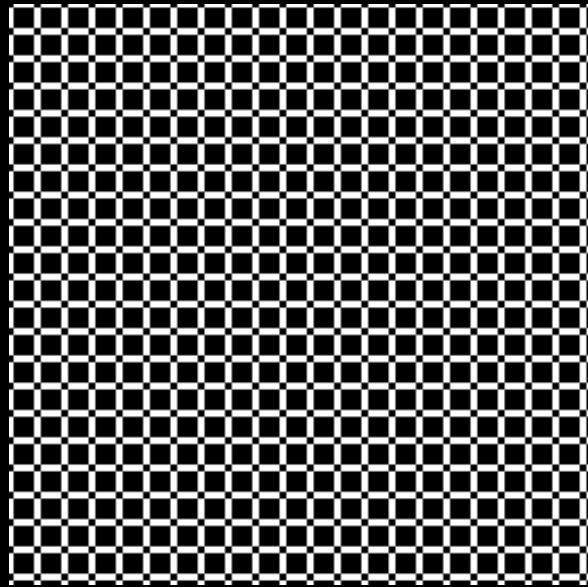
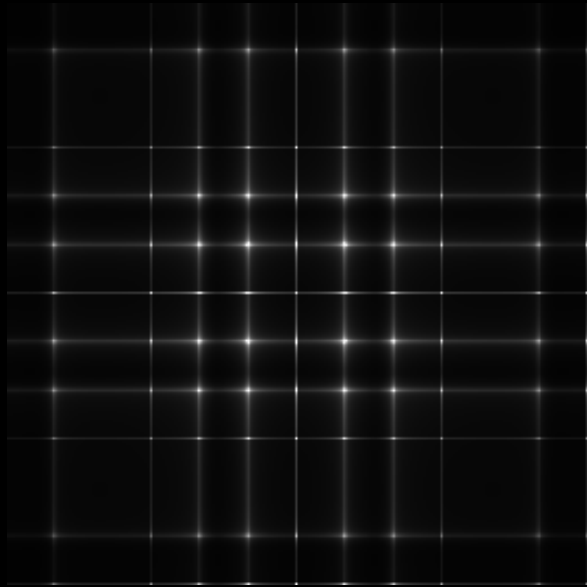
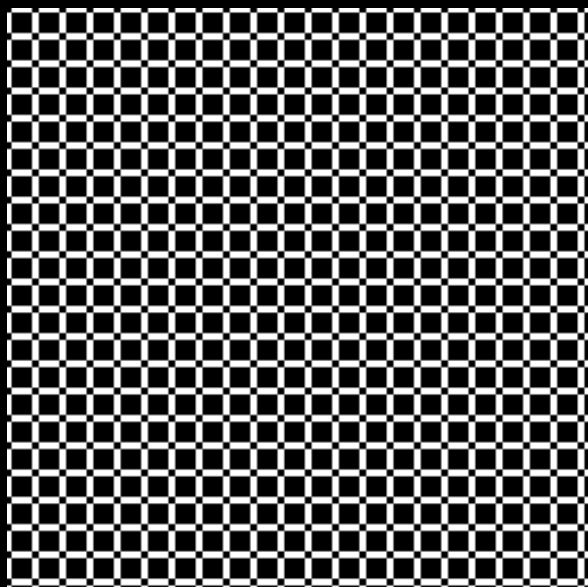


f)



FT







# **424 Chaotische Systeme, chaotische Oszillationen**



## 424 Ziele

- chaotisches Verhalten eines Systems charakterisieren können
- Begriff des Attraktors erklären können
- verschiedene Darstellungsweisen für Daten von oszillierenden Systemen anwenden können

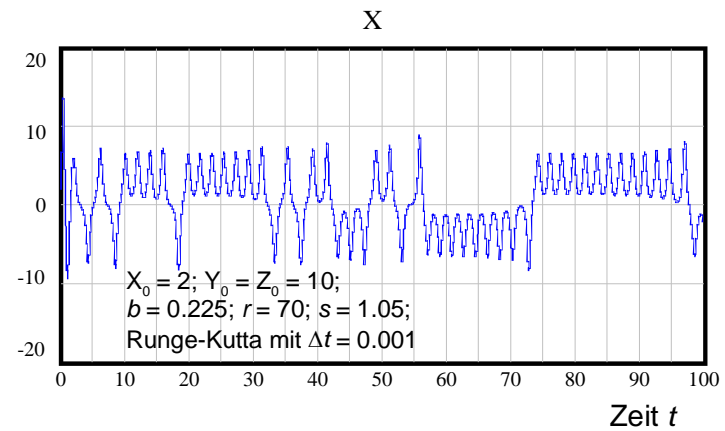
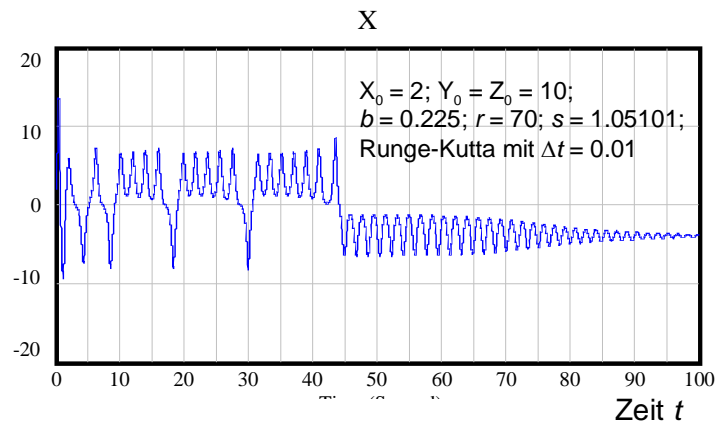
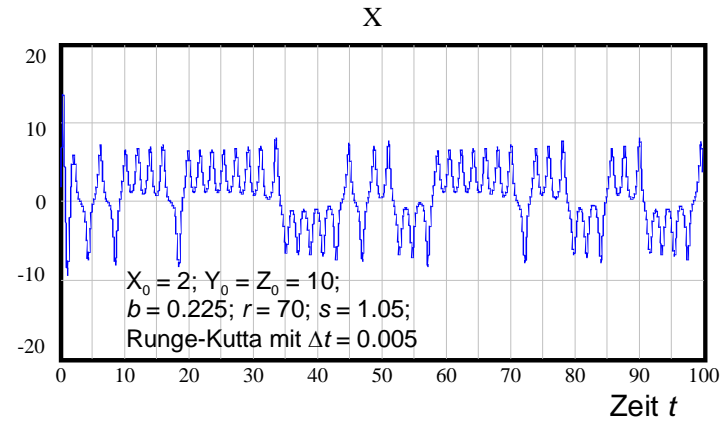
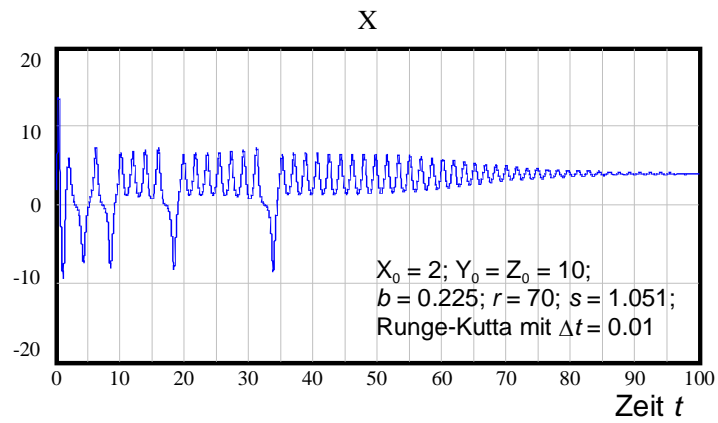
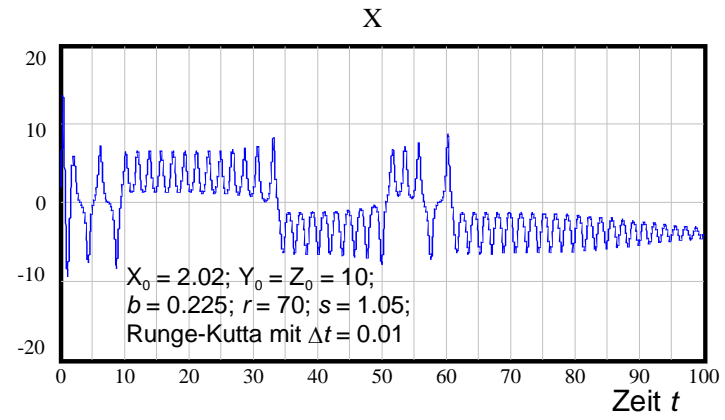
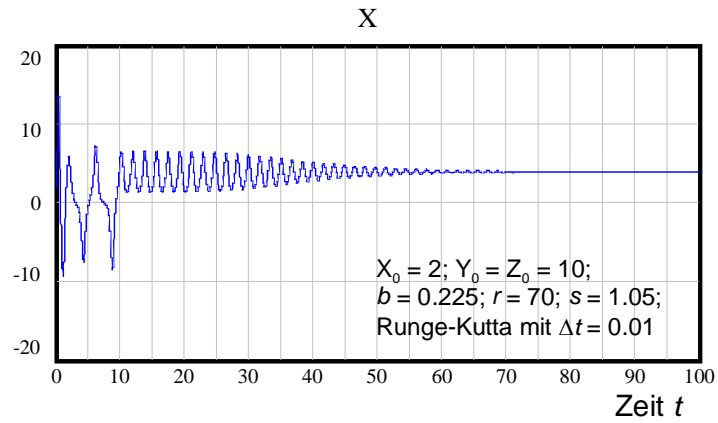
## 424 Theorie und Aufgaben

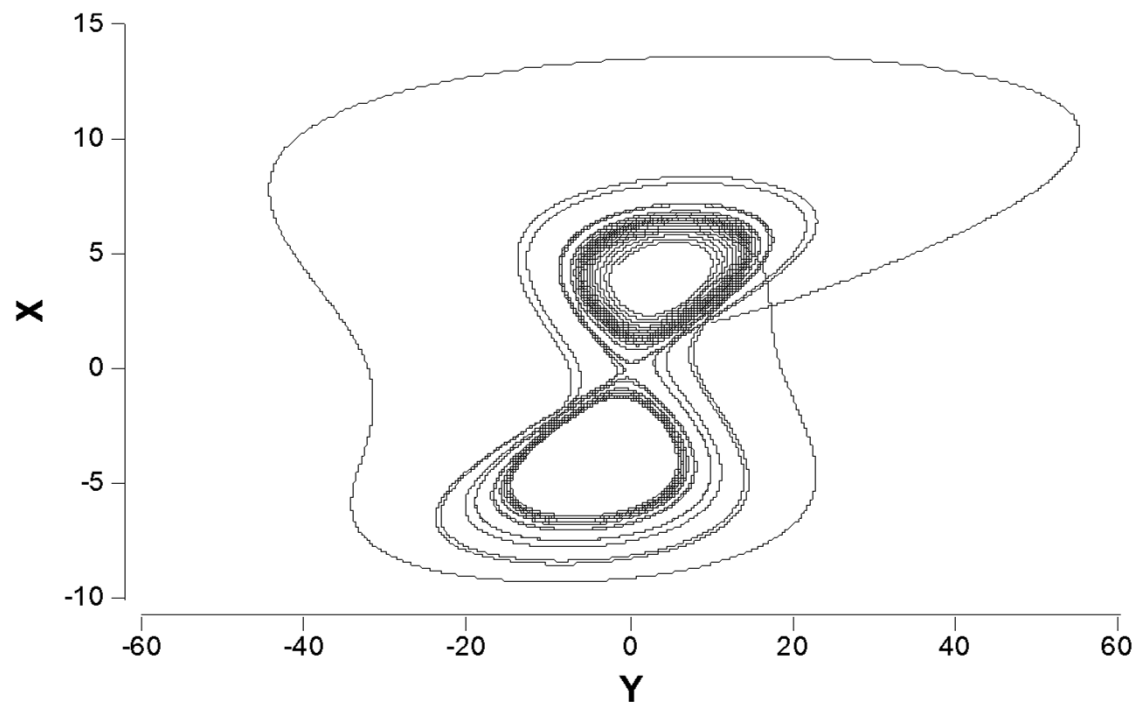
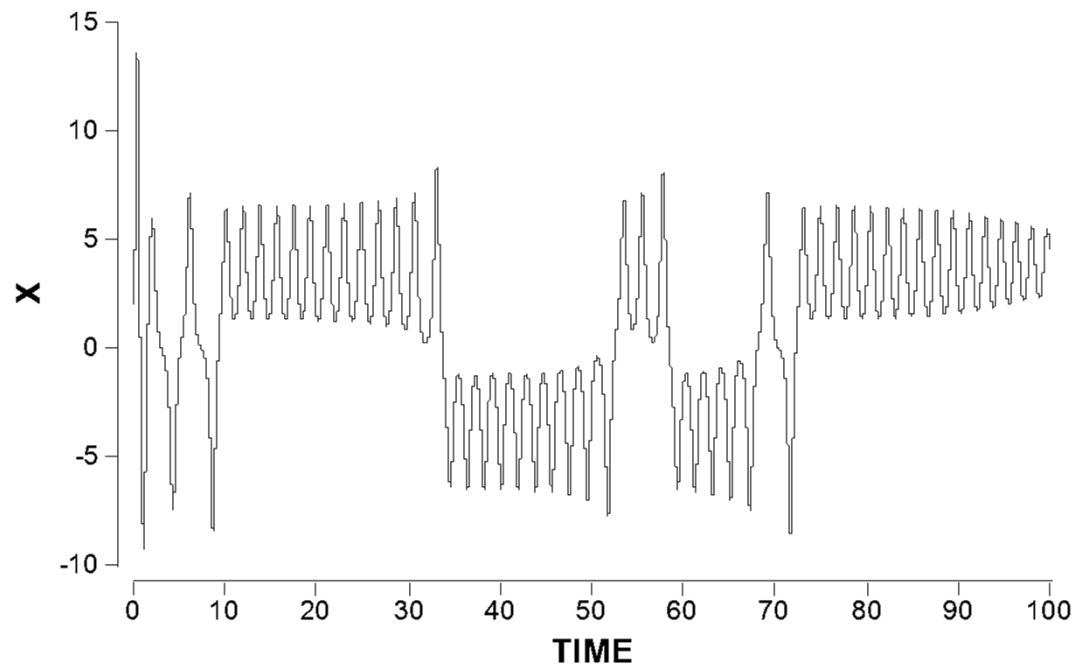
Bsp. Lorentz-Gleichungen

$$\frac{dX}{dt} = s(Y - X)$$

$$\frac{dY}{dt} = rX - Y - XZ$$

$$\frac{dZ}{dt} = XY - bZ$$



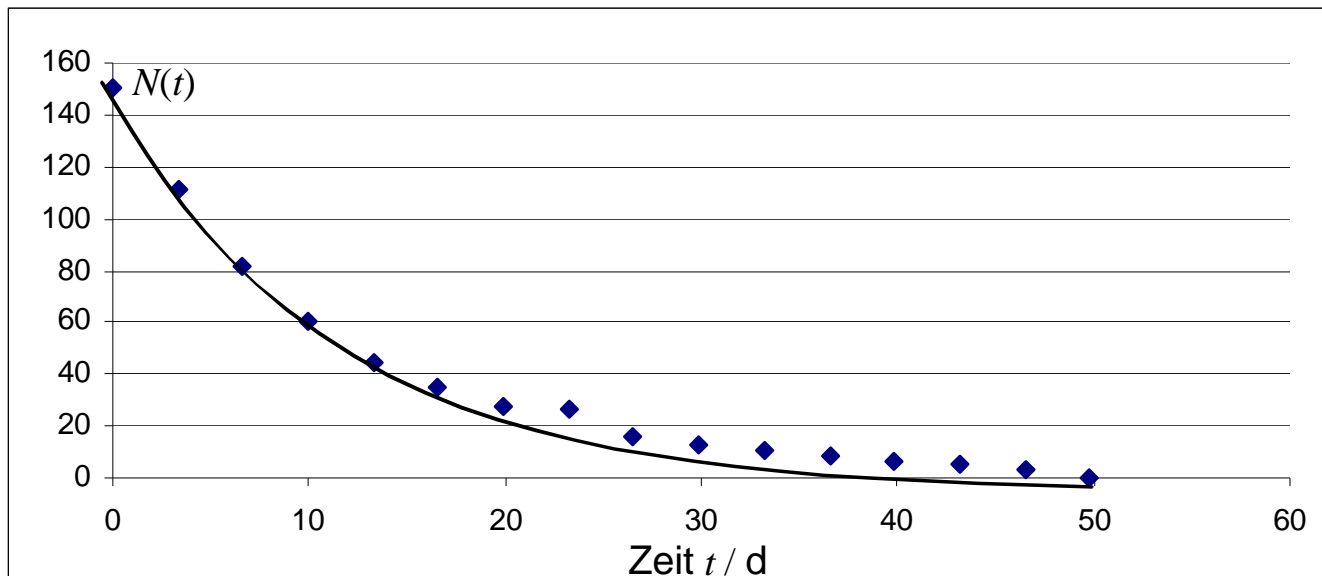


# 424 Aufgaben

Generierung von  
Zufallssignalen ( $\rightarrow$  Rauschen)  
bzw. Zufallszahlen

Anwendungen:

- Rauschgeneratoren
- Monte Carlo- Simulationen



## 424 Aufgaben

Generierung von  
Zufallssignalen (→ Rauschen)  
bzw. Zufallszahlen

Bsp: Numerische Lösung von

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N^2$$

