300 Arbeit, Energie und Potential
310 *Arbeit und Leistung*
320 *Felder und Potentiale*

um was geht es?

Arten von (mechanischer) Energie

Potentialbegriff

Beschreibung von Systemen mittels Energie

311 potentielle & kinetische Energie

311 Ziele

- Begriffe Arbeit, potentielle und kinetische Energie definieren und für einfache Beispiele berechnen können

311 Theorie

$$W = \vec{F} \bullet \vec{s}$$

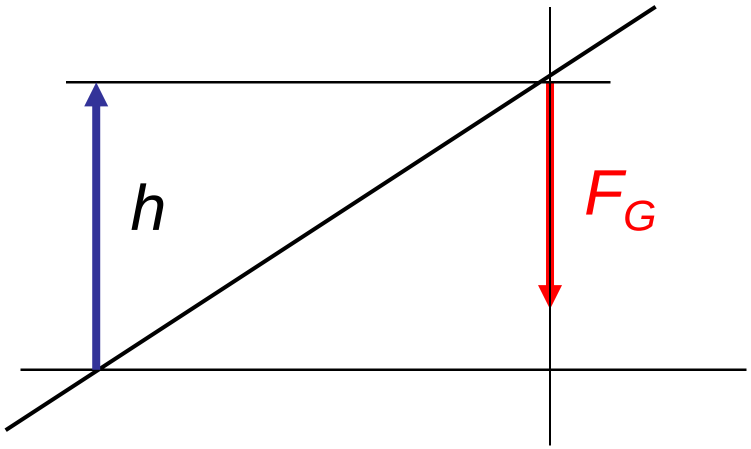
Arbeit = Kraft x Weg

311 Theorie

$$W = \vec{F} \bullet \vec{s}$$

Arbeit = Kraft x Weg

→ potentielle Energie: gleich gross, wie die Arbeit, um eine Masse *m* auf die Höhe *h* zu heben



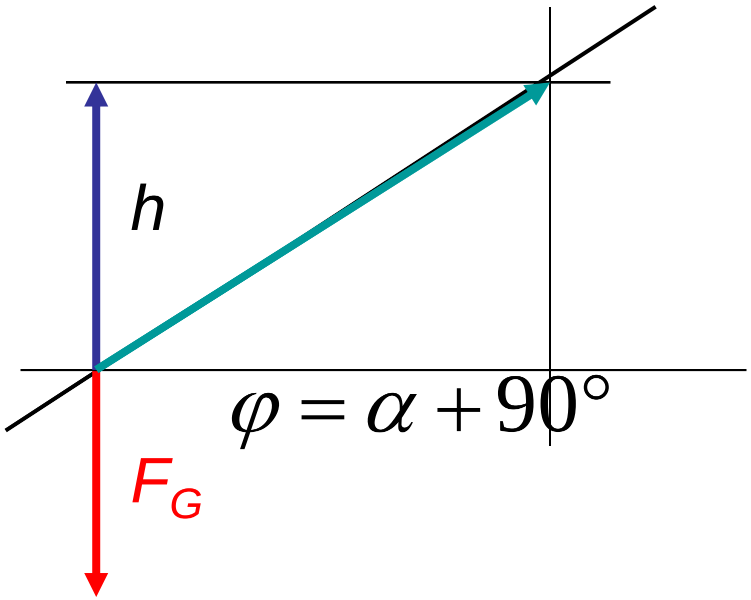
$$E_{pot} = W = F \cdot s = mgh$$

311 Theorie

$$W = \vec{F} \bullet \vec{s}$$

Arbeit = Kraft x Weg

→ potentielle Energie: gleich gross, wie die Arbeit, um eine Masse *m* auf die Höhe *h* zu heben



$$\varphi = \alpha + 90°$$

$$\cos(\alpha + 90°) = -\sin\alpha$$

$$W = s \cdot mg \cdot \cos\varphi$$

$$W = (-)mg \cdot s \cdot \sin\alpha = (-)mgh$$

311 Theorie

$$dW = m\vec{a} \bullet d\vec{r}$$

Arbeit = Kraft x Weg

→ kinetische Energie: entspricht Arbeit, die bei der Beschleunigung einer Masse m über eine bestimmte Strecke geleistet wird

$$\frac{dW}{dt} = m\vec{a} \bullet \frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{a} \bullet \vec{v}$$

311 Theorie

$$dW = m\vec{a} \bullet d\vec{r}$$

Arbeit = Kraft x Weg

→ kinetische Energie: entspricht Arbeit, die bei der Beschleunigung einer Masse m über eine bestimmte Strecke geleistet wird

$$\frac{dW}{dt} = m\vec{a} \bullet \frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{a} \bullet \vec{v} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} m\vec{v} \bullet \vec{v}\right]$$

311 Theorie

Arbeit = Kraft x Weg

$$dW = m\vec{a} \bullet d\vec{r}$$

→ kinetische Energie: entspricht Arbeit, die bei der Beschleunigung einer Masse m über eine bestimmte Strecke geleistet wird

$$\frac{dW}{dt} = m\vec{a} \bullet \frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{a} \bullet \vec{v} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\vec{v} \bullet \vec{v}\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mv^2\right]$$

311 Theorie

$$dW = m\vec{a} \bullet d\vec{r}$$

Arbeit = Kraft x Weg

→ kinetische Energie: entspricht Arbeit, die bei der Beschleunigung einer Masse m über eine bestimmte Strecke geleistet wird

$$\longrightarrow \quad W = \frac{1}{2} m v^2 = E_{kin}$$

312 Leistung und Energieerhaltung

312 Ziele

- Systeme mittels Energie und Leistungsbilanz modellieren können
- Energieerhaltung für einfache Beispiele anwenden können

312 Theorie

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Def. Leistung *P*: Arbeit *dW* pro Zeit *dt*

312 Theorie

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cdot ds}{dt}$$

Def. Leistung *P*: Arbeit *dW* pro Zeit *dt*

312 Theorie

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cdot ds}{dt} = F \cdot v$$

Def. Leistung *P*: Arbeit *dW* pro Zeit *dt*

312 Theorie

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cdot ds}{dt} = F \cdot v$$

Def. Leistung *P*: Arbeit *dW* pro Zeit *dt*

$$\sum_i E_i(t_1) = \sum_i E_i(t_2)$$

Energieerhaltung → Leistung als Bilanzgrösse

312 Theorie

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cdot ds}{dt} = F \cdot v$$

Def. Leistung *P*: Arbeit *dW* pro Zeit *dt*

$$\sum_i E_i(t_1) = \sum_i E_i(t_2)$$

Energieerhaltung → Leistung als Bilanzgrösse

$$\frac{dW}{dt} = P_{in} - P_{out}$$

312 Theorie

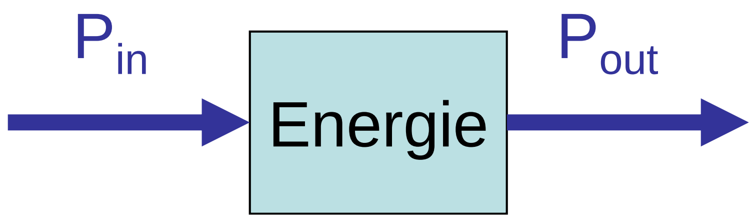
$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cdot ds}{dt} = F \cdot v$$

Def. Leistung *P*: Arbeit *dW* pro Zeit *dt*

$$\sum_i E_i(t_1) = \sum_i E_i(t_2)$$

Energieerhaltung → Leistung als Bilanzgrösse

$$\frac{dW}{dt} = P_{in} - P_{out}$$



321 Gravitationspotential

321 Ziele

- Konzept zur schrittweisen Berechnung (Summation) der Arbeit bei ortsveränderlichen Kräften erklären können
- potentielle Energie im Gravitationsfeld einer punkt- oder kugelförmigen Masse berechnen können

321 Theorie

$$W = \vec{F} \bullet \vec{s}$$

Arbeit = Kraft x Weg?

$$W = F \cdot s \cdot \cos\varphi = -F \cdot \Delta r = -F \cdot (r_2 - r_1)$$

321 Theorie

$$W = \vec{F} \bullet \vec{s}$$

Arbeit = Kraft x Weg?

Problem: Was ist, wenn die Kraft vom Ort abhängt?

321 Theorie

$$W = \vec{F} \bullet \vec{s}$$

Arbeit = Kraft x Weg?

Problem: Was ist, wenn die Kraft vom Ort abhängt?

$$dW = F(r) \cdot dr$$

Lösung: schrittweises Verfahren!

321 Theorie

$$W = \vec{F} \bullet \vec{s}$$

Arbeit = Kraft x Weg?

Problem: Was ist, wenn die Kraft vom Ort abhängt?

Lösung: schrittweises Verfahren!

$$dW = F(r) \cdot dr$$

1. Schritt: $\Delta W_1 = F(r_1) \cdot \Delta r$

321 Theorie

$$W = \vec{F} \bullet \vec{s}$$

Arbeit = Kraft x Weg?

Problem: Was ist, wenn die Kraft vom Ort abhängt?

Lösung: schrittweises Verfahren!

$$dW = F(r) \cdot dr$$

1. Schritt: $\Delta W_1 = F(r_1) \cdot \Delta r$

2. Schritt: $\Delta W_2 = F(r_1 + \Delta r) \cdot \Delta r$

321 Theorie

$$W = \vec{F} \bullet \vec{s}$$

Arbeit = Kraft x Weg?

Problem: Was ist, wenn die Kraft vom Ort abhängt?

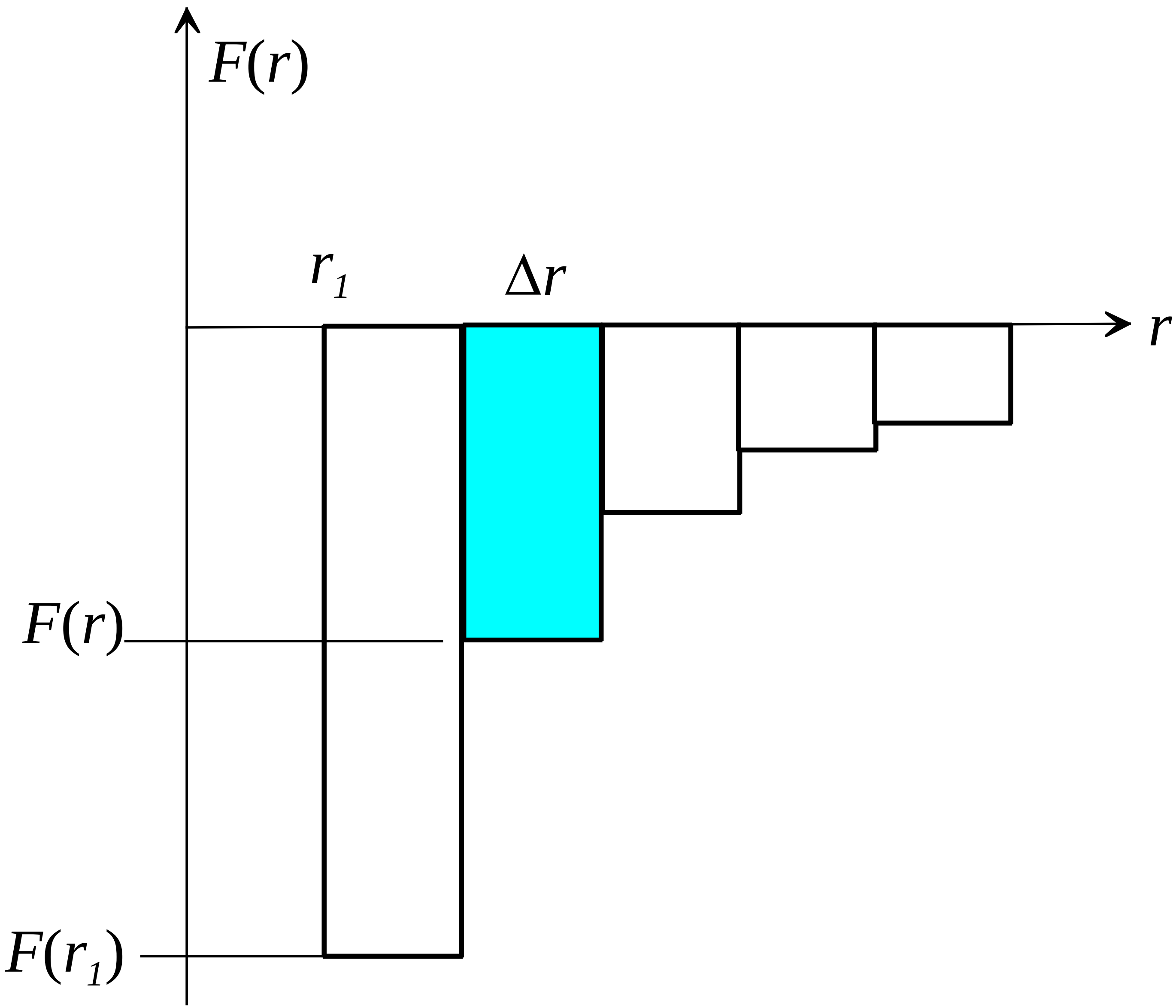
Lösung: schrittweises Verfahren!

$$dW = F(r) \cdot dr$$

1. Schritt: $\Delta W_1 = F(r_1) \cdot \Delta r$

2. Schritt: $\Delta W_2 = F(r_1 + \Delta r) \cdot \Delta r$

3. Schritt: $\Delta W_3 = F(r_1 + 2 \cdot \Delta r) \cdot \Delta r$



$F(r)$
r_1
Δr
r
$F(r)$
$F(r_1)$

321 Theorie

1. Schritt: $\Delta W_1 = F(r_1) \cdot \Delta r$

2. Schritt: $\Delta W_2 = F(r_1 + \Delta r) \cdot \Delta r$

3. Schritt: $\Delta W_3 = F(r_1 + 2 \cdot \Delta r) \cdot \Delta r$

$$W = \sum_i \Delta W_i$$

321 Theorie

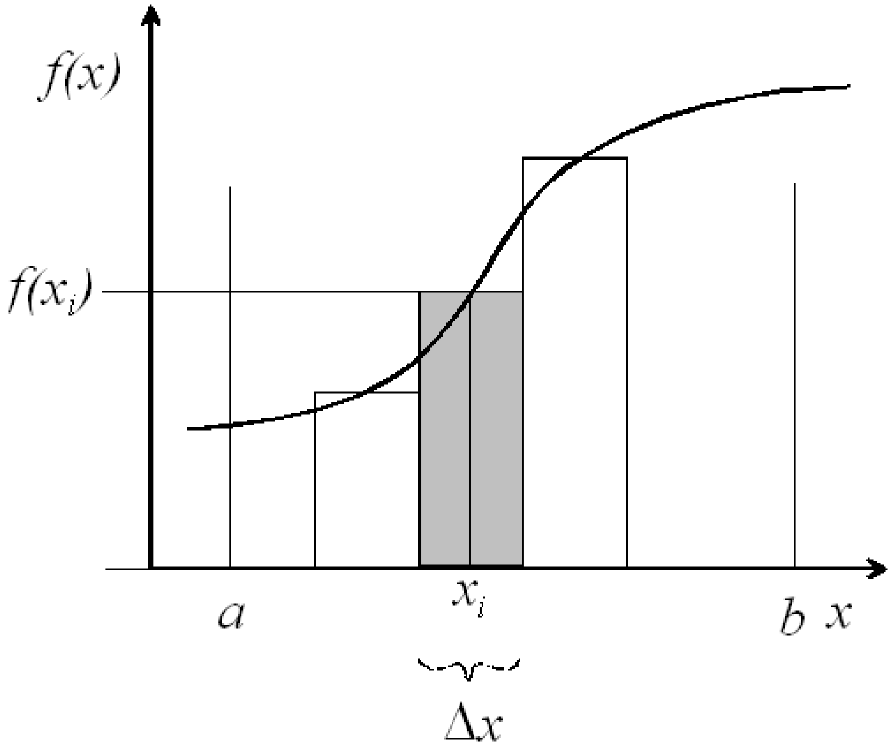
Lösung: schrittweises Verfahren – ist am genauesten, wenn die Wegschritte infinitesimal klein gewählt werden, also:

$$\Delta r \to 0$$

$$\lim_{\Delta r \to 0}\left[\sum_i \Delta W_i\right] = \int dW$$

321 Theorie

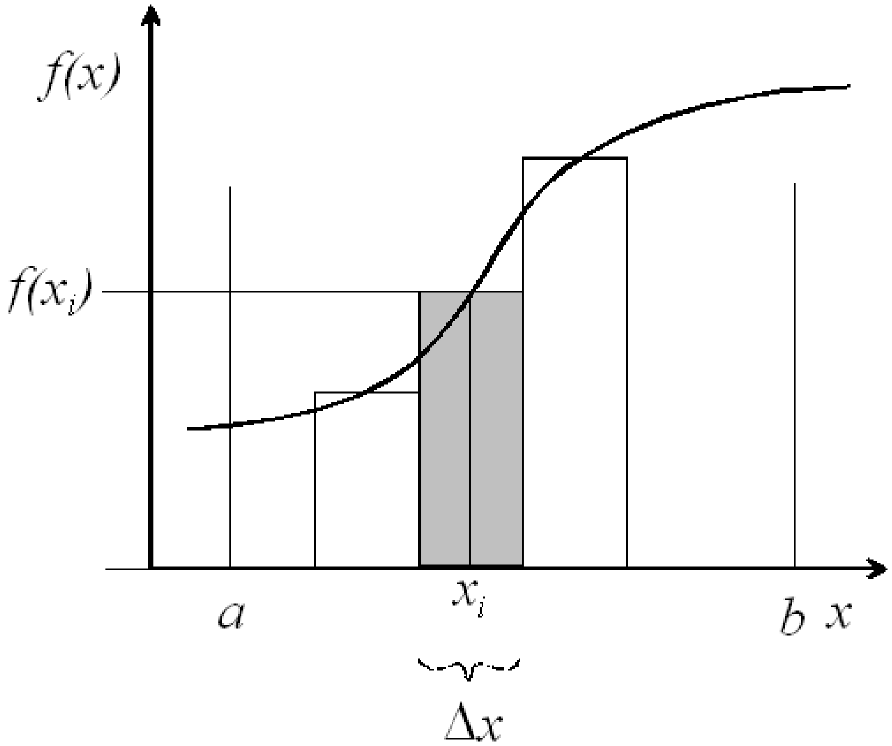
Dies führt auf die sog. Integration, hier allgemein am Bsp. der Funktion *f*(*x*) erklärt



321 Theorie

Die Fläche unter der Kurve von *f*(*x*) kann approximiert werden durch:

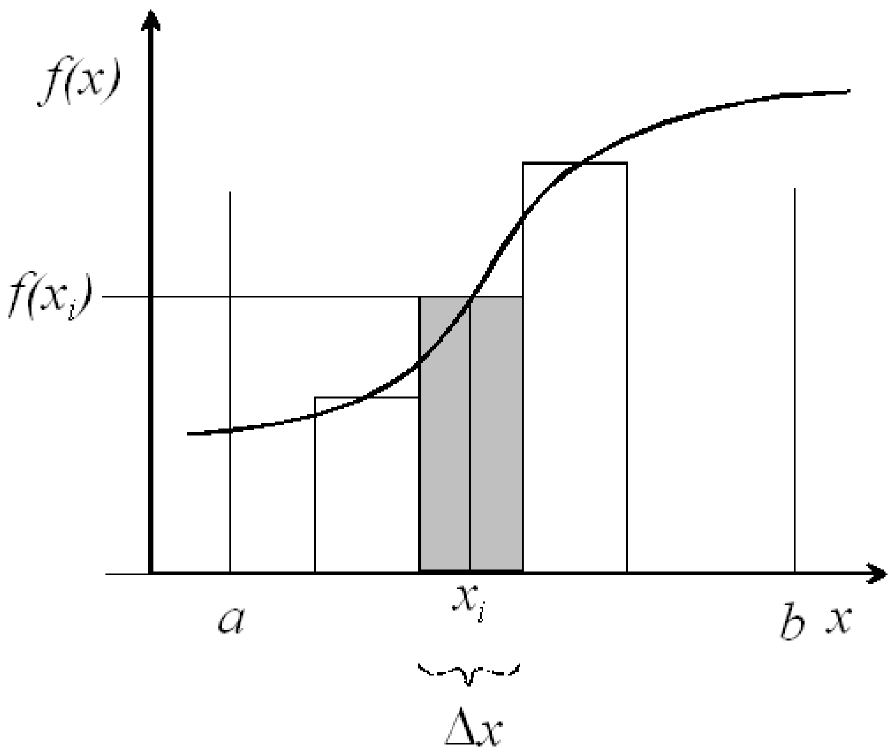
$$A \approx \sum_i f(x_i) \cdot \Delta x$$



321 Theorie

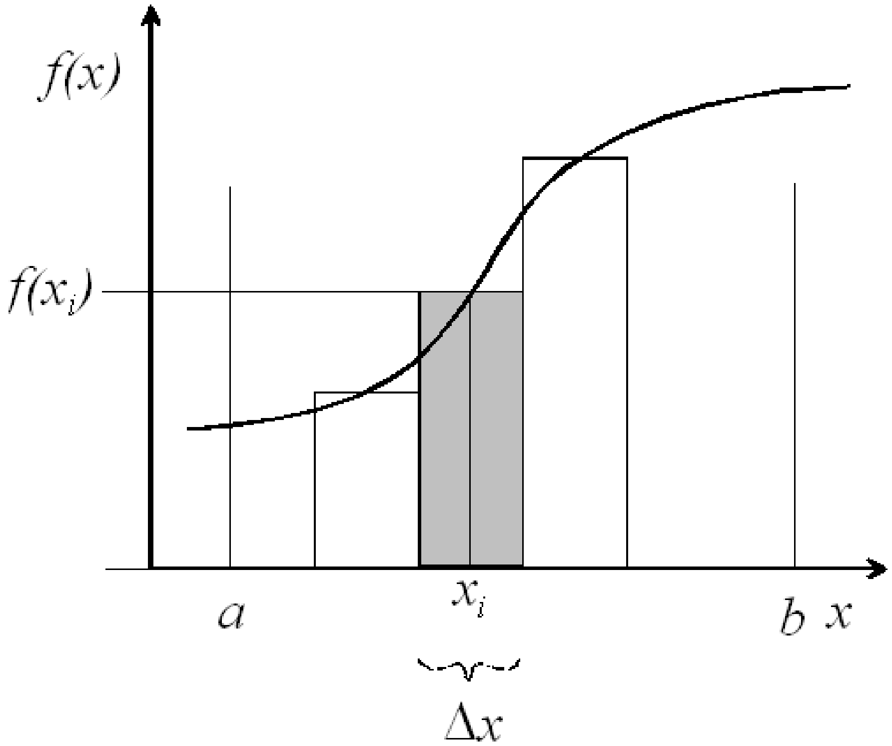
Genau wird es mit einer Grenzwertbildung:

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\sum_i f(x_a + i \cdot \Delta x) \cdot \Delta x \right]$$



321 Theorie

Genau wird es mit einer Grenzwertbildung:



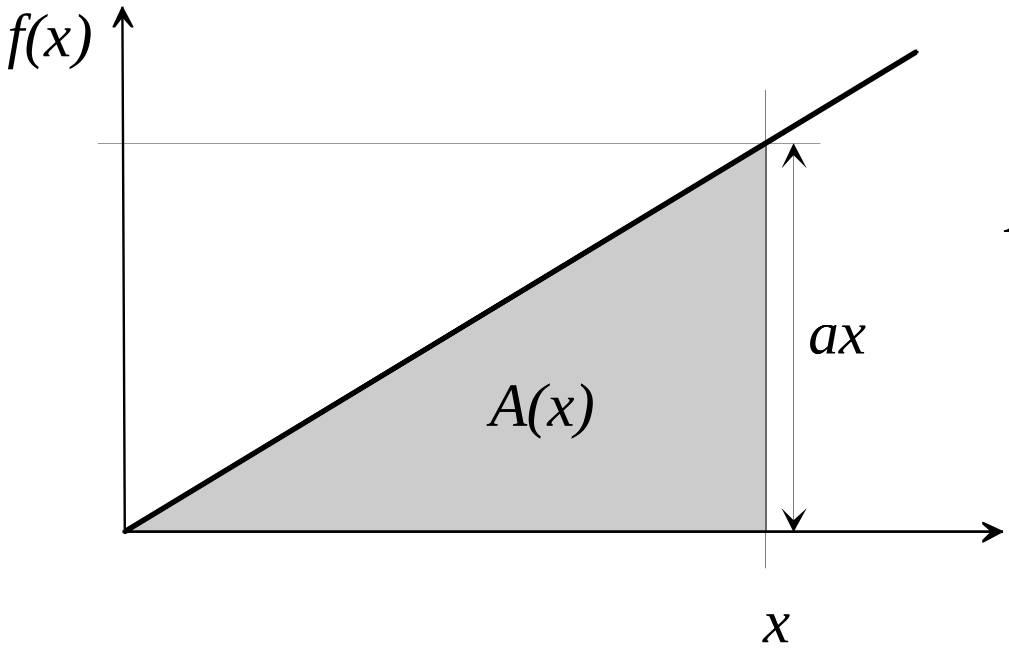
$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\sum_i f(x_a + i \cdot \Delta x) \cdot \Delta x \right]$$

$$\boxed{A(x) = \int_a^b f(x)dx}$$

321 Theorie

$$A(x) = \int_0^x a \cdot dx$$

Bsp. Fläche unter Gerade:

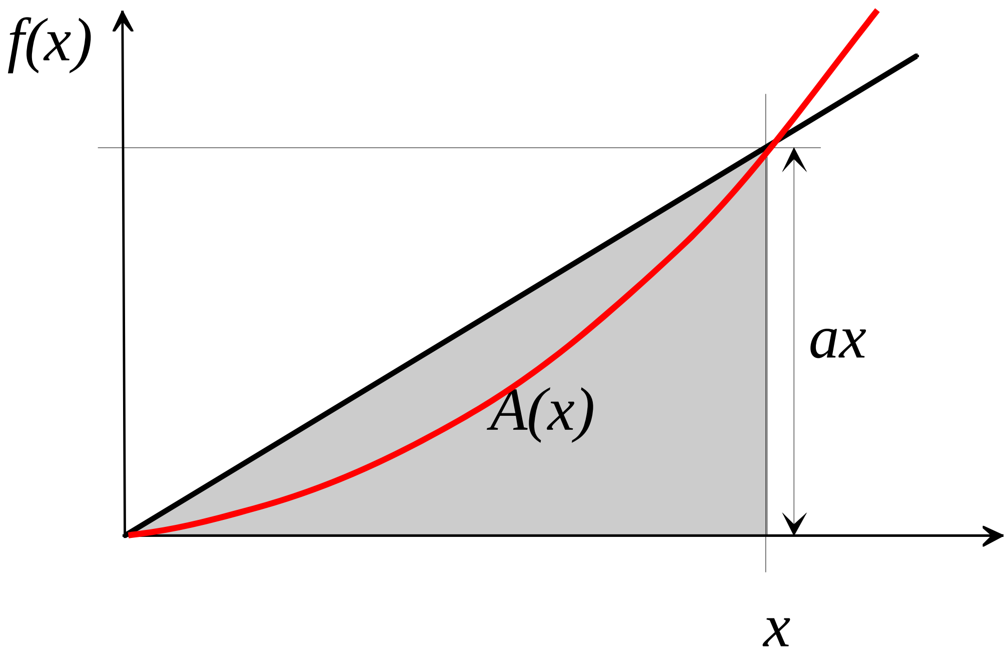


$$A(x) = \frac{1}{2} ax \cdot x = \frac{1}{2} ax^2$$

321 Theorie

$$A(x) = \int_0^x a \cdot dx$$

Bsp. Fläche unter Parabel:

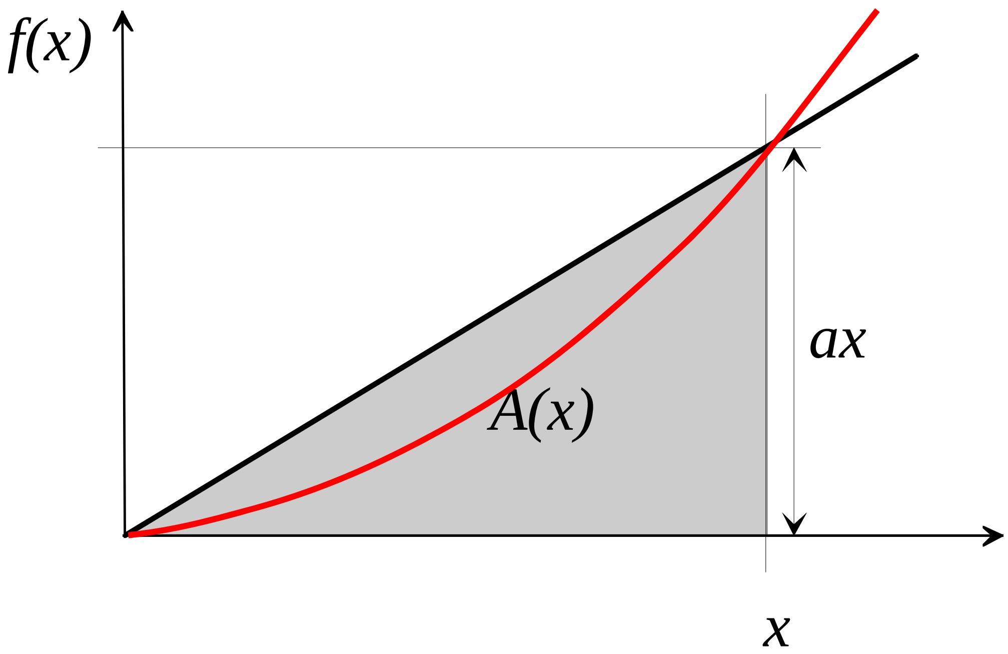


$$A < \frac{1}{2} \cdot ax^2 \cdot x = \frac{1}{2} \cdot ax^3$$

321 Theorie

$$A(x) = \int_0^x a \cdot dx$$

Vermutung – es scheint folgende Regel zu gelten:



$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$$

321 Theorie

$$A(x) = \int_0^x a \cdot dx$$

Ist die Integration die Umkehrung der Ableitung?

$$dA(x) = f(x) \cdot dx = f \cdot dx = dA$$

$$\longrightarrow \quad \frac{dA}{dx} = f(x)$$

321 Theorie

Ja, es gilt:

$$\int dx\left[f'(x)\right] = \int dx\left[\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)\right] = f(x)$$

321 Theorie

Berechnung eies bestimmten Integrals durch Einsetzen der Grenzen *a* und *b*:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx = A(b) - A(a)$$

321 Theorie

Zurück zur Physik –
Anwendung des Integrals auf
die Berechnung der Arbeit *W*:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} dW = \int_{r_1}^{r_2} F(r) \cdot dr$$

321 Theorie

$$F(r) = \gamma \frac{mM}{r^2}$$

Anwendung des Integrals auf die Berechnung der Arbeit *W* für das *‘’heben”* einer Masse *m* in einem Gravitationsfeld einer punkt- oder kugelförmigen Masse *M*:

321 Theorie

$$F(r) = \gamma \frac{mM}{r^2}$$

Anwendung des Integrals auf die Berechnung der Arbeit *W* für das *‘’heben”* einer Masse *m* in einem Gravitationsfeld einer punkt- oder kugelförmigen Masse *M*:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{mM}{r^2} dr = \gamma mM \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr$$

321 Theorie

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{mM}{r^2} dr = \gamma mM \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr$$

$$W = \gamma mM \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = -\gamma mM \left[\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2}$$

$$= -\gamma mM \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right]$$

321 Theorie

Feld **G** und Potential *V*:

$$F(r) = m \cdot G(r)$$

$$V(r) = \int G(r) \cdot dr$$

321 Theorie

Feld **G** und Potential *V*:

$$F(r) = m \cdot G(r)$$

$$V(r) = \int G(r) \cdot dr$$

Arbeit *W* entspricht der Potentialdifferenz x Masse

$$W = m \cdot \left[V(r_2) - V(r_1) \right]$$

322 elektrisches Potential &elektrische Spannung

322 Ziele

- Potentialbegriff auf Elektriztität übertragen können
- Elektr. Leistung aus elektr. Strom und Spannung berechnen können
- Die gespeicherte elektr. Energie eines geladenen Kondensators berechnen können

322 Theorie

Feld **E** und Potential ϕ:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q}$$

$$\varphi = -\int \vec{E} \bullet d\vec{r}$$

322 Theorie

Feld **E** und Potential ϕ:

Arbeit *W* entspricht auch hier der Potentialdifferenz x Ladung → elektrische Spannung *U*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q}$$

$$\varphi = -\int \vec{E} \bullet d\vec{r}$$

$$U_{AB} = -\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{r} = \varphi_A - \varphi_B$$

322 Theorie

Feld **E** und Potential ϕ:

$$\varphi = -\int \vec{E} \bullet d\vec{r}$$

Arbeit *W* entspricht auch hier der Potentialdifferenz x Ladung → elektrische Spannung *U*

$$U_{AB} = -\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{r} = \varphi_A - \varphi_B$$

$$\boxed{W} = -\int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r} = -q\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{r} \boxed{= qU_{AB}}$$

322 Theorie

Arbeit *W* entspricht auch hier der Potentialdifferenz x Ladung → somit ist die leistung *P* gegeben durch:

$$\boxed{P} = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left[qU\right] =$$

322 Theorie

Arbeit *W* entspricht auch hier der Potentialdifferenz x Ladung → somit ist die leistung *P* gegeben durch:

$$\boxed{P} = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left[qU\right] = U\,\frac{dq}{dt} = \boxed{UI}$$

322 Theorie

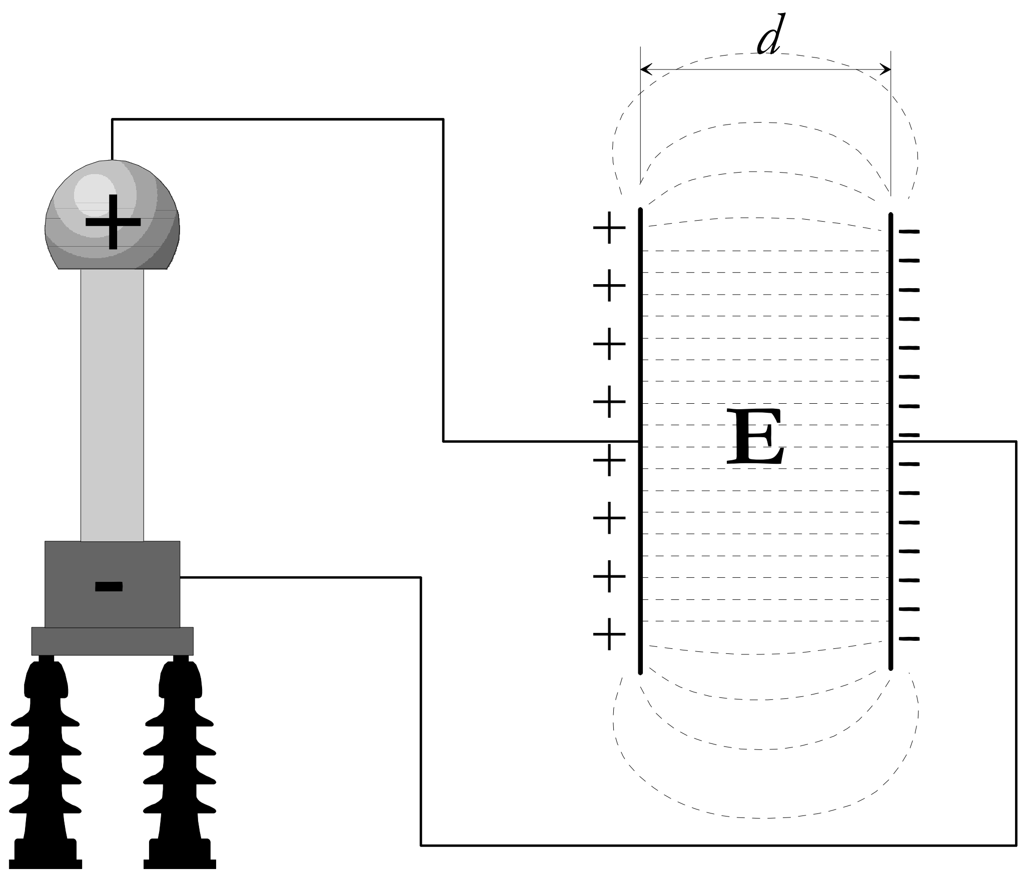
Zusammenhang zw. Spannung *U* und Ladung *Q* beim Plattenkondensator:

$$U = \int_0^d E \cdot ds = E \cdot d$$

$$\boxed{E = \frac{U}{d}}$$

$$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

$$\boxed{Q = CU}$$

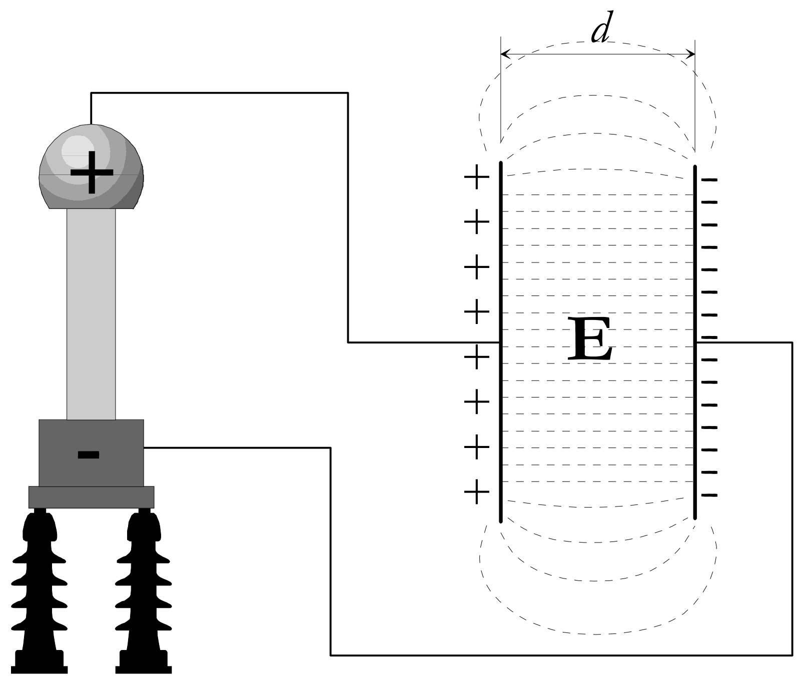


322 Theorie

$$W = \int dW =$$

$$= \frac{1}{C}\int_0^Q q \cdot dq =$$

Zusammenhang zw. Spannung *U*, Ladung *Q* und Energie *W* (gespeicherte Arbeit) beim Plattenkondensator:



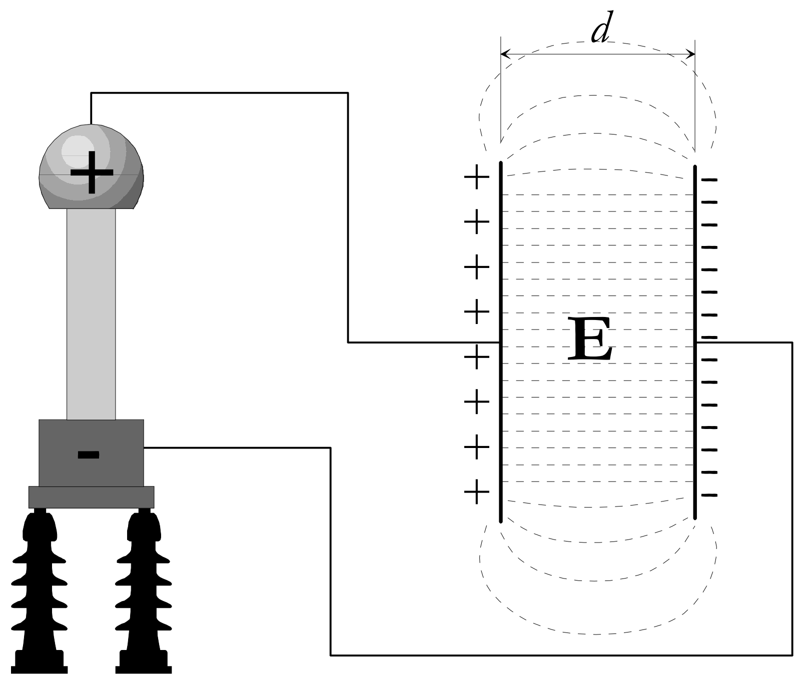
322 Theorie

$$W = \int dW =$$

$$= \frac{1}{C}\int_0^Q q \cdot dq = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}$$

$$\boxed{= \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2}$$

Zusammenhang zw. Spannung *U*, Ladung *Q* und Energie *W* (gespeicherte Arbeit) beim Plattenkondensator:



322 Theorie

Anwendung des Potentialbegriffs auf das Coulomb-Feld:

$$\phi(r) = -\int E(r) \cdot dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

322 Theorie

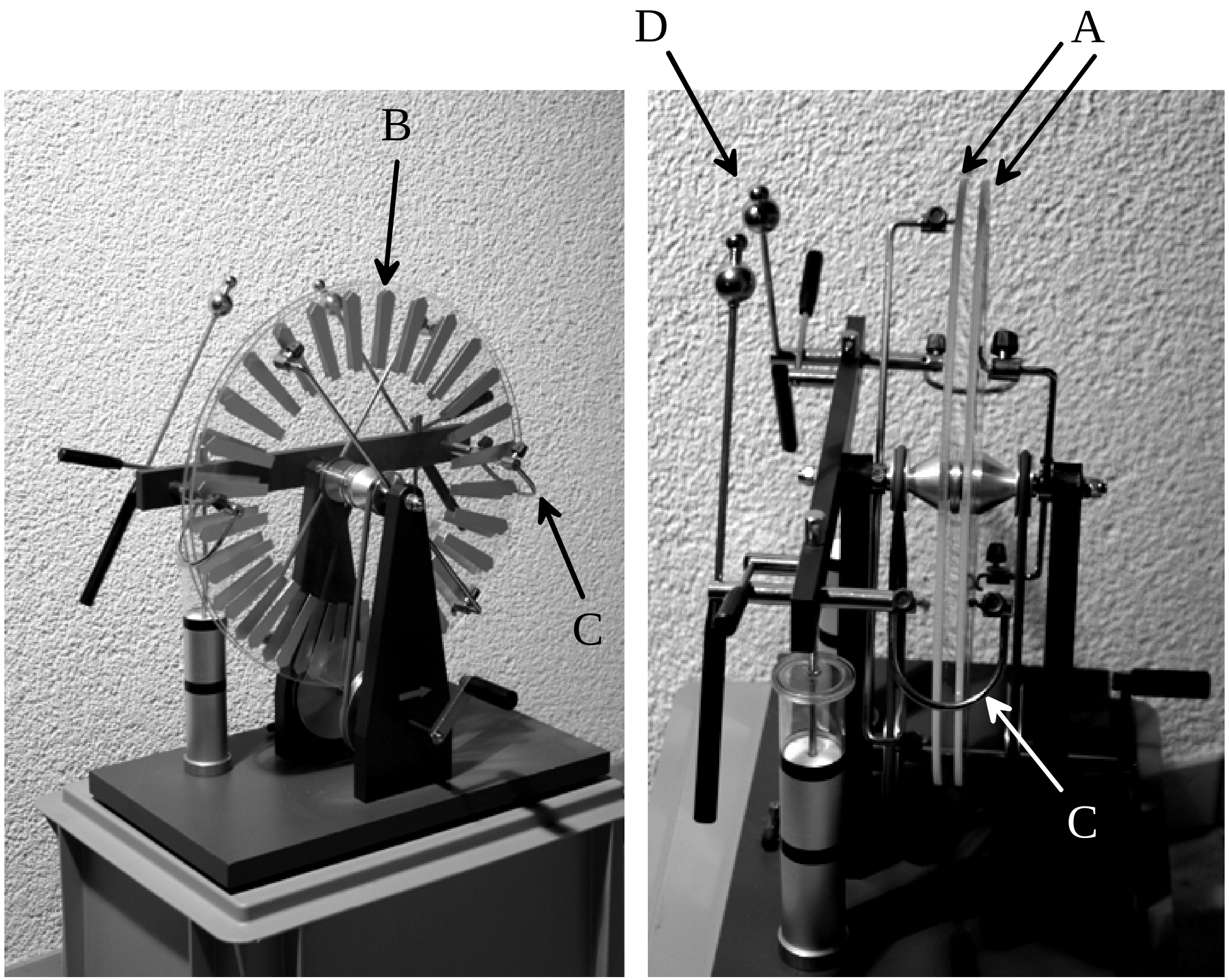
Anwendung des Potentialbegriffs auf das Coulomb-Feld:

$$\phi(r) = -\int E(r)\cdot dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$

$$U_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right] = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right]$$

322 Experimente

Influenz-Maschine



323 Rechnen mit Potentialen

323 Ziele

- Begriff Gradient räumlich definieren können
- Das Konzept Gradient zur Berechnung von Kraftfeldern aus Potentialen anwenden können (Es geht quasi um die rechnerische Umkehrung der Abschnitte 321 und 322)
- Begriff Lagrange-Gleichung erklären können

323 Theorie

Vorteil des Potentials: Addition von Skalaren

$$V(\vec{r}) = V_1(\vec{r}) + V_2(\vec{r})$$

323 Theorie

Potential aus Kraftfeld berechnen: Integration

Kraftfeld aus Potential?

323 Theorie

$$G_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$G_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$G_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Potential aus Kraftfeld berechnen: Integration

Kraftfeld aus Potential?

323 Theorie

$$G_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$G_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$G_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Potential aus Kraftfeld berechnen: Integration

Kraftfeld aus Potential?

$$\boxed{\vec{G} = -\nabla V = -gradV}$$

323 Theorie

Nabla- Operator

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$$

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$$

323 Theorie

Energie-Approach: Langrange-Mechanik

Idee: Eine Energiefunktion definieren und Lösung suchen, welche die korrekte (physikalische) Bahn beschreibt

$$L(\vec{\zeta}, \dot{\vec{\zeta}}, t) = E_{kin} - E_{pot}$$

323 Theorie

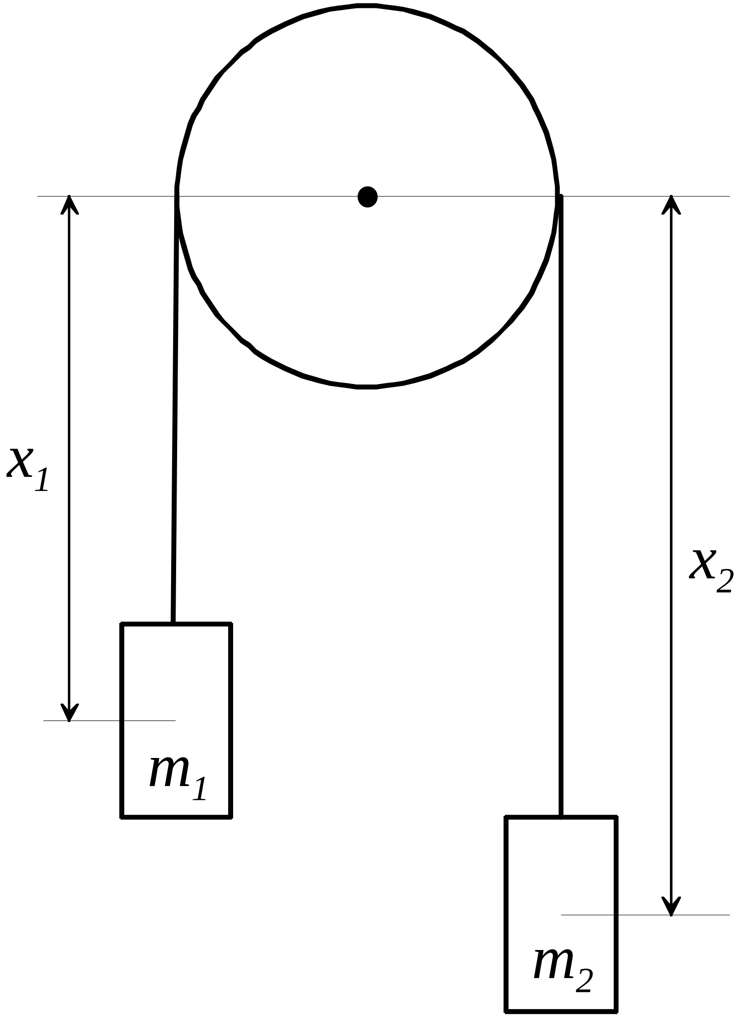
Energie-Approach: Langrange-Mechanik

Idee: Eine Energiefunktion definieren und Lösung suchen, welche die korrekte (physikalische) Bahn beschreibt (mit Verwendung von generalisierten Koordinaten ζ)

$$\frac{d}{dt}\vec{\zeta} = \frac{d\zeta_i}{dt} = \dot{\zeta}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}_i}\right] - \frac{\partial L}{\partial \zeta_i} = 0$$

323 Theorie

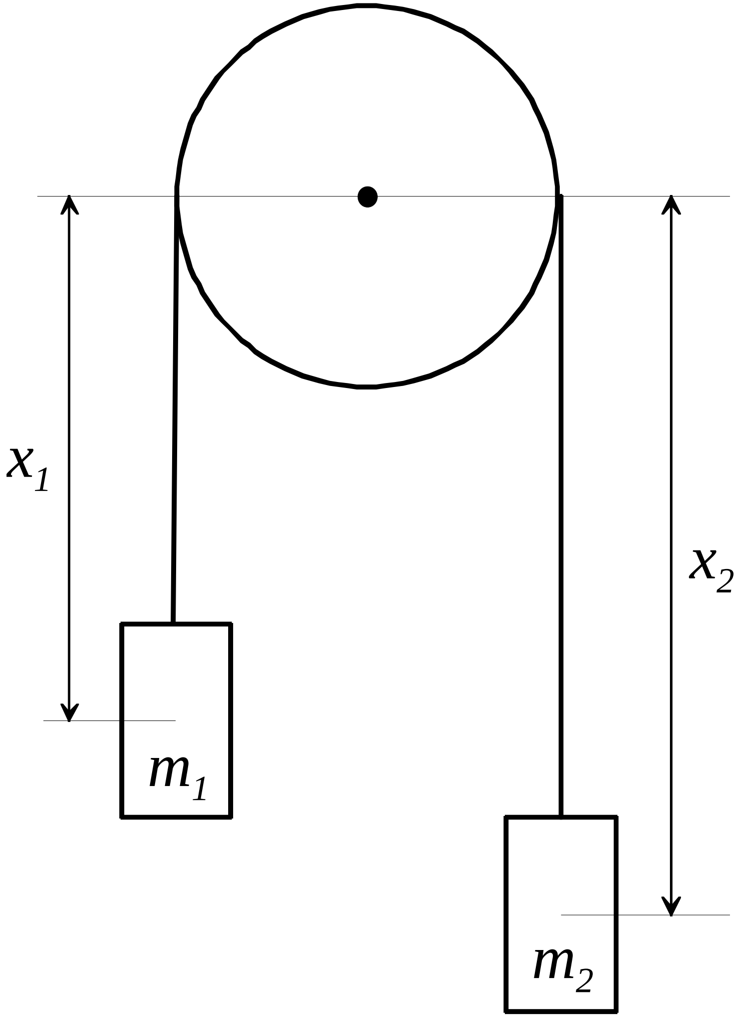


Bsp. Atwoodsche Fallmaschine

Ansatz Newton:

$$(m_1 + m_2) \cdot \ddot{x}_1 = m_1 g - m_2 g$$

323 Theorie

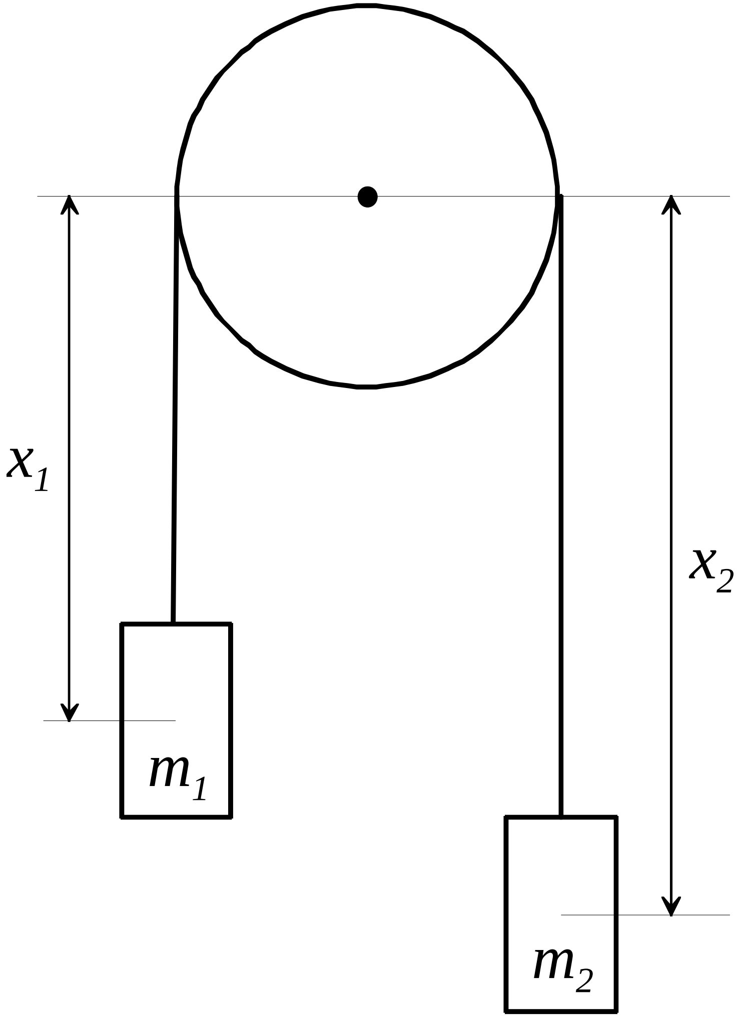


Bsp. Atwoodsche Fallmaschine

Ansatz Newton:

$$(m_1 + m_2) \cdot \ddot{x}_1 = m_1 g - m_2 g$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$$

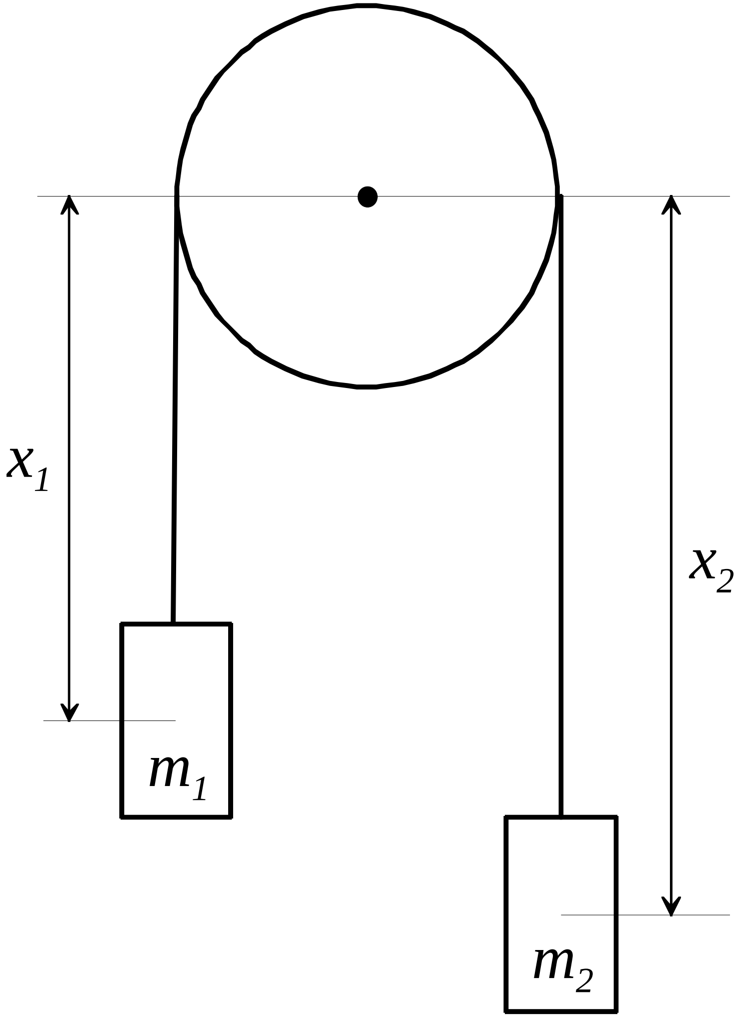


323 Theorie

Bsp. Atwoodsche Fallmaschine

Ansatz Lagrange:

$$\zeta = x_1 \qquad x_2 = l - \zeta$$



323 Theorie

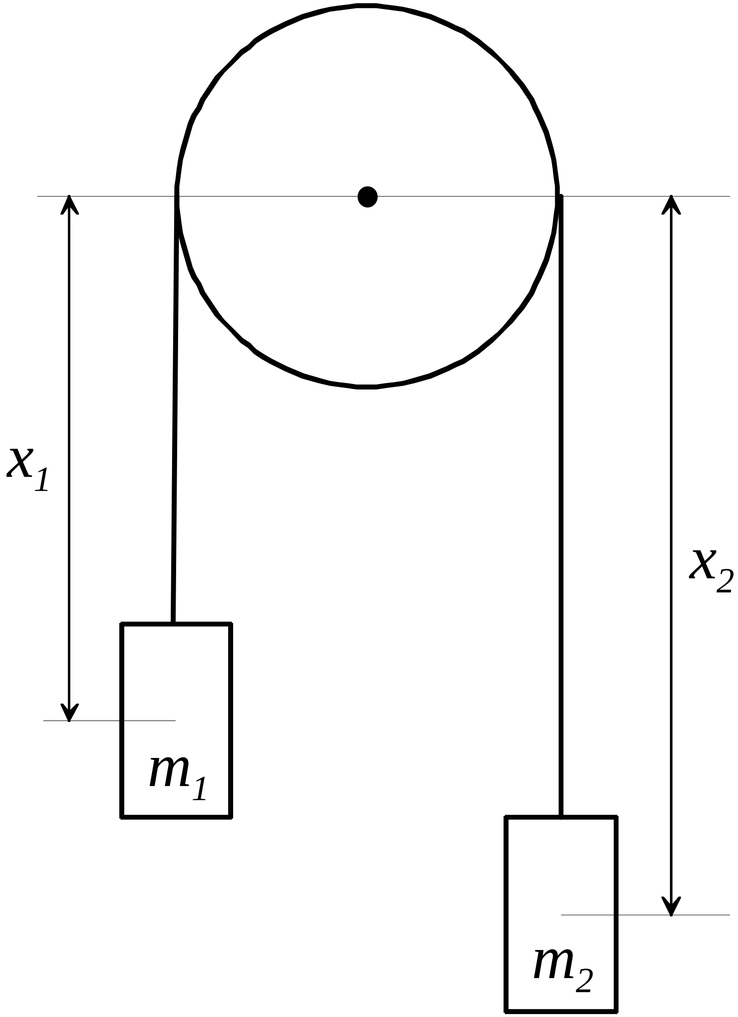
Bsp. Atwoodsche Fallmaschine

Ansatz Lagrange:

$$\zeta = x_1 \qquad x_2 = l - \zeta$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot \dot{\zeta}^2$$



323 Theorie

Bsp. Atwoodsche Fallmaschine

Ansatz Lagrange:

$$\zeta = x_1 \qquad x_2 = l - \zeta$$

$$E_{pot} = -m_1 g \cdot x_1 - m_2 g \cdot x_2$$

$$= -m_1 g \cdot \zeta - m_2 g \cdot (l - \zeta)$$

323 Theorie

Bsp. Atwoodsche Fallmaschine

Ansatz Lagrange:

$$L(\vec{\zeta},\dot{\vec{\zeta}},t) = E_{kin} - E_{pot}$$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\zeta}^2 + (m_1 - m_2)g \cdot \zeta + m_2 gl$$

323 Theorie

Bsp. Atwoodsche Fallmaschine

Ansatz Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}}\right] = \frac{d}{dt}\left[(m_1 + m_2) \cdot \dot{\zeta}\right] = (m_1 + m_2) \cdot \ddot{\zeta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \zeta} = (m_1 - m_2) g$$

323 Theorie

Bsp. Atwoodsche Fallmaschine

Ansatz Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}_i}\right] - \frac{\partial L}{\partial \zeta_i} = 0$$

323 Theorie

Bsp. Atwoodsche Fallmaschine

Ansatz Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}_i}\right] - \frac{\partial L}{\partial \zeta_i} = 0$$

$$\longrightarrow \quad (m_1 + m_2) \cdot \ddot{\zeta} - (m_1 - m_2) \cdot g = 0$$