

Kapitel 5: FIR- und IIR-Filterentwurf

Inhaltsverzeichnis

5.1. EINLEITUNG	2
5.2. FREQUENZGANG	3
5.3. FILTERSPEZIFIKATION	5
5.4. FIR-FILTER	6
5.4.1. TYPISIERUNG.....	6
5.4.2. ENTWURF MIT DER FENSTERMETHODE (WINDOWING)	7
5.4.3. FENSTERENTWURF SPEZIELLER FIR-FILTER (FAKULTATIV)	11
5.4.4. ENTWURF MIT FREQUENZABTASTUNG (FREQUENCY SAMPLING)	13
5.4.5. ENTWURF IM Z-BEREICH	13
5.5. IIR-FILTER	14
5.5.1. ENTWURF MIT ANALOGEN PROTOTYP-FILTERN.....	14
5.5.2. DIREKTER ENTWURF IM DISKRETEN	17

Literatur- bzw. Quellenverzeichnis

- [1] A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer, J. R. Buck: „Zeitdiskrete Signalverarbeitung“, 2., überarbeitete Auflage, ISBN 3-8273-7077-9, Neuübersetzung der aktuellen US-Ausgabe, Pearson Studium, 2004.
- [2] M. Meier: „Signalverarbeitung“, ISBN 3-528-16955-9, Vieweg Verlag, Oktober 2000.
- [3] S.J. Orfanidis: “Introduction to Signal Processing”, ISBN 0-13-209172-0, Prentice Hall, 1996.

5.1. Einleitung

In diesem Kapitel betrachten wir den klassischen Digitalfilterentwurf, in dem primär *ideale* Tiefpass- (TP), Hochpass- (HP), Bandpass- (BP) und Bandsperre-(BS)-Filter approximiert werden.

Diese Filter werden im Frequenzbereich spezifiziert. Wir betrachten deshalb zuerst den Frequenzgang eines Filters im Allgemeinen und dann die Art und Weise der Filterspezifikation.

Die Digitalfilter werden in zwei grosse Klassen unterteilt, nämlich in die Klasse der rekursiven bzw. IIR-Filter und in die Klasse der nichtrekursiven bzw. FIR-Filter.

FIR-Filter sind nichtrekursive LTD-Systeme und werden meistens in der Transversalstruktur bzw. der Direktform 1 realisiert. Sie haben die folgenden Vor- und Nachteile:

- + Mit FIR-Filtern kann man vollständig lineare Phasengänge realisieren.
- + FIR-Filter sind immer stabil. Alle Pole befinden sich im Ursprung, also immer innerhalb des Einheitskreises.
- + FIR-Filter sind toleranter gegenüber Quantisierungseffekten als IIR-Filter.
- FIR-Filter weisen eine höhere Filterordnung auf als vergleichbare IIR-Filter und benötigen damit mehr Realisierungsaufwand. Andererseits können FIR-Filter sehr effizient in DSPs implementiert werden.
- Die Zeitverzögerung bzw. die Gruppenlaufzeit ist meistens relativ gross.

Da man fast immer linearphasige FIR-Filter einsetzt, betrachten wir hier nur den Entwurf von linearphasigen FIR-Filtern, insbesondere mit der Fenstermethode, dem Frequenzabtastrverfahren und der direkten Approximation im z-Bereich.

IIR-Filter sind rekursive LTD-Systeme und werden meistens als Biquad-Kaskade realisiert. Sie haben die folgenden Vor- und Nachteile:

- + kleiner Realisierungsaufwand bzw. kleine Filterordnung dank der Selektivität der Pole.
- + kleine Zeitverzögerungen.
- kein linearer Phasengang für kausale Filter.
- deutlich mehr Probleme mit Quantisierungseffekten (Grenzyklen, Rundungsrauschen) und dem Abklingen von Störungen im Vergleich zu den FIR-Filtern.

Digitalfilter werden heute fast ausschliesslich mit viel Computerunterstützung entworfen. Deshalb werden auch ein paar Matlab-Programmbeispiele angefügt.

5.2. Frequenzgang

Der Frequenzgang $H(f)$ eines Digitalfilters ist die Fouriertransformierte der Impulsantwort $h[n]$ und periodisch mit der Abtastfrequenz f_s . $H(f)$ beschreibt den Einfluss des Digitalfilters auf die Amplitude und die Phase der Frequenzkomponente f im Eingangssignal. $H(f)$ kann bestimmt werden, indem die z -Übertragungsfunktion $H(z)$ für $z=e^{j2\pi fT_s}$ (auf dem Einheitskreis) ausgewertet wird.

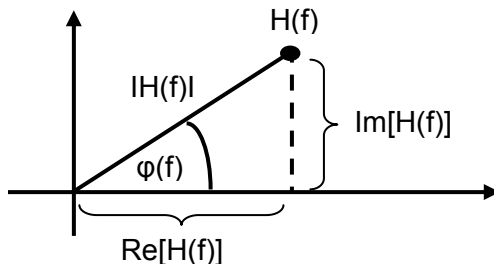


Abbildung 5-1: Polarkoordinatendarstellung von $H(f)$.

Der Frequenzgang $H(f)$ ist normalerweise komplexwertig und kann deshalb wie folgt in Polarkoordinaten dargestellt werden, siehe auch Abbildung 5-1:

$$H(f) = |H(f)| \cdot e^{j\varphi(f)}. \quad (5.1)$$

$|H(f)|$ in Gleichung (5.1) nennt man *Amplitudengang*. Er wird oft in dB angegeben, d.h.

$$|H(f)|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}(|H(f)|) \quad (5.2)$$

Das Argument von $H(f)$ in Gleichung (5.1) nennt man *Phasengang*. Er ist gegeben durch

$$\varphi(f) = \arctan\left(\frac{\text{Im}[H(f)]}{\text{Re}[H(f)]}\right) \quad (5.3)$$

und ist nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt.

Für reellwertige Impulsantworten $h[n]$ gilt die Symmetrie

$$H(f) = H^*(-f) = |H(-f)| \cdot e^{-j\varphi(-f)}, \quad (5.4)$$

wobei c^* die konjugiert komplexe Zahl von c ist. Der Vergleich der Gleichungen (5.1) und (5.4) zeigt, dass der Amplitudengang gerade und der Phasengang ungerade ist, d.h.

$$\begin{aligned} |H(f)| &= |H(-f)| \\ \varphi(f) &= -\varphi(-f) \end{aligned} \quad (5.5)$$

In Abbildung 5-2 ist ein typischer Amplituden- und Phasengang eines IIR-Filters dargestellt.

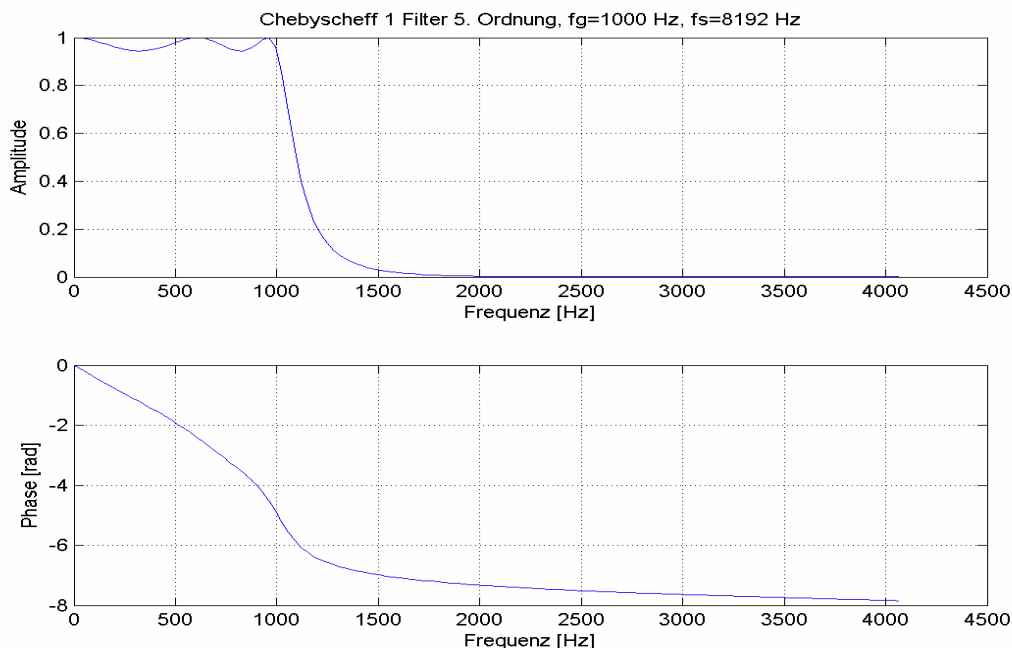


Abbildung 5-2: Typischer Amplituden- und Phasengang eines IIR-Filters.

Bei harmonischer Anregung kann der Filterausgang mit Hilfe des Amplituden- und Phasengangs einfach wie in Abbildung 5-3 dargestellt bestimmt werden.

$$\cos(2\pi f_0 \cdot nT_s) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow |H(f_0)| \cdot \cos[2\pi f_0 \cdot nT_s + \varphi(f_0)] = |H(f_0)| \cdot \cos[2\pi f_0 \cdot (nT_s - \Delta_0)]$$

Abbildung 5-3: Bedeutung des Amplituden- und Phasengangs.

Eine einzelne Frequenzkomponente bei f_0 wird in der Amplitude mit $|H(f_0)|$ gewichtet und erleidet eine Phasenverschiebung von $\varphi(f_0)$ bzw. eine Zeitverzögerung von

$$\Delta_0 = \frac{-\varphi(f_0)}{2\pi \cdot f_0}. \quad (5.6)$$

Unterschiedlich verzögerte Frequenzkomponenten eines Signals können sich zu störenden Signalverzerrungen summieren.

Wenn der Phasengang in einem bestimmten Frequenzbereich linear ist bzw. wenn in einem bestimmten Frequenzbereich $\varphi(f) = -K \cdot f$ gilt, wobei K eine Konstante ist, werden gemäss Gleichung (5.6) alle betreffenden Frequenzkomponenten beim Durchlaufen des Filters um die gleiche, konstante Zeit $\Delta = K/2\pi$ verzögert.

Beispiel

In Abbildung 5-2 ist der Phasengang am Anfang des Durchlassbereichs fast linear, d.h. die Signalkomponenten bis ca. 700 Hz werden durch das Filter fast gleich verzögert.

Mit (kausalen) IIR-Filtern können keine vollständig linearen Phasengänge realisiert werden. Mit FIR-Filtern hingegen schon!

Beispiel (Matlab Signal Processing Toolbox)

Wenn der Vektor H den komplexen Frequenzgang darstellt, kann der Amplitudengang H_{dB} in [dB] und der Phasengang ϕ in [rad] wie folgt bestimmt werden:

```
HdB=20*log10(abs(H));
phi=unwrap(angle(H));
```

Die Funktion `unwrap` korrigiert 2π -Sprünge, die bei der Auswertung der arctan-Funktion entstehen, siehe Gleichung (5.3).

5.3. Filterspezifikation

Der Amplitudengang eines Digitalfilters wird oft mit Hilfe eines Stempel-Matrizen-Schemas spezifiziert, siehe Abbildung 5-4.

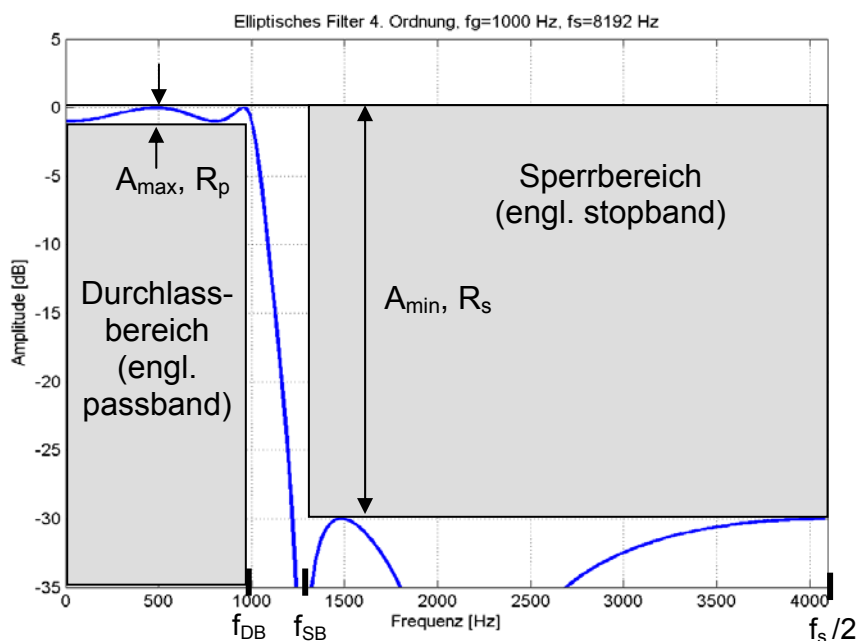


Abbildung 5-4: Filterspezifikation mit Stempel-Matrizen-Schema.

Der Durchlassbereich (engl. passband) eines TP- oder HP-Filters wird normalerweise spezifiziert

- durch die maximal tolerierbare Dämpfung A_{\max} bzw. den Rippel R_p gegenüber einer bestimmten Referenz (normalerweise 0 dB)
- und durch die Eckfrequenz f_{DB} .

Der Sperrbereich (engl. stopband) eines TP- oder HP-Filters wird normalerweise spezifiziert

- durch die minimal erforderliche Dämpfung A_{\min} bzw. den Rippel R_s gegenüber einer bestimmten Referenz (normalerweise 0 dB)
- und durch die Eckfrequenz f_{SB} .

Beispiel

Der in Abbildung 5-4 dargestellte Amplitudengang erfüllt das Stempel-Matrizen-Schema mit den Vorgaben $f_{DB} = 1$ kHz, $f_{SB} = 1.3$ kHz, $A_{\max} = R_p = 1$ dB und $A_{\min} = R_s = 30$ dB.

Die Filterordnung und der Realisierungsaufwand hängen hauptsächlich von der Steilheit der Filterflanke zwischen dem Durchlass- und dem Sperrbereich ab.

Bandpässe bzw. Bandsperren werden analog spezifiziert, wobei der Durchlass- bzw. der Sperrbereich mit 2 Eckfrequenzen am unteren und oberen Rand spezifiziert werden muss.

Der Phasengang wird normalerweise durch den Grad der Linearität (im Durchlassbereich) und/oder durch die maximale Zeitverzögerung spezifiziert.

Wenn die Linearität des Phasengangs wirklich wichtig ist und die Zeitverzögerung nicht allzu klein sein muss, wählt man normalerweise ein FIR-Filter.

5.4. FIR-Filter

5.4.1. Typisierung

Ein kausales FIR-Filter der Ordnung N besitzt N+1 Filterkoeffizienten b_0, \dots, b_N .

Man kann zeigen, dass ein FIR-Filter einen vollständig linearen Phasengang aufweist, wenn die Filterkoeffizienten entweder symmetrisch oder anti-symmetrisch sind, d.h. wenn

$$b_n = b_{N-n} \quad \text{oder} \quad b_n = -b_{N-n} \quad (5.7)$$

für $n=0, \dots, N$. Aber auch der Phasengang eines linearphasigen FIR-Filters besitzt Sprungstellen bei den Nullstellen des Amplitudengangs, was aber keine Bedeutung hat, weil die betreffenden Frequenzkomponenten ja vollständig unterdrückt werden.

Die Zeitverzögerung bzw. die Gruppenlaufzeit eines linearphasigen FIR-Filters ist für alle Frequenzkomponenten gleich und beträgt

$$\Delta = \frac{N}{2} \cdot T_s. \quad (5.8)$$

Beispiel:

Ein FIR-Filter der Ordnung $N=1$ mit symmetrischen Filterkoeffizienten besitzt die Übertragungsfunktion $H(z)=b_0 \cdot (1+z^{-1})$ und damit den Frequenzgang

$$H(f) = b_0 (1 + e^{-j2\pi f T_s}) = \frac{2b_0}{2} \cdot (e^{j\pi f T_s} + e^{-j\pi f T_s}) \cdot e^{-j\pi f T_s} = 2b_0 \cdot \cos(\pi f T_s) \cdot e^{-j\pi f T_s}. \quad (5.9)$$

Im der 1. Nyquist-Zone $-f_s/2 \leq f \leq f_s/2$ ist der Cosinus-Term nicht negativ. Für $b_0 > 0$ ist der Phasengang $\varphi(f) = -\pi \cdot f \cdot T_s$ und damit linear in der Frequenz f . Alle Frequenzkomponenten erleiden die gleiche Zeitverzögerung $\Delta = -\varphi(f)/(2\pi f) = T_s/2$.

Man kann zeigen, dass der Frequenzgang je nach Art der Koeffizientensymmetrie und je nachdem, ob die Filterordnung N gerade und ungerade ist, die in Tabelle 5-1. aufgeführten Restriktionen aufweist.

Typ	Symmetrie	Ordnung N	H(f=0)	H(f=f _s /2)
1	$b_n = b_{N-n}$	gerade	beliebig	beliebig
2	$b_n = b_{N-n}$	ungerade	beliebig	Nullstelle
3	$b_n = -b_{N-n}$	gerade	Nullstelle	Nullstelle
4	$b_n = -b_{N-n}$	ungerade	Nullstelle	beliebig

Tabelle 5-1: 4 Typen linearphasiger FIR-Filter und Restriktionen im Frequenzgang.

Mit einem FIR-Filter vom Typ 3 mit antisymmetrischen Filterkoeffizienten und gerader Filterordnung N kann man also nur Bandpässe realisieren, wegen den Nullstellen bei $f=0$ bzw. $f=f_s/2$ aber keine Tiefpässe, Hochpässe oder Bandsperren.

Beispiel (Fortsetzung)

Das oben betrachtete FIR-Filter ist vom Typ 2 und besitzt eine Nullstelle bei $f=f_s/2$, weil der Cosinus-Term in Gleichung (5.9) für $f=f_s/2$ Null wird.

5.4.2. Entwurf mit der Fenstermethode (Windowing)

Das Ziel von jedem Filterentwurf ist die Bestimmung der Filterkoeffizienten, so dass die resultierende Impulsantwort bzw. der resultierende Frequenzgang den gewünschten Verlauf aufweist.

Bei einem FIR-Filter stimmen die Filterkoeffizienten b_n aber direkt mit der Impulsantwort $h[n]$ überein. Es liegt deshalb nahe, FIR-Filter wie folgt zu entwerfen:

1. *Abtasten einer analogen (Referenz-) Stossantwort $h(t)$.*

Die resultierende, digitale Impulsantwort ist normalerweise unendlich lang, d.h.

$$h_d[n] = T_s \cdot h(t=nT_s), \quad -\infty \leq n \leq \infty. \quad (5.10)$$

Die Normierung mit T_s ist hier erforderlich, weil das Spektrum des abgetasteten Signals im Nyquistband mit dem Spektrum des analogen Signals übereinstimmen soll, Gleichung (2.5) aber einen Faktor $1/T_s$ beinhaltet.

2. *Ausschneiden des relevanten Anteils von $h_d[n]$, der einen grossen Anteil der Signalleistung enthält, bzw. Abschneiden der kleinen $h_d[n]$ -Werte.*

Wir betrachten hier nur FIR-Filter mit gerader Ordnung N bzw. ungerader Länge $N+1$. Die Fenstermethode kann aber auch für ungerade N modifiziert werden.

Für die abgeschnittene Impulsantwort $h_c[n]$ der Länge $N+1$ gilt:

$$h_c[n] = w[n] \cdot h_d[n], \quad -N/2 \leq n \leq N/2. \quad (5.11)$$

Die Fensterfunktion $w[n]$ weist nur für diskrete Zeitpunkte n im Bereich $-N/2 \leq n \leq N/2$ von Null verschiedene Werte auf. Der relevante Anteil von $h_d[n]$ kann mit einem rechteckigen Fenster $w[n]=1$, $-N/2 \leq n \leq N/2$, „hart“ oder mit verschiedenen auslaufenden Fenstern $w[n]$ „weich“ ausgeschnitten werden.

3. *FIR-Filter durch Zeitverschiebung der abgeschnittenen Impulsantwort kausal machen.*

Für die resultierende Impulsantwort bzw. die Filterkoeffizienten gilt

$$b_n = h[n] = h_c[n-N/2]. \quad (5.12)$$

Die FIR-Filterkoeffizienten sind symmetrisch oder anti-symmetrisch bezüglich $h[N/2]$, wenn die analoge Stossantwort $h(t)$ eine gerade oder eine ungerade Funktion ist und die Fensterfunktion $w[n]$ gerade ist.

Das Bestimmen der analogen Stossantwort $h(t)$ bzw. der gewünschten digitalen Impulsantwort $h_d[n]$ im 1. Schritt oben ist im Allgemeinen nicht einfach. Für gewisse Referenzfilter liegt $h(t)$ aber analytisch vor. Die mit f_s abgetastete und mit T_s normierte Stossantwort $h_d[n]$ eines idealen Tiefpasses mit der Grenzfrequenz f_{DB} ist z.B. gegeben durch

$$h_d[n] = \sin[n\pi \cdot f_{DB}/(f_s/2)] / (n\pi), \quad -\infty \leq n \leq \infty, \quad (5.13)$$

und weist einen $\sin(x)/x$ -förmigen Verlauf auf, der umso schneller abklingt, je breiter der Durchlassbereich ist. Mit Hilfe der Fenstermethode können nun ausgehend von Gleichung (5.13) beliebige, linearphasige FIR-Tiefpassfilter entworfen werden.

Beispiel:

In Abbildung 5-5 ist der Entwurf eines FIR-Tiefpassfilters der Ordnung $N=50$ mit der Grenzfrequenz $f_{DB} = 2$ kHz dargestellt, wobei die Abtastfrequenz $f_s = 8$ kHz ist.

Links oben sind die mit einem Rechteckfenster ausgeschnittenen $N+1=51$ Werte der Impulsantwort $h[n]$, $n=0, \dots, 50$, abgebildet. Sie sind symmetrisch zu $h[25]$ und klingen rasch ab.

Links unten ist der resultierende Amplitudengang im Frequenzbereich $[0, f_s/2]$ dargestellt. Er weist im Übergangsbereich ein grosses Überschwingen auf, das als Gibbs'sches Phänomen bezeichnet wird.

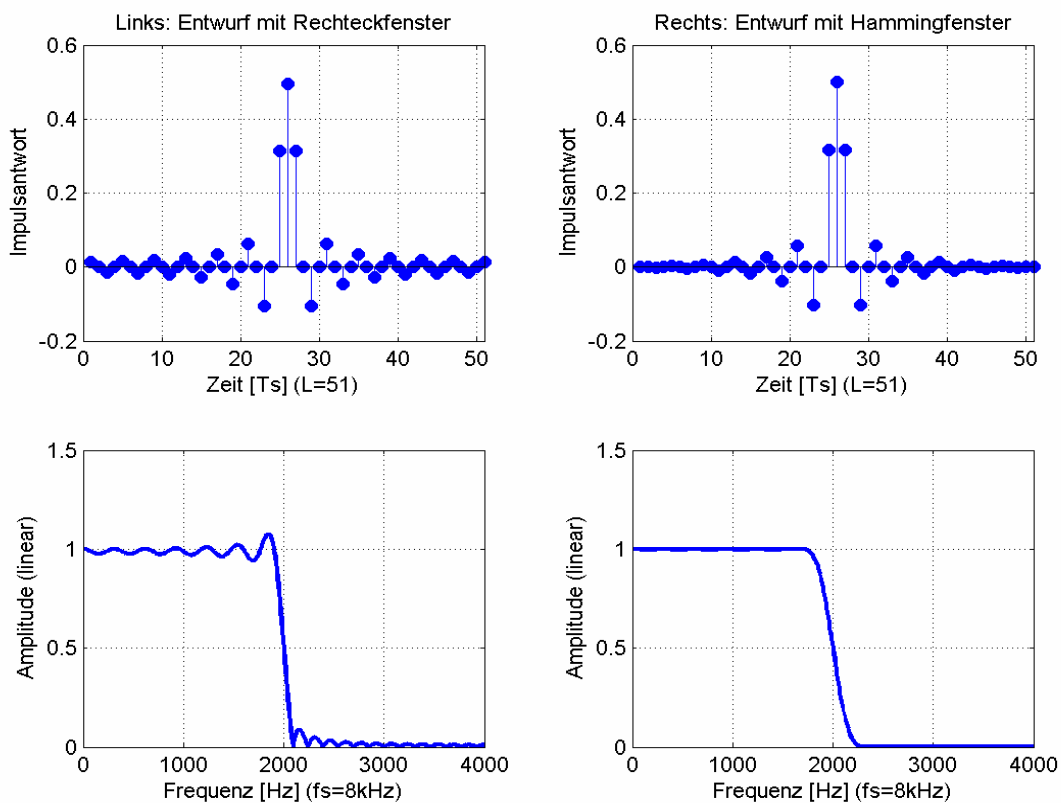


Abbildung 5-5: FIR-Filterentwurf mit der Fenstermethode.

Das Gibbs'sche Phänomen verschwindet nicht, selbst wenn die Filterlänge N viel grösser gemacht würde. Es entsteht wegen dem abrupten Abschneiden der Impulsantwort. Das erkennt man am einfachsten im Spektrum.

Die Multiplikation der Impulsantwort $h_d[n]$ mit dem Fenster $w[n]$ in Gleichung (5.11) ist äquivalent zur Faltung des (gewünschten) Frequenzgangs $H_d(f)$ mit der Fouriertransformierten $W(f)$ des Fensters. Das Spektrum $W(f)$ eines rechteckigen Fensters weist einen $\sin(x)/x$ -förmigen Verlauf auf. Faltet man nun $W(f)$ mit dem gewünschten rechteckigen Frequenzgang $H_d(f)$, so resultiert ein Überschwingen im Übergang zwischen Durchlass- und Sperrbereich.

Das Gibbs'sche Phänomen kann mit „weichem“ Abschneiden der Impulsantwort bzw. mit auslaufenden Fenstern $w[n]$ verringert werden. In Abbildung 5-6 sind 4 verschiedene, kausale Fenster mit 51 Abtastwerten dargestellt. Sie sind wie folgt definiert:

Rechteckfenster: $w[n] = 1, 0 \leq n \leq N$

Hamming-Fenster: $w[n] = 0.54 - 0.46 \cdot \cos(2\pi n/N), 0 \leq n \leq N$

Hanning-Fenster: $w[n] = 0.5 \cdot [1 - \cos(2\pi n/N)], 0 \leq n \leq N$

Blackmann-Fenster: $w[n] = 0.42 - 0.5 \cdot \cos(2\pi n/N) + 0.08 \cdot \cos(4\pi n/N), 0 \leq n \leq N$

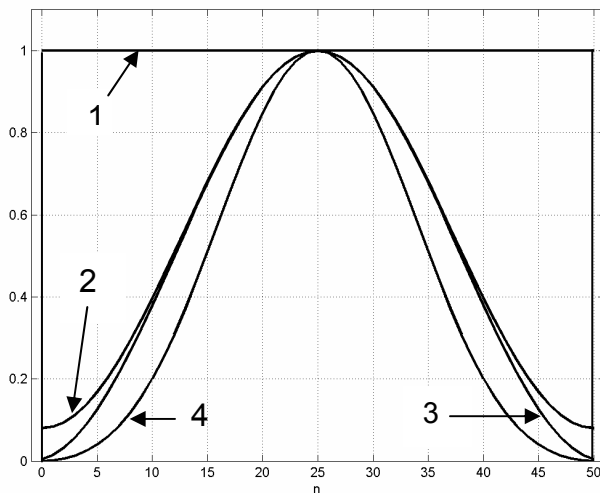


Abbildung 5-6: Rechteck- (1), Hamming- (2), Hanning- (3) und Blackman-Fenster (4).

Es gibt noch viele weitere Fensterfunktionen $w[n]$, siehe z.B. die Fensterfunktionen in der Matlab Signal Processing Toolbox, die mit dem Befehl `help signal` aufgelistet werden können.

Beispiel (Fortsetzung)

Rechts oben in Abbildung 5-5 sind die mit einem auslaufenden Hamming-Fenster ausgeschnittenen $N+1=51$ Werte der Impulsantwort $h[n]$, $n=0, \dots, 50$, abgebildet.

Rechts unten ist der resultierende Amplitudengang dargestellt. Das Überschwingen ist dank dem weichen Abschneiden verschwunden und die Dämpfung im Sperrbereich ist deutlich grösser geworden, allerdings auf Kosten der Filtersteilheit.

In Abbildung 5-7 sind die Betragsspektren $|W(f)|$ der in Abbildung 5-6 abgebildeten Fenster der Länge 51 abgebildet. Der Parameter A bezeichnet das dB-Grössenverhältnis zwischen der „Hauptkeule“ und der grössten „Nebenkeule“. Wenn man die oben erwähnte Faltung ausführt, sieht man, dass die Sperrbereichsdämpfung des resultierenden FIR-Filters umso grösser ist, je kleiner A ist. In Abbildung 5-7 schneidet das Rechteckfenster in dieser Hinsicht schlechter ab als das Hamming-Fenster.

In Abbildung 5-7 ist auch die Breite Δf der „Hauptkeule“ in Funktion der Abtastfrequenz f_s und der Filterlänge $L=N+1$ dargestellt. Wenn man die oben erwähnte Faltung ausführt, sieht man, dass die Filtersteilheit umso grösser ist, je kleiner Δf bzw. schmaler die „Hauptkeule“ ist. In Abbildung 5-7 schneidet das Rechteckfenster in dieser Hinsicht besser ab als das Hamming-Fenster.

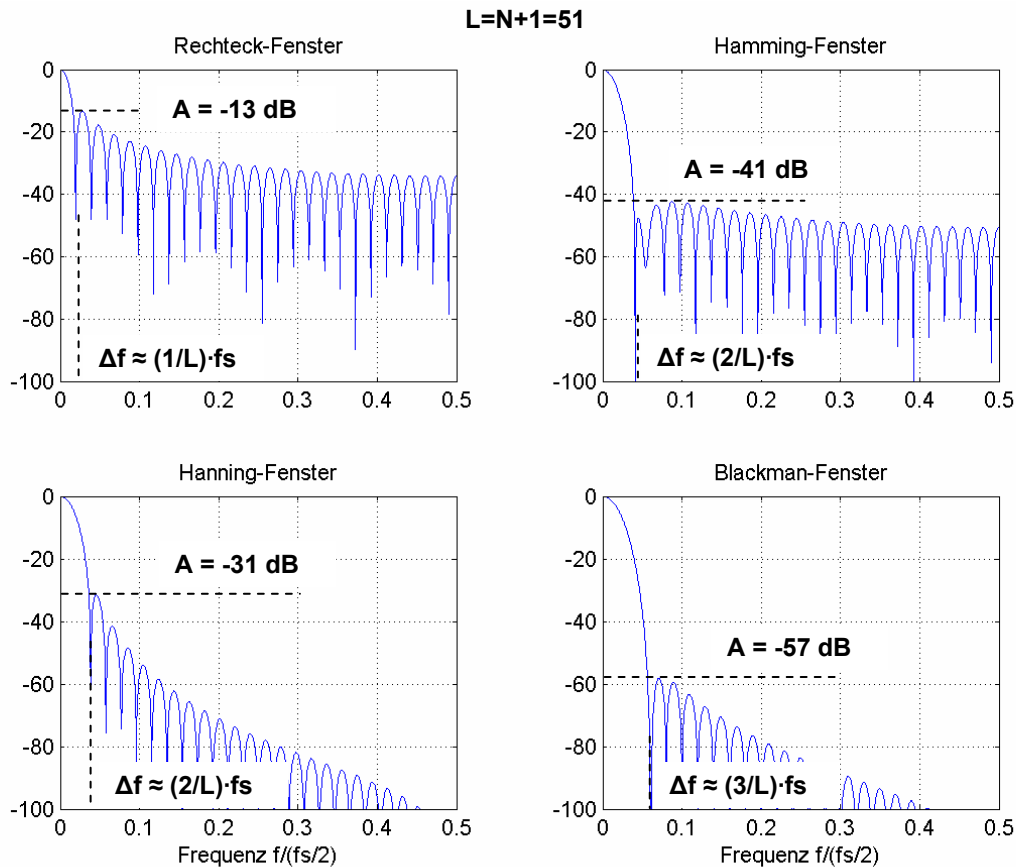


Abbildung 5-7: Betragsspektren einiger Fenster der Länge $L=N+1=51$.

Mit Gleichung (5.13) lassen sich nur Tiefpass-Filter realisieren. Es stellt sich nun die Frage, wie die anderen Filtertypen realisiert werden können. Zu diesem Zweck sucht man Tiefpass-Bandpass, Bandpass-Bandsperr und Tiefpass-Hochpass-Transformationen, die die lineare Phase erhalten.

Tiefpass-Bandpass-Transformation

Mit Hilfe der Frequenzverschiebungseigenschaft der Fouriertransformation (siehe Anhang zu Kapitel 2) kann man zeigen, dass die beiden folgenden Transformationen einen Tiefpass mit der Grenzfrequenz f_{DB} in einen Bandpass mit der Mittenfrequenz f_0 und der unteren bzw. der oberen Grenzfrequenz $f_0 \pm f_{DB}$ transformieren.

$$\begin{aligned} \text{Typ 1 und 2: } b_{BP}[n] &= 2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot nT_s) \cdot b_{TP}[n] \\ \text{Typ 3 und 4: } b_{BP}[n] &= 2 \cdot \sin(\omega_0 \cdot nT_s) \cdot b_{TP}[n] \end{aligned} \quad (5.14)$$

Tiefpass-Hochpass-Transformation

Wenn man in (5.14) $f_0=f_s/2$ setzt, erhält man die Tiefpass-Hochpass-Transformation

$$b_{HP}[n] = (-1)^n \cdot b_{TP}[n]. \quad (5.15)$$

Bandpass-Bandsperre-Transformation

Bandsperren können als Komplementärfilter zu einem Bandpassfilter realisiert werden, d.h.

$$\begin{aligned} H_{BS}(z) + H_{BP}(z) &= z^{-N/2} \\ b_{BS}[n] &= \delta[n - N/2] - b_{BP}[n] \end{aligned} \quad (5.16)$$

Die Fenstermethode zum Entwurf von FIR-Filtern kann vollständig mit Computerunterstützung vorgenommen werden, siehe z.B. die Funktion `fir1()` in der Matlab Signal Processing Toolbox.

Beispiel

Mit dem Matlab-Befehl `b=fir1(50,0.5,rectwin(51))`; kann man ein FIR-TP-Filter der Ordnung $N=50$ mit der Fenstermethode entwerfen, wobei ein Rechteckfenster der Länge 51 verwendet wird (Default ist das Hamming-Fenster).

Mit dem Matlab-Befehl `b=fir1(9,0.5,'high')` wird mit der Fenstermethode ein FIR-HP-Filter der Ordnung $N=10$ generiert, weil kein entsprechendes Filter mit der Ordnung $N=9$ existiert, siehe Tabelle 5-1.

5.4.3. Fensterentwurf spezieller FIR-Filter (fakultativ)

Bis jetzt sind wir immer von der Impulsantwort des Referenz-TP-Filters in Gleichung (5.13) ausgegangen. Es gibt aber noch andere, interessante Referenz-Filter. Drei davon sollen hier kurz vorgestellt werden.

Die mit f_s abgetastete und mit T_s normierte Stossantwort $h_d[n]$ eines idealen Differentiators $H_a(f) = j2\pi f$ ist gegeben durch

$$h_d[n] = \cos(n\pi)/n - \sin(n\pi)/(n^2\pi), \quad -\infty \leq n \leq \infty, \quad (5.17)$$

wobei $h_d[0] = 0$ ist. Die gewünschte Impulsantwort $h_d[n]$ ist eine ungerade Funktion bzw. besitzt antisymmetrische Werte bezüglich des Nullpunkts. Mit Windowing resultiert also ein linearphasiges FIR-Filter mit frequenzunabhängiger Gruppenlaufzeit.

Beispiel

In Abbildung 5-8 sind die antisymmetrische Impulsantwort und der Amplitudengang eines FIR-Differentiators 10. Ordnung dargestellt, der mit Gleichung (5.17) und einem Hamming-Fenster entworfen worden ist.

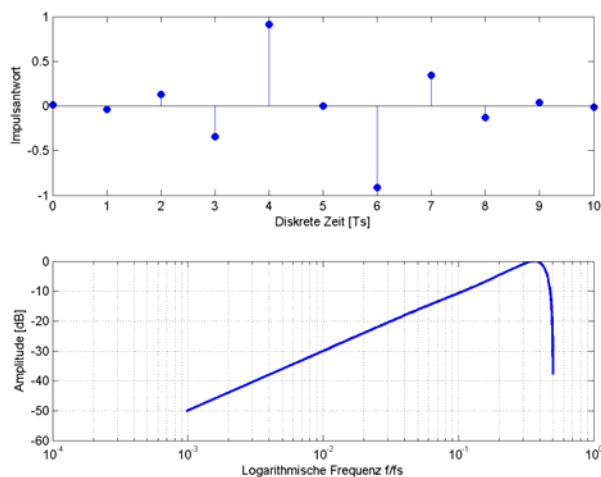


Abbildung 5-8: Impulsantwort und Amplitudengang eines FIR-Differentiators.

Bei der Differentiation hat man oft das Problem, dass man das höherfrequente Rauschen ungewollt verstärkt. Man kann nun linearphasige FIR-Filter entwerfen, die die tieferen Frequenzen differenzieren, die höheren Frequenzen aber gleichzeitig unterdrücken (TP-Filterung), siehe z.B. Matlab Filter Design Tool `fdatool`.

In der Nachrichtentechnik werden breitbandige 90^0 -Phasenschieber bzw. Hilbert-Filter mit dem folgenden Frequenzgang eingesetzt,

$$H_d(f) = \begin{cases} j & -f_s/2 \leq f \leq 0 \\ -j & 0 < f \leq f_s/2 \end{cases} \quad (5.18)$$

Die mit f_s abgetastete und mit T_s normierte Impulsantwort $h_d[n]$ des idealen Hilbert-Filters ist gegeben durch

$$h_d[n] = [1 - \cos(n\pi)] / n\pi, \quad -\infty \leq n \leq \infty, \quad (5.19)$$

wobei $h_d[0] = 0$ ist. Die gewünschte Impulsantwort $h_d[n]$ ist eine ungerade Funktion bzw. besitzt antisymmetrische Werte bezüglich des Nullpunkts.

Beispiel

In Abbildung 5-9 sind der Amplitudengang und der Phasengang eines FIR-Hilbert-Filters 10. Ordnung dargestellt, das mit Gleichung (5.19) und einem Rechteckfenster entworfen worden ist.

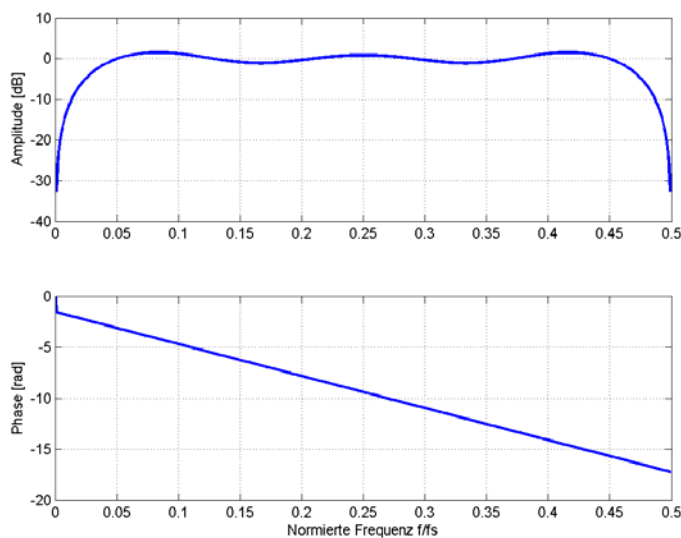


Abbildung 5-9: Frequenzgang eines FIR-Hilbert-Filters.

Der Amplitudengang ist für fast alle Frequenzen in der 1. Nyquistzone ein Allpass. Der Allpass-Charakter und das leichte Überschwingen könnten mit einer grösseren Filterordnung N und einem auslaufenden Fenster noch weiter optimiert werden.

Der Phasengang weist bei $f=0$ wie gewünscht einen Phasensprung auf $-\pi/2$ auf. Danach fällt er aber wegen der Zeitverschiebung im 3. Schritt der Fenstermethode linear ab. Es resultiert ein breitbandiger 90^0 -Phasenschieber mit einer „kleinen“ Zeitverzögerung.

In der Signalübertragung werden oft raised-cosine-Pulse eingesetzt. Mit dem Matlab-Befehl `b = firrcos(N,R/2,roll,fs,'rolloff')`; kann man linearphasige raised-cosine-FIR-Filter der Ordnung N mit TP-Spektren entwerfen, die einen sinusförmigen Übergangsbereich $R/2 \cdot (1 \pm r)$ aufweisen, wobei R die Datenrate und r der sogenannte Rolloff-Faktor bezeichnen. Per Default verwendet `firrcos()` ein Rechteckfenster.

Beispiel:

In Abbildung 5-10 sind die symmetrische Impulsantwort und der Amplitudengang eines Raised-Cosine-FIR-Filters 20. Ordnung dargestellt, wobei die Datenrate $R=2$ kb/s, der Rolloff-Faktor $r=0.5$ und die Abtastfrequenz $f_s=8$ kHz gewählt worden sind.

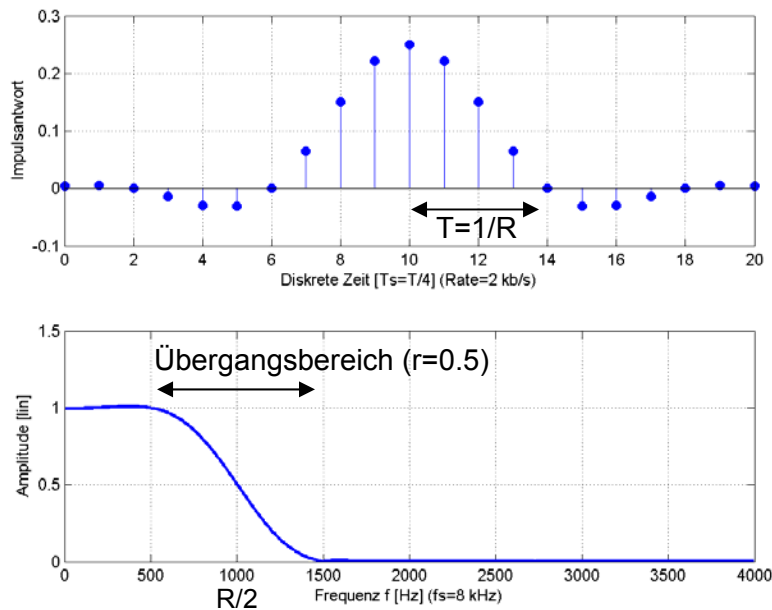


Abbildung 5-10: Raised-Cosine FIR-Filter.

5.4.4. Entwurf mit Frequenzabtastung (Frequency Sampling)

Bei dieser Entwurfsmethode werden $N+1$ äquidistante Abtastpunkte des gewünschten Frequenzgangs $H(f)$ vorgegeben. Mit Hilfe der inversen diskreten Fouriertransformation IDFT bzw. IFFT kann dann die Impulsantwort $h[n]$, $n=0, \dots, N$, des FIR-Filters bestimmt werden. Der Frequenzgang des FIR-Filters hält die Vorgabepunkte natürlich genau ein, dazwischen kann es aber „Überschwinger“ geben, vor allem im Übergang zwischen dem Durchlass- und dem Sperrbereich.

Mit dem Frequenzabtastverfahren können auch „beliebig“ komplexe Impulsantworten $h_d[n]$ generiert und als Input für die Fenstermethode verwendet werden.

5.4.5. Entwurf im z-Bereich

Es gibt einige iterative Optimierungsverfahren, die nur noch mit Computerunterstützung durchgeführt werden können.

Am bekanntesten ist wohl der Remez-Algorithmus von Parks-McClellan. Dieser Algorithmus minimiert die maximale Abweichung zwischen dem Amplitudengang des Filters und der Vorgabe (gegeben in Form eines [Multiband] Stempel-Matrizen-Schemas). Die resultierenden FIR-Filter weisen gleichmäßige Rippel im Durchlass- und im Sperrbereich auf. Sie werden deshalb auch Equiripple FIR-Filter genannt. Bei gegebener minimaler Sperrbereichsdämpfung ist die Filterordnung kleiner als bei allen anderen FIR-Filter-Entwurfsmethoden. Die betreffende Funktion in der Matlab Signal Processing Toolbox heisst `remez()`.

Andere Optimierungsverfahren minimieren die mittlere quadratische Abweichung zwischen dem Amplitudengang des Filters und der Vorgabe, siehe z.B. die Funktion `firls()` in der Matlab Signal Processing Toolbox.

5.5. IIR-Filter

5.5.1. Entwurf mit analogen Prototyp-Filtern

Die Approximation von idealen „Rechteck“-Filtern ist im Analogen auf verschiedene Arten gelöst worden, die alle in irgendeiner Form optimal sind. Von diesen Methoden will und kann man auch im Digitalen profitieren.

Beim klassischen IIR-Filterentwurf geht man deshalb von einem analogen Prototyp-TP-Filter aus, nimmt allenfalls eine TP - HP / BP / BS Transformation vor und transformiert dann das resultierende Filter ins Digitale. Die am häufigsten eingesetzte analog-digital- bzw. sz-Transformation ist die bilineare Transformation.

In Abbildung 5-11 sind die Amplitudengänge von vier IIR-Filtern 4. Ordnung dargestellt, die mit Hilfe von verschiedenen Prototyp-Filtern entworfen worden sind und folgende Anforderungen erfüllen:

- Abtastfrequenz $f_s = 8192$ Hz
- Durchlassbereich mit $f_{DB} = 1$ kHz, $A_{max} = R_p = 1$ dB (Butterworth-Filter 3 dB)
- Sperrbereich mit $A_{min} = R_s = 30$ dB

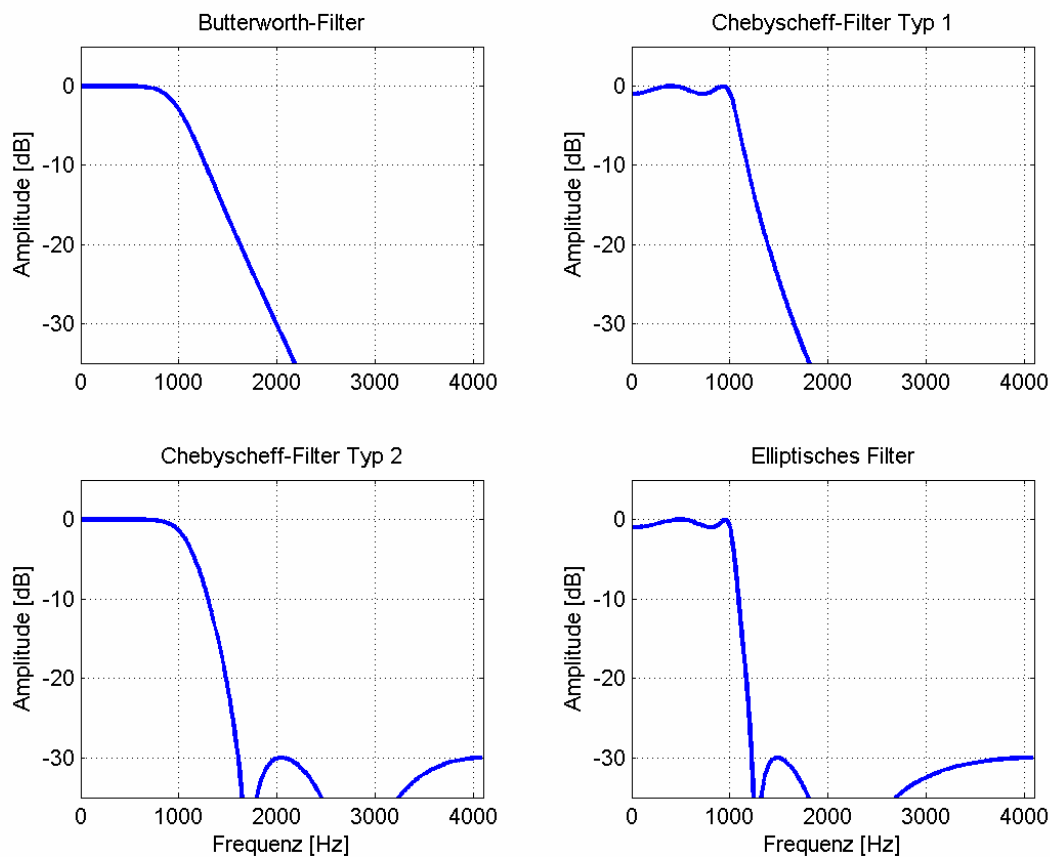


Abbildung 5-11: Amplitudengang von analogen Prototyp-Filtern.

Das elliptische Filter (Cauer-Filter) ist am steilsten und approximiert den idealen Tiefpass am besten. Es weist aber gleichmässige Rippel im Durchlass- und im Sperrbereich auf. Letztere sind das Resultat von Nullstellen der Übertragungsfunktion $H(z)$ auf dem Einheitskreis.

In Tabelle 5-2 sind wichtige Eigenschaften der analogen Prototyp-Filter zusammengefasst:

	Butterworth-Filter	Chebyscheff Filter, Typ 1	Chebyscheff Filter, Typ 2	Elliptisches Filter	Bessel-Filter
Durchlassbereich	monoton	Rippel	monoton	Rippel	monoton
Sperrbereich	monoton	monoton	Rippel	Rippel	monoton
Steilheit	klein	mittel	mittel	gross	sehr klein
Linearität $\varphi(f)$	gross	mittel	mittel	klein	sehr gross

Tabelle 5-2: Wichtige Eigenschaften der analogen Prototyp-Filter.

Es besteht die Konvention, auch bei BP- und BS-Filtern mit der Filterordnung die Ordnung des Prototyp-TP-Filters zu bezeichnen. Bei der TP-BP / BS Transformation wird allerdings die „eigentliche“ Ordnung verdoppelt. Ein BP-Filter N-ter Ordnung besitzt deshalb $2N+1$ Koeffizienten im Nenner der UTF.

Bilineare Transformation

Ziel der bilinearen Transformation ist es, die eigentliche sz-Transformation $z=e^{sT_s}$ so zu approximieren, dass eine realisierbare bzw. rational gebrochene Übertragungsfunktion $H(z)$ resultiert. Dazu entwickelt man die e-Funktion in eine Reihe und approximiert sie wie folgt:

$$z = e^{sT_s} = \frac{e^{sT_s/2}}{e^{-sT_s/2}} \approx \frac{1+sT_s/2}{1-sT_s/2} \quad (5.20)$$

Durch Auflösen der Gleichung (5.20) nach s erhält man die sz-Transformation

$$s = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1}. \quad (5.21)$$

Diese Transformation wird *bilineare* Transformation genannt, weil Zähler und Nenner im obigen Ausdruck je lineare Funktionen sind. Die Transformation selbst ist nicht linear.

Die Eigenschaften der bilinearen Transformation erkennt man, wenn man die Frequenz-Transformation analysiert, d.h. $s=j2\pi f_{\text{analog}}$ und $z=\exp(j2\pi f_{\text{digital}}T_s)$ in Gleichung (5.21) einsetzt. Dann folgt

$$j2\pi f_{\text{analog}} = j \frac{2}{T_s} \cdot \tan(\pi f_{\text{digital}} T_s). \quad (5.22)$$

Die resultierende Frequenztransformation ist in Abbildung 5-12 dargestellt. Die ganze analoge Frequenzachse wird nur einmal in die 1. Nyquist-Zone $-f_s/2 \leq f \leq f_s/2$ abgebildet.

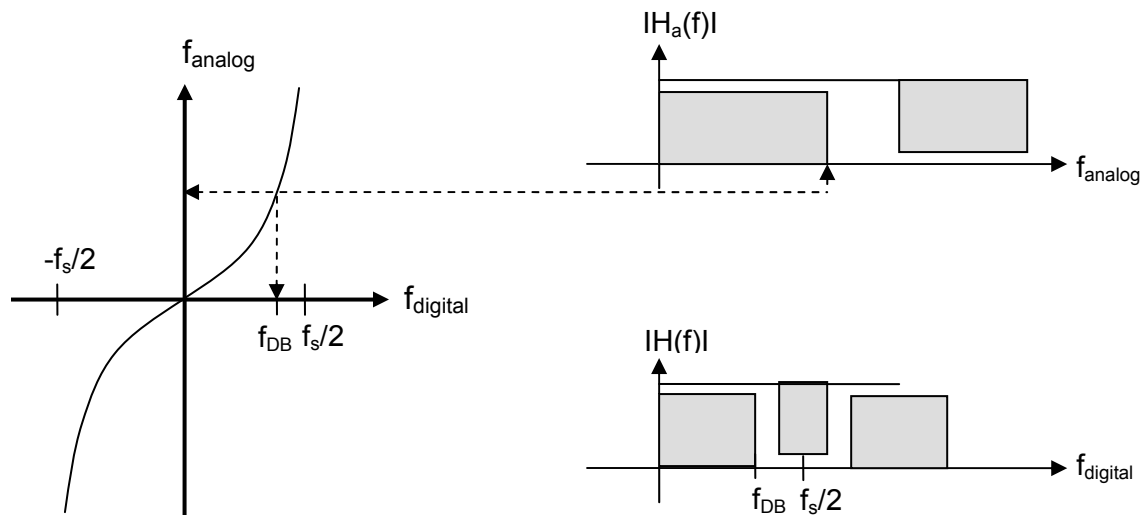


Abbildung 5-12: Bilineare Frequenztransformation.

Bei der bilinearen Transformation entsteht kein Aliasing, dafür eine Frequenzstauchung. Die Eckfrequenzen des Durchlass- und des Sperrbereichs des analogen Prototyp-Filters müssen deshalb gemäss Gleichung (5.22) vorverzerrt werden. Diese Vorverzerrung wird im Englischen *prewarping* genannt.

Bilinear transformierte IIR-Filter können vollständig mit Computerunterstützung entworfen werden, siehe z.B. die Funktion `bilinear()` in der Matlab Signal Processing Toolbox.

Matlab-Beispiele

In der Matlab Signal Processing Toolbox stehen komplette Entwurfsversionen bereit, die alle die bilineare Transformation enthalten. Alle Eckfrequenzen müssen auf $f_s/2$ normiert werden! Auch das GUI `fdatool` steht zur Verfügung.

Wenn N die Filterordnung, f_{DB} die 3dB-Eckfrequenz des Durchlassbereichs und f_s die Abtastfrequenz bezeichnen, können die Koeffizienten des entsprechenden Butterworth-TP- bzw. -HP-Filters einfach mit

$$\begin{aligned} [b, a] &= \text{butter}(N, f_{\text{DB}} / (f_s / 2)); \\ \text{bzw. mit } [b, a] &= \text{butter}(N, f_{\text{DB}} / (f_s / 2), 'high'); \end{aligned}$$

bestimmt werden. Die Entwurfsversionen für die anderen, oben erwähnten Standard-Prototypen lauten `ellip()`, `cheby1()` und `cheby2()`. Digitale Besselfilter müssen mit Hilfe von Teilfunktionen entworfen werden.

Matlab und viele Bücher arbeiten mit der normierten Kreisfrequenz Ω im Ausdruck

$$z = e^{j\Omega} = e^{j2\pi f T_s} \quad (5.23)$$

Die Umformung

$$\Omega = \frac{\pi f}{f_s / 2} \quad (5.24)$$

verdeutlicht, dass Ω im Bereich $[0, \pi]$ liegt, wenn f im Bereich $[0, f_s/2]$ variiert wird. Sehr nützlich sind auch die Funktionen zur Ermittlung der minimalen Filterordnung N , die zur Realisierung der Filterspezifikation $\{f_{\text{DB}}, f_{\text{SB}}, R_p, R_s\}$ erforderlich ist. Die minimale Ordnung eines Butterworth-Filters kann z.B. mit


```
[N, Wn] = buttord(fDB/(fs/2), fSB/(fs/2), Rp, Rs);
```

bestimmt werden. Die anderen Funktionen zur Ermittlung der minimalen Filterordnung lauten `ellipord()`, `cheb1ord()` und `cheb2ord()`.

5.5.2. Direkter Entwurf im Diskreten

IIR-Filter können mit CAD-Unterstützung auch direkt im Diskreten entworfen werden.

Mit den Algorithmen von Fletcher-Powell und Yule-Walker können die Filterkoeffizienten einer Übertragungsfunktion $H(z)$ so optimiert bzw. variiert werden, dass der resultierende Amplitudengang mit einer Vorgabe möglichst gut übereinstimmt (least-square Verfahren).

In Abbildung 5-13 ist der Amplitudengang eines Yule-Walker-Filters 10. Ordnung sowie die Vorgabe dargestellt.

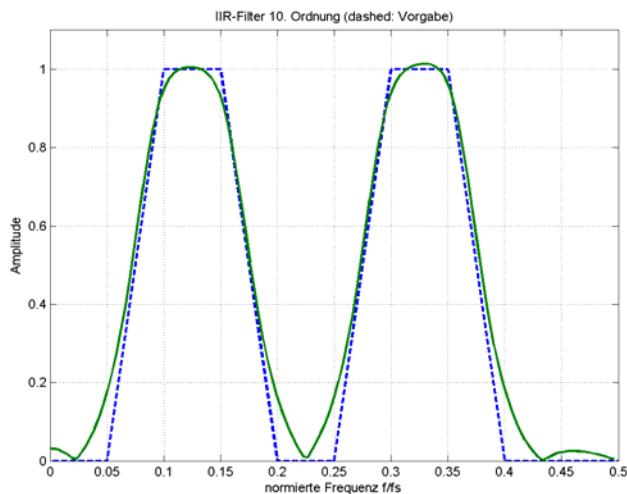


Abbildung 5-13: Amplitudengang eines Yule-Walker-IIR-Filters.

Mit dem direkten Entwurf im z -Bereich können auch nicht-standard-Filtertypen wie z.B. Multi-band-Filter realisiert werden, siehe Abbildung 5-13.

Die entsprechende Funktion in der Matlab Signal Processing Toolbox lautet `yulewalk()`.