Titel: Stabilität
Titel-Kürzel: STAB

Autor: Lekkas Georgios, lks
Koautor: Wild Jürg, wil

Version: 21. November 2003

# 2.15

## Stabilität

## linearer zeitinvarianter Systeme

# 2.15Stabilität linearer zeitinvarianter Systeme

## ÜBERSICHT

**INHALT (Was)**

- Der Begriff der Stabilität
- Methoden für die Beurteilung der Stabilität

**MOTIVATION (Warum)**

Technische Systeme sind brauchbar, wenn sie sich vernünftig verhalten, d.h. wenn sie das tun, was wir von ihnen erwarten. Z.B. erwarten wir von einem Auto, das mit ABS (Antiblockier-Brems-System) ausgerüstet ist, auch auf einer glatten Strasse kein Blockieren der Räder, wenn wir aufs Bremspedal drücken.

Die Stabilitätseigenschaften eines Systems sind für sein dynamisches Verhalten verantwortlich.
Man kann es so hart formulieren wie es in Wirklichkeit auch ist:
***ein instabiles System ist unbrauchbar.***

Nebenbei: Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht, denn für ein brauchbares System setzen wir nicht nur Stabilität, sondern ***schöne Stabilität*** voraus, doch das ist eine andere Geschichte.

**VORKENNTNISSE**

- Begriff des dynamischen, zeitinvarianten Systems
- Begriffe: Stossantwort, Sprungantwort (Schrittantwort)
- Folgende Beschreibungsarten dynamischer Systeme werden als bekannt vorausgesetzt:
  - Differentialgleichung
  - Übertragungsfunktion
  - Bode- und Nyquistdiagramm
  - Grundkenntnisse der Laplacetransformation

**ZIEL**

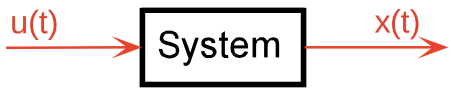
Verfahren kennen lernen, mit deren Hilfe die Stabilität eines Systems, das durch eine der erwähnten Beschreibungsarten gegeben ist, beurteilt werden kann.

Einen „Stabilitätsblick“ entwickeln !

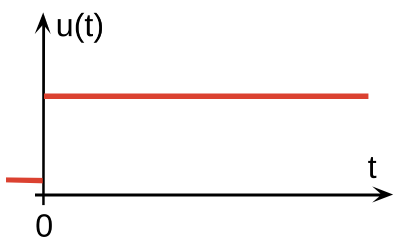
Instabile Systeme sind unbrauchbar !

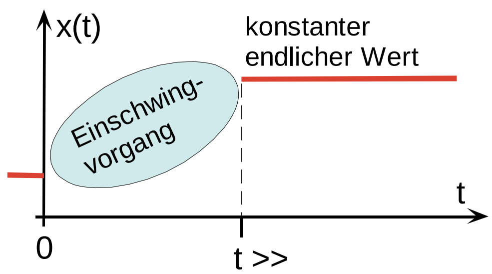
## Definition der Stabilität:

Gegeben sei ein System in der Input/Output-Darstellung :




Wir erwarten von diesem System, dass nach einer Verstellung des Steuersignals u(t) von einem alten auf einen neuen konstanten Wert, sein Ausgangssignal x(t) mit zunehmender Zeit einen neuen festen, endlichen Wert annimmt.




Dieses Verhalten nennen wir BIBO-Stabilität (Bounded Input Bounded Output).

Daraus kann gefolgert werden:

*A) Ein lineares zeitinvariantes Übertragungssystem ist stabil, wenn seine Sprungantwort h(t) mit wachsendem t einem endlichen, konstanten Wert zustrebt:*

$$\lim_{t \to \infty} h(t) = K \qquad K < \infty$$

*Oder als Folgerung aus A)*

*B) Ein lineares zeitinvariantes Übertragungssystem ist stabil, wenn seine Stossantwort g(t) abklingt, d.h.*

$$\lim_{t \to \infty} g(t) = 0$$

*Ein System ist instabil, falls eine der aufgeführten Bedingungen verletzt wird.*

# Beurteilung der Stabilität eines Systems anhand seiner Differentialgleichung:

Das Vorgehen wird anhand eines Beispieles aufgezeigt.

**Gegeben** sei ein lineares Übertragungsglied durch seine DGlg. :

$$\ddot{x} - \dot{x} - 2x = u(t)$$
$$AB: \quad x(0) = \ldots \quad \dot{x}(0) = \ldots.$$

$\Leftrightarrow$


**Gesucht:** Eine Aussage über die Stabilitätseigenschaften dieses Systems.

Wir untersuchen die BIBO-Stabilität anhand der Sprungantwort: Daher wird als Anregungsfunktion der Einheitssprung σ(t) verwendet und die Frage gestellt:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) \overset{?}{=} endlich\,(konstatnt)$$

Wir lösen die Differentialgleichung für u(t) = $U_0$ σ(t) ($U_0$ = 1 : Einheitssprungfunktion) und erhalten für die Sprungantwort des Systems:

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}$$

Mit den Konstanten:

$$C_1 = \frac{1}{3}(x(0) + \dot{x}(0) + \frac{1}{2})$$

$$C_2 = \frac{1}{3}(2x(0) - \dot{x}(0) + 1)$$

Wir testen die Stabilität nach A): $\lim_{t \to \infty} x(t) \to \infty$

D. h. für das endliche Eingangssignal u(t) = $U_0$ σ(t) wird der Systemausgang unendlich,

$\Rightarrow$ **System instabil**

Beachte:
Die Exponenten in der Exponentialfunktion sind bereits als Lösung der charakteristischen Gleichung erkennbar, damit auch das Zeitverhalten der Exponentialfunktionen.

Ansatz für die Lösung der homogenen Differentialgleichung: $x_h(t) = e^{st}$

$\Rightarrow$ $\dot{x}_h(t) = s\,e^{st}$ und $\ddot{x}_h(t) = s^2\, e^{st}$

Einsetzen in die homogene DGlg. ergibt: $s^2\, e^{st} - s\, e^{st} - 2\, e^{st} = 0$

$\Rightarrow$ die charakteristische Gleichung: $s^2 - s - 2 = 0$ mit den Lösungen $s_1$ und $s_2$ und damit: $x_h(t) = C_1\, e^{s_1 t} + C_2\, e^{s_2 t}$

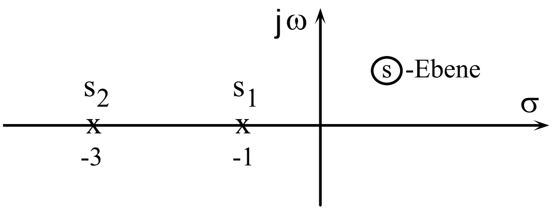
$s_1 = 2$ liegt in der rechten Halbebene (RHE) $\Rightarrow$ instabil (anwachsende Exponentialfunktion)
$s_2 = -1$ liegt in der linken Halbebene (LHE) $\Rightarrow$ stabile Komponente.

| | |
|---|---|
| ***SATZ 1*** | *Ein lineares, zeitinvariantes System ist stabil, falls alle Nullstellen seiner charakteristischen Gleichung einen negativen Realteil besitzen, d. h. in der linken Hälfte der komplexen s-Ebene liegen.* |

**Beispiele:** Man untersuche die Stabilitätseigenschaft folgender Systeme:

① System-DGlg. : $3\ddot{x} + 12\dot{x} + 9x = u(t)$

$\Rightarrow$ char. Glg.: $3(s^2 + 4s + 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad s_1 = -1 \quad und \quad s_2 = -3$




Lösungen in der LHE $\Rightarrow$ System stabil

② System-DGlg. : $\tau\,\dot{x} - 2x = u(t) \quad \tau > 0$

③ System-DGlg. : $2\ddot{x} + 8\dot{x} + 26x = 0$

# Beurteilung der Stabilität eines Systems anhand seiner Übertragungsfunktion

Zunächst wird mit Hilfe eines Beispieles gezeigt, dass die charakteristische Gleichung eines linearen dynamischen Systems, dem Nennerpolynom seiner Übertragungsfunktion entspricht. Danach kann sinngemäss der SATZ 1 auf die Übertragungsfunktion eines Systems angewandt werden.

Beispiel:

Ein lineares dynamisches System sei durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$a_2\,\ddot{x} + a_1\,\dot{x} + a_0\,x = u(t)$$
$$AB: \quad x(0) = .. \quad \dot{x}(0) = ..$$

$\Leftrightarrow$


(4.1)

- Mit dem Ansatz: $x_h(t) \;=\; e^{st}$ für die Lösung der homogenen DGlg. ergibt sich folgende charakteristische Gleichung: $$a_2\,s^2 + a_1\,s + a_0 = 0 \qquad (4.2)$$
- Andererseits können wir mit Hilfe der Laplace-Transformation der System-DGlg. die Übertragungsfunktion des Systems bestimmen. Für $x(0) = \dot{x}(0) := 0$ , gemäss Voraussetzung für die Übertragungsfunktion, erhalten wir: $$a_2\,s^2\,X(s) + a_1\,s\,X(s) + a_0\,X(S) \;=\; U(s)$$ $$\Rightarrow \quad G(s) \;=\; \frac{X(s)}{U(s)} \;=\; \frac{1}{a_2\,s^2 + a_1\,s + a_0} \qquad (4.3)$$

Es ist offensichtlich, dass der Nenner der ÜF  (4.3)  und die charakteristische Gleichung  (4.2) identisch sind.

END;  {Beispiel}

Wir können nun verallgemeinern:

| Nullstellen der charakteristischen Gleichung | $\Leftrightarrow$ | Nullstellen des Nennerpolynoms der ÜF = Pole der ÜF |
| --- | --- | --- |
| | $\Leftrightarrow$ | Eigenwerte der Systemmatrix A bei Zustandsraumdarstellung |

Damit kann die Stabilitätsaussage, die sich auf die Nullstellen der charakteristischen Gleichung bezieht, auch für die Pole der Übertragungsfunktion übernommen werden.

**SATZ 2** *Ein lineares zeitinvariantes System ist stabil, falls alle Pole seiner Übertragungsfunktion G(s) einen negativen Realteil besitzen, d. h. in der linken Hälfte der komplexen s-Ebene liegen.*

*Ist ein System in der Zustandsraumdarstellung* $S\left\{A, \underline{b}, \underline{c}^T, d\right\}$ *gegeben, so gilt: Ein lineares zeitinvariantes System ist stabil, falls alle Eigenwerte seiner Systemmatrix A einen negativen Realteil besitzen, d. h. in der linken Hälfte der komplexen s-Ebene liegen.*

## Beispiele:

Man beurteile die Stabilität folgender Systeme, die durch ihre Übertragungsfunktion gegeben sind:

① $$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{2s^2 + 3s + 6} \quad \Leftrightarrow \quad U(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow X(s)$$

② $$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{4s^2 + 5s - 8}$$

③ $$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{5s^2 + 6s + s}$$

④ $$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s-3)}$$

⑤ $$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{3s - 5}{s^2 + 12s + 27}$$

⑥ $$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^3 + 6s^2 - 17s + 45}$$

⑦ $$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{s+18}{s^3 + 5s^2 + 6s + 127}$$

⑧ $$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{s-15}{6s^4 + 3s^3 + 15s + 48}$$

END; {Beispiele}

Zusammenhang zwischen den Polen von G(s) und den Eigenwerten der Systemmatrix A :

Beispiel : $\xrightarrow{u} \boxed{S\{A, \underline{b}, \underline{c}^T, d\}} \xrightarrow{y}$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{c}^T = [0,\ 1] \qquad d = 0$$

i) Eigenwerte von A

$$|\lambda I - A| = 0 \text{ setzen}$$

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 \\ -2 & \lambda+5 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| := (\lambda+1)(\lambda+5) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -5$$

ii) Pole von $G(s) = Y(s)/U(s)$

$$G(s) = \underline{c}^T (sI-A)^{-1} \underline{b} + d$$

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -2 & s+5 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{|sI-A|} \begin{bmatrix} s+5 & 0 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}^T (sI-A)^{-1} = \frac{[0,\ 1]}{|sI-A|} \begin{bmatrix} s+5 & 0 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{|sI-A|} [2\ ,\ s+1]$$

$$\underline{c}^T (sI-A)^{-1} \underline{b} = \frac{[2\ ,\ s+1]}{|sI-A|} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{|sI-A|}$$

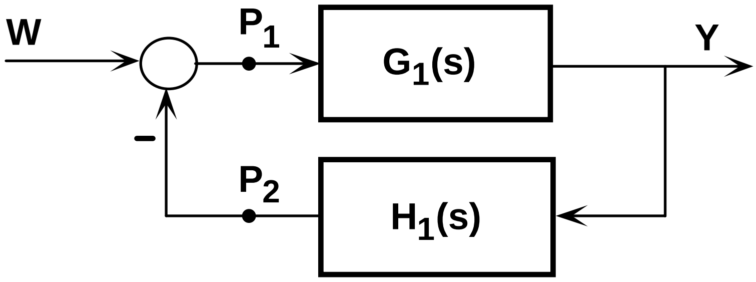
$$\Rightarrow G(s) = \frac{2}{|sI-A|} = \frac{2}{(s+1)(s+5)}$$

Eigenwerte von A $\Longleftrightarrow$ Pole von G(s)

# Rückgekoppelte Systeme
# Begriffe des offenen und geschlossenen Kreises

Für den Entwurf von rückgekoppelten Systemen, sowie für die Untersuchung ihrer Stabilitätseigenschaften spielen die Begriffe des **offenen** und des **geschlossenen** Kreises eine zentrale Rolle. Wir definieren daher diese zwei Begriffe nochmals, anhand der Grundstruktur eines rückgekoppelten Systems:

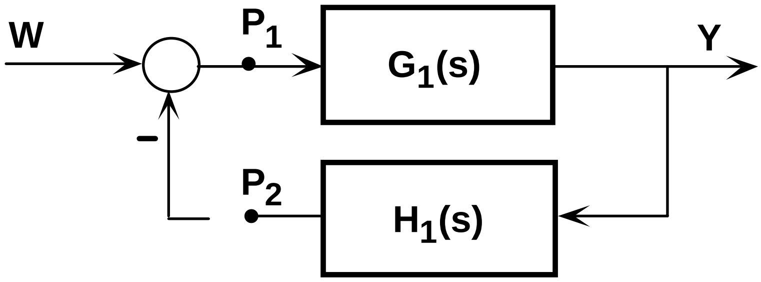
(A) **Geschlossener Kreis** (closed loop)




Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises :

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)H_1(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_o(s)}}$$

(B) **Offener Kreis** (open loop), entsteht aus dem geschlossenen Kreis durch Auftrennung des Signalpfades im Punkte P2:




Übertragungsfunktion der Schleife von P1 nach P2 : $\boxed{G_o(s) = \frac{P_2(s)}{P_1(s)} = G_1(s)H_1(s)}$

Das Produkt $G_o(s) = G_1(s)\,H_1(s)$ ,
welches auch im Nenner von G(s) auftritt, bezeichnet man als die Übertragungsfunktion des **offenen** (oder aufgeschnittenen) Kreises; auch Open Loop Transferfunction genannt.
Weiterer Name: Schleifen-Übertragungsfunktion.

# Beurteilung der Stabilität eines rückgekoppelten Systems anhand der ÜF des offenen Kreises

## Das Nyquist-Kriterium

Das Nyquist-Kriterium lässt vom Verlauf der Ortskurve des offenen Kreises $G_o(j\omega)$ auf das Verhalten des geschlossenen Kreises schliessen.
Wir gehen also vom Frequenzgang des offenen Kreises aus, der in der allgemeinen Form durch den folgenden Ausdruck beschrieben wird (oder eben aus Messungen vorliegt):

$$G_o(j\omega) = K \frac{1}{(j\omega\tau)^{\alpha}} \frac{(1+j\omega\tau_{Z1})(1+j\omega\tau_{Z2})\ldots}{(1+j\omega\tau_{N1})(1+j\omega\tau_{N2})\ldots} e^{-j\omega T_t} = \frac{Z_o(j\omega)}{N_o(j\omega)} e^{-j\omega T_t}$$

Das vereinfachte Nyquist-Kriterium gilt unter den **Voraussetzungen**:

a) Grad des Zählers < Grad den Nenners
b) Der offene Kreis ist stabil oder zeigt I- bzw. $I^2$ -Verhalten (d.h. $\alpha = 0, 1, 2$ ist zulässig)
c) $K > 0$, $T_t \geq 0$

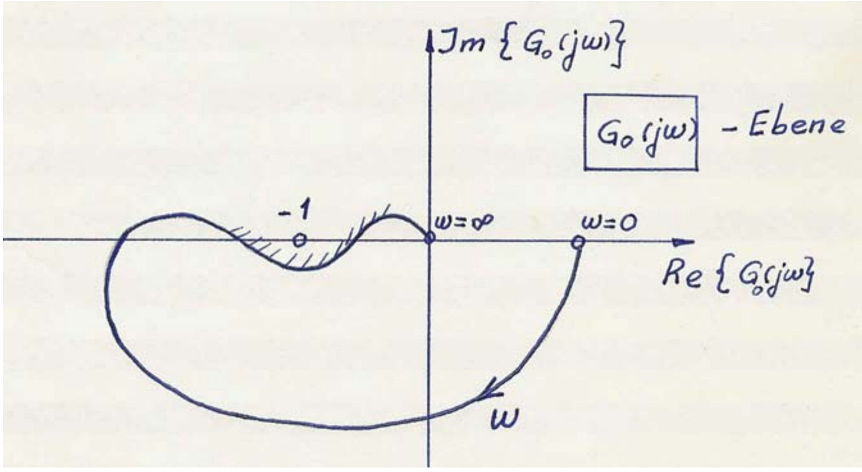
Bemerkung: Ist der offene Kreis instabil, so ist das verallgemeinerte Nyquist-Kriterium verwenden.

**Das vereinfachte Nyquist-Kriterium lautet:**

*Ein geschlossener Regelkreis ist dann stabil, wenn die Ortskurve $G_o(j\omega)$ des offenen Kreises (bei zunehmendem $\omega$) den Punkt -1 weder durchdringt noch umschliesst.*

*Man pflegt auch zu sagen:*
*Wenn die Ortskurve $G_o(j\omega)$ den Punkt -1 (bei zunehmendem $\omega$) links liegen lässt.*

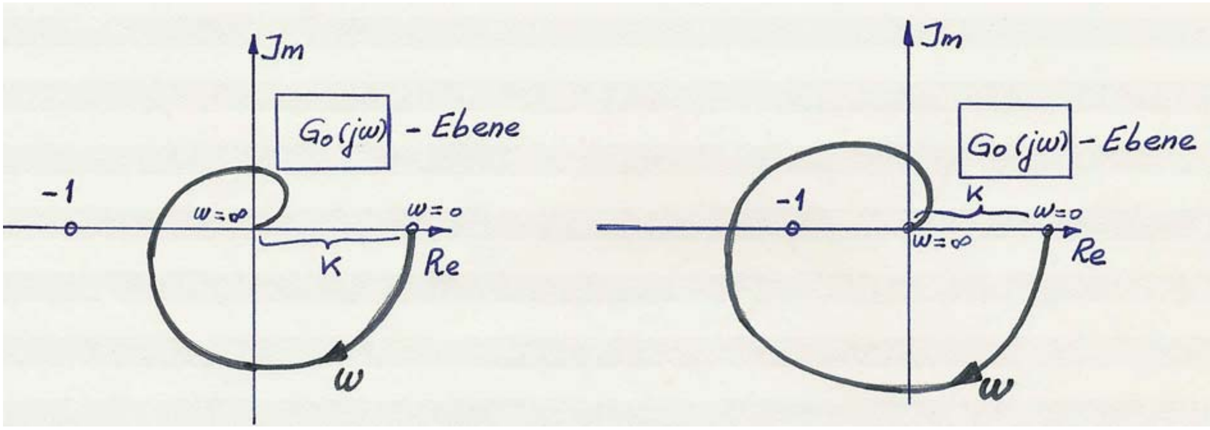
Darstellung zu der Ausdrucksweise „links liegen lässt“ [O. Föllinger, „Regelungstechnik“]:



Beispiel ① $\alpha = 0$ (kein I-Verhalten des offenen Kreises)

Ortskurve des **offenen** Kreises

Fall i) Fall ii)



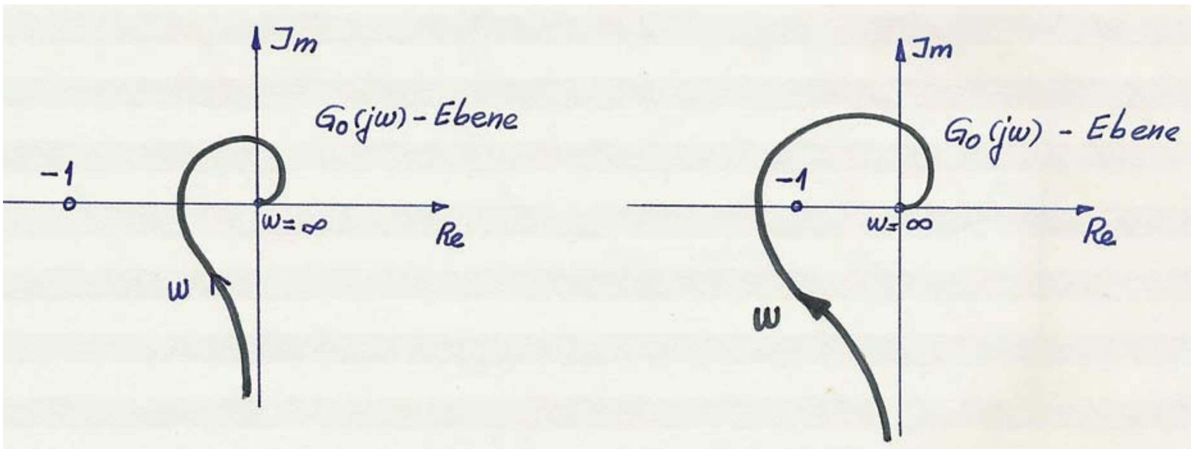

⇒ Geschlossener Kreis: **STABIL** **INSTABIL**

---

Beispiel ② $\alpha = 1$ (Integralverhalten des offenen Kreises)

Ortskurve des **offenen** Kreises

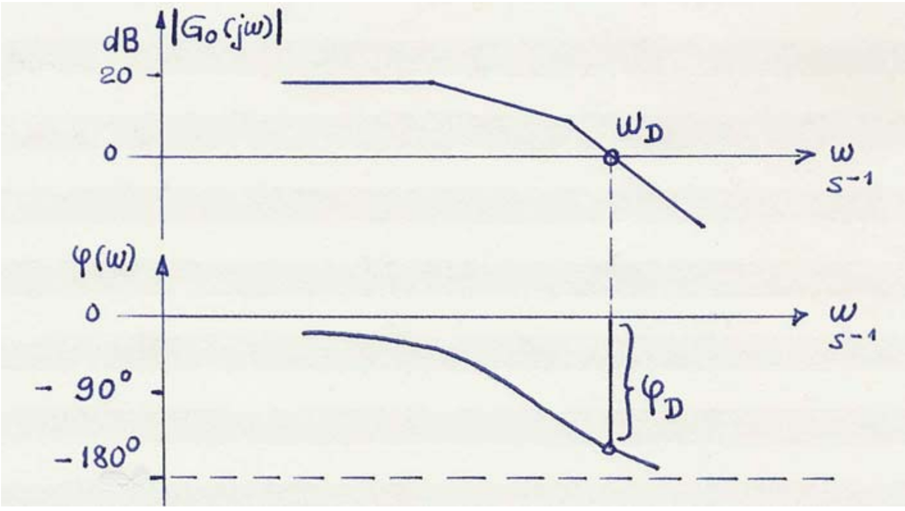
Fall i) Fall ii)




⇒ Geschlossener Kreis: **STABIL** **INSTABIL**

# Das Bode-Kriterium

Die Übertragung des Nyquist-Kriteriums aus der Ortskurve in das Bode-Diagramm kann unmittelbar aus dem vorangehenden Bild entnommen werden und ergibt das Stabilitätskriterium nach Bode.
Auch das Bode-Kriterium erlaubt auf Grund der Übertragungsfunktion des offenen Kreises $G_o(j\omega)$ die Stabilität des geschlossenen Kreises zu beurteilen.

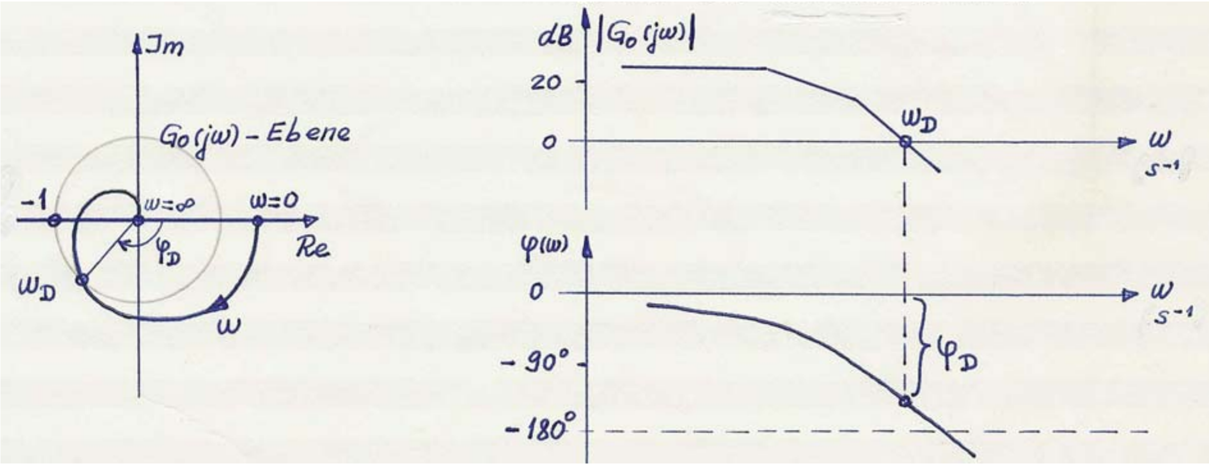



Die Kreisfrequenz $\omega_D$ wird als Durchtrittsfrequenz bezeichnet und ist der Wert, bei dem der Amplitudengang $|G_O(j\omega)|$ des offenen Kreises fallend durch die 0-dB-Linie geht.

**Das Stabilitätskriterium nach Bode besagt nun:**

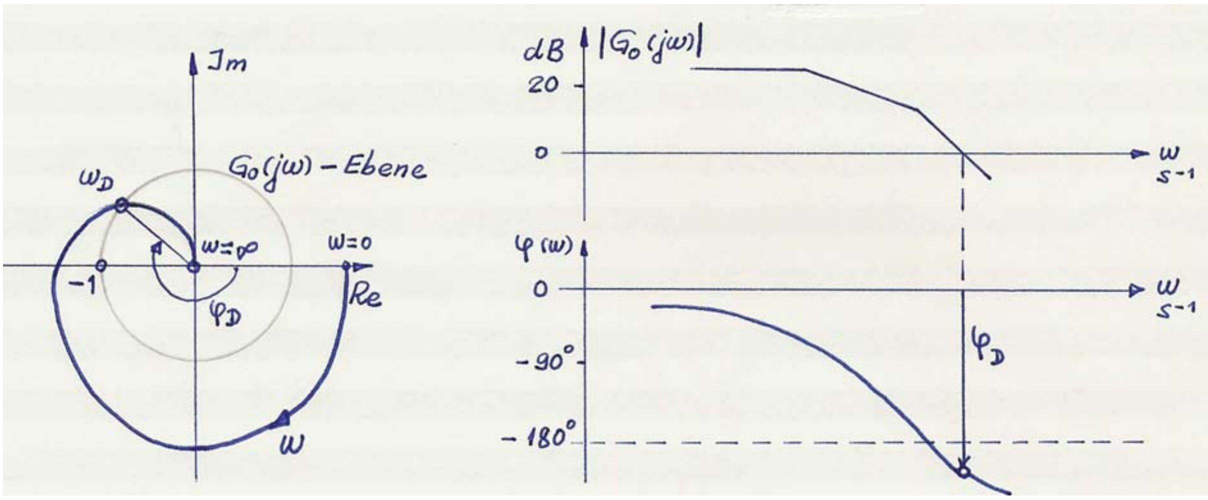
*Der geschlossene Regelkreis ist dann stabil, wenn bei der Durchtrittsfrequenz $\omega_D$ der Phasengang des offenen Kreises oberhalb von -180 $^o$ verläuft.*

Beispiel ③ Ortskurve und Bodediagramm des **offenen** Kreises




⟹ Geschlossener Kreis: **STABIL**

Beispiel ④ Ortskurve und Bodediagramm des **offenen** Kreises

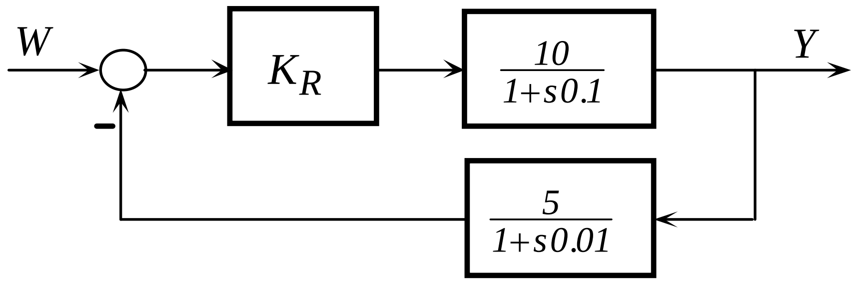



⟹ Geschlossener Kreis: **INSTABIL**

**Aufgaben** zur Untersuchung der Stabilität nach dem Bode-Kriterium:

Gegeben seien folgende rückgekoppelte Systeme:

①




Wie gross darf $K_R$ werden, damit der geschlossene Kreis stabil bleibt?

② Wie Aufgabe 1, jedoch ist $K_R$ zu ersetzen durch $K_R/s$

# Stabilität abgetasteter Systeme

Ein kurzer Einblick in das Thema Stabilität eines abgetasteten Systems, das durch seine z-Übertragungsfunktion gegeben ist, wie z.B. bei digitalen Filtern.

Die z-ÜF eines Abtastsystems sei: $$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B(z)}{z^2 + a_1 z + a_0}$$

Die Ordnung des Zählerpolynoms B(z) sei $m \leq 2$

Die Stabilitätsforderung lautet:

***Die Pole von G(z) müssen innerhalb des Einheitskreises in der z-Ebene liegen.***

Daraus können Bedingungen für die Koeffizienten $a_o$ und $a_1$ hergeleitet werden.
Nebenbei: Diese Bedingungen sind nicht gleich einfach zu finden wie bei kontinuierlichen Systemen in der s-Ebene.

Für abgetastete Systeme kann der Jury-Stabilitäts-Test mit Hilfe der Jury-Tabelle durchgeführt werden. Der Test führt zu folgenden Bedingungen für $a_o$ und $a_1$:

i) $|a_0| < 1$
ii) $|a_1| < 1 + a_0$

Man schraffiere in der ($a_o$ , $a_1$) – Ebene das zulässige Koeffizienten-Gebiet für Stabilität des Systems 2. Ordnung. Das Ergebnis hat allgemeinen Charakter für Systeme 2. Ordnung.

(aus rtue_9_06.doc)

**Lösung:**

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B(z)}{z^2 + a_1\, z + a_0}$$

I. $\quad |a_0| < 1$

**i)** $\quad a_o > o \;\Rightarrow\; |a_o| = a_o \;\Rightarrow\; \boxed{a_o < 1}$

**ii)** $\quad a_o < o \;\Rightarrow\; |a_o| = -\, a_o \;\Rightarrow\; -a_o < 1 \;\Rightarrow\; \boxed{a_o > -1}$

II. $\quad |a_1| < 1 + a_0$

**i)** $\quad a_1 > 0 \;\Rightarrow\; |a_1| = a_1 \;\Rightarrow\; \boxed{a_1 < 1 + a_o}$

**ii)** $\quad a_1 < 0 \;\Rightarrow\; |a_1| = -\, a_1 \;\Rightarrow\; -a_1 < 1 + a_0 \;\Rightarrow\; \boxed{a_1 > -1 - a_0}$