Titel: Laplace-Transformation
Titel-Kürzel: LAP

Autor: Wild Jürg, wil
Koautor: Gysel Ulrich, gys

Version: 12. März 2004

4 Laplace-Transformation

Lernziele:
- Wozu brauche ich die Laplace-Transformation?
- Wie kann ich die Suche nach der Lösung einer Differentialgleichung vereinfachen?
- Welche Schritte sind zur Lösung mittels Laplace-Transformation nötig?
- Faltung vs. Laplace-Transformation

Vorraussetzungen:
- Das Vorgehen zur Lösung von Differentialgleichungen im Zeitbereich ist bekannt
- Das Aufteilen der zeitlichen Lösungsfunktion in Teilfunktionen ist bekannt
- Mathematische Modelle in Form von Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung
- Partialbruchzerlegung für einfache und mehrfache reelle und komplexe Nullstellen

4.1 Einstieg, Definitionen

Die Beschreibung komplexer Systeme durch Differentialgleichungen und deren Lösungen wird sehr umständlich, deshalb sucht man nach einer Möglichkeit, den Differentialbeziehungen auszuweichen und diese zu algebraisieren. Die **Laplace-Transformation** ermöglicht diese Integraltransformation mit Berücksichtigung der Anfangsbedingungen auf ideale Weise.
Wir werden die *Theorie* der Laplace-Transformation relativ kurz behandeln und werden uns hier hauptsächlich auf die *Anwendung* beschränken.

Die Lösung der DGl. mittels Laplace-Transformation erfolgt dabei über einen **Umweg** aus dem *Zeitbereich* (Originalbereich, Oberbereich als f(t)) in den *Laplace-Bereich* (Bildbereich, Unterbereich als f(s)) und wieder zurück.

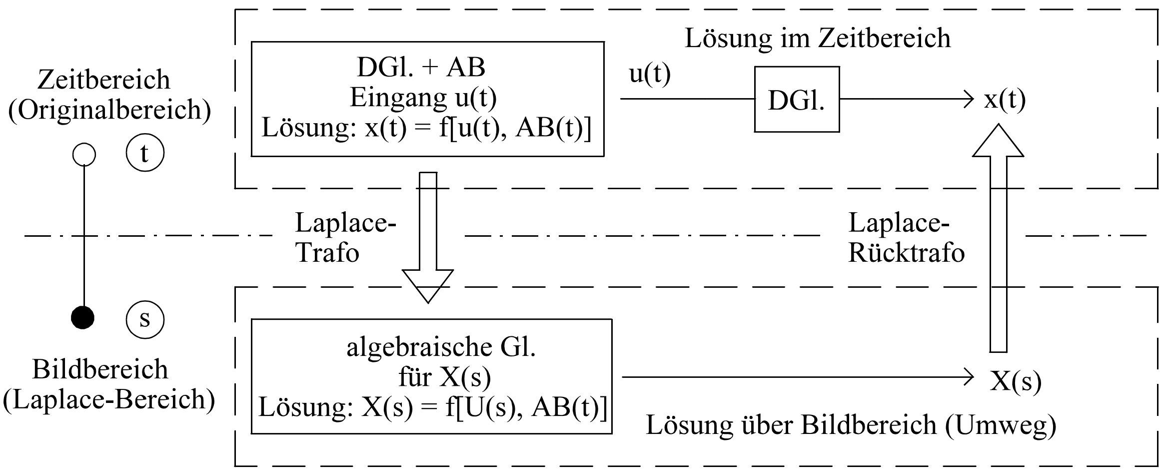

Abb. 1

Dabei werden **lineare DGl.** in **algebraische Gleichungen** übergeführt. Die Schwierigkeit wird dabei hauptsächlich auf die *Rücktransformation* vom Laplace- in den Zeitbereich verschoben, doch stehen viele Tabellen der Laplace-Transformationen (Korrespondenz-Tabellen) für diesen Fall zur Verfügung, es muss also keine Rücktransformationsformel gelöst werden.
Um auf die in den Tabellen standardisierten Terme zu gelangen, bedient man sich meist der **Partialbruchzerlegung**.

Definition des **Laplace-Operators s**:

$s = \sigma + j\cdot\omega$ ist eine komplexe Variable. $[s] = s^{-1}$

Achtung: erstes "s": Name der Variablen
zweites "s": sec

Hinweis für Elektroingenieure:
Die *komplexe Wechselstromtheorie* wird hier als Spezialfall der Laplace-Theorie betrachtet:
Es wird dort aus der gesamten s-Ebene nur die positive imaginäre Achse betrachtet:
Realteil $\sigma = 0 \rightarrow$ s auf imaginärer Achse als $s = j\cdot\omega$, Anwendungsbeispiel Induktivität: $X_L = j\cdot\omega\cdot L$
Die KWST gilt nur für den **stationären**, eingeschwungenen Fall und harmonische Grössen.
s mit $\sigma \neq 0$ (Laplace) dagegen berücksichtigt auch den **transienten** Fall bei beliebigem Eingang.

Transformationsformel:

$$\boxed{F(s) = \int_0^\infty f(t)\cdot e^{-s\cdot t}\cdot dt}$$

f(t): Originalfunktion

F(s): Bildfunktion

Diese Zuordnung von F(s) zu f(t) ist eine Abbildung oder Transformation:
die *Laplace-Transformation*.

F(s) ist als *Laplace-Transformierte* (oder *Laplace-Integral*) von f(t) eine Funktion von s.
Voraussetzung: alle Zeitfunktionen f(t) für $t < 0$ sind 0.
Die Transformation ist *einseitig* (one-sided) definiert: nur Werte zwischen 0 und $+\infty$ werden berücksichtigt.

Die Laplace-Transformation gilt nur für *lineare Systeme*!

Einheiten: Die Einheiten der Variablen f(t) werden im Laplace-Bereich mit s (sec) multipliziert (s. Definition):

[F(s)] = [f(t)].sec

Beispiel: i(t) ○——● I(s)
[A] [A.s]

Laplace-*Rück*transformations-Formel

$$\boxed{f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot j}\cdot\int_{\sigma-j\cdot\infty}^{\sigma+j\cdot\infty} F(s)\cdot e^{s\cdot t}\cdot ds}$$

Mögliche Darstellungsarten der *Korrespondenzen*:

$F(s)$ ●——○ $f(t)$ ● : schwarz
→ "schwer"
$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ → **Unter**bereich,
Bildbereich

Rücktrafo: $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$

Die Laplace-Transformation gilt auch für *vektorielle Grössen und Matrizen* (elementenweise Transformation):

$$\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_3(t) & f_4(t) \end{vmatrix} \quad ○——● \quad \begin{vmatrix} F_1(s) & F_2(s) \\ F_3(s) & F_4(s) \end{vmatrix}$$

4.2 Rechenregeln der Laplace-Transformation

Die Rechenregeln der Laplace-Transformation können z.B. in jedem Regelungstechnikbuch nachgeschlagen werden, z.B. O. Föllinger, "Regelungstechnik" oder F.Kolb / O.Künzel. Es gibt aber auch Formelsammlungen, die Laplace enthalten, z.B. Papula.

Die wichtigsten Regeln (oder Sätze) für unsere Bedürfnisse (ohne Beweise):

Linearitätsregel: $c \cdot f(t)$ ○——● $c \cdot F(s)$

Wird die Originalfunktion mit einer Konstanten c (die nicht reell zu sein braucht) multipliziert, so ist auch die Bildfunktion mit c zu multiplizieren.

$f_1(t) \pm f_2(t)$ ○——● $F_1(s) \pm F_2(s)$

Addition von Originalfunktionen entspricht Addition der Bildfunktionen

Integrationsregel: $\int_0^t f(\alpha) \cdot d\alpha$ ○——● $\frac{1}{s} \cdot F(s)$

Die ("technische") Integration von 0 bis zur laufenden Zeit t (mit der Integrationsvariablen α) entspricht in der Bildfunktion einer Division durch s.

Differentiationsregel:
(mit Anfangsbedingungen)

$f'(t)$ ○——● $s \cdot F(s) - f(+0)$

$f''(t)$ ○——● $s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(+0) - f'(+0)$

$f^{(n)}(t)$ ○——● $s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(+0) - s^{n-2} \cdot f'(+0) - \ldots - f^{(n-1)}(+0)$

Die Differentiation im Zeitbereich entspricht im Bildbereich prinzipiell einer Multiplikation mit s^n, wobei die Potenz n der Ordnung der Ableitung entspricht. Hier werden nun aber auch die mathematischen Anfangsbedingungen (deren Anzahl wieder der Ordnung der vorliegenden Ableitung entspricht) problemlos in die Transformation eingefügt.

Daneben existieren z.B. Ähnlichkeitsregel und Verschiebungsregel

Anfangswertsatz: Für $f(t)|_{t \to +0}$ gilt: $\lim f(+0) = [s \cdot F(s)]|_{s = \infty}$

Endwertsatz: Für $f(t)|_{t \to +\infty}$ gilt: $\lim f(+\infty) = [s \cdot F(s)]|_{s = 0}$

Wenn F(s) bekannt ist, kann man damit den Wert der Funktion f(t) bei t = +0 und t = +∞ ermitteln, ohne dass man die Funktion f(t) selbst zu kennen braucht.

Aufgabe: gegeben: $f(t) = 0$ für $t \leq 0$; $f(t) = e^{\alpha . t}$ für $t > 0$; gesucht: F(s)
wann konvergiert das Integral? Vergleichen Sie Ihre Lösung mit einer Laplace-Tabelle.

⌐
Lösung:

Nach Laplace-Formel:

α sei hier reell (ist aber nicht erforderlich), wobei:

$$\alpha - s = \alpha - (\sigma + j \cdot \omega) = (\alpha - \sigma) - j \cdot \omega \quad \to \quad e^{(\alpha - s) \cdot t} = e^{(\alpha - \sigma) \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t}$$

$\sigma = \mathrm{Re}(s)$; falls $\sigma > \alpha$, wird $e^{(\alpha - \sigma) \cdot t}|_{t \to \infty} = 0$; für solche s konvergiert das Laplace-Integral und wird: $\frac{1}{\alpha - s} \cdot (-1) = \frac{1}{s - \alpha} \quad \to \quad \boldsymbol{f(t)} = \boldsymbol{e^{\alpha \cdot t}} \circ\!-\!-\bullet \ \boldsymbol{F(s)} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{s - \alpha}}$

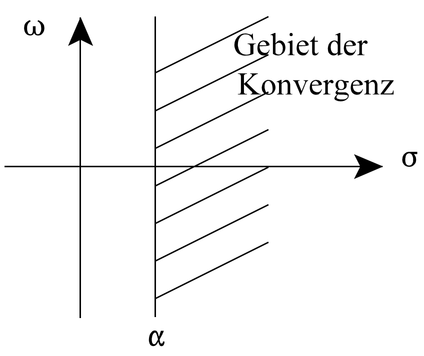

Abb. 2

diese Korrespondenz finden wir in den Tabellen ✓.

Für $\sigma < \alpha$ wird $e^{(\alpha - \sigma) \cdot t}|_{t \to \infty} = \infty$,
das Laplace-Integral konvergiert *nicht*.

Allg.: Nur solche Funktionen f(t) besitzen eine Laplace-Transformierte F(s), für welche das Laplace-Integral konvergiert. ┘

Für die **Laplace-Rücktransformation** wird nun kaum die Laplace-Rücktransformationsformel angewendet, da die vorkommende Integration nicht einfach durchführbar ist, sondern man bedient sich üblicherweise der sogenannten **Korrespondenz-Tabellen**, also bereits vorgerechneter Rücktransformationen für bestimmte Terme. Die sich bei der Berechnung im Laplace-Bereich ergebenden rationalen Ausdrücke (Bruchdarstellung) lassen sich durch Partialbruchzerlegung in solche Terme zerlegen, deren Rücktransformation in den Tabellen bereits berechnet wurden. Es geht also bei der Rücktransformation darum, geeignete (in den Tabellen vorkommende) Terme zu suchen.
Von der Modellierung her wissen wir, dass sich jedes System höherer Ordnung durch Linear-Kombinationen von Teilsystemen 1. und 2. Ordnung darstellen lässt. Umgekehrt muss also jedes System in solche Systeme 1. und 2. Ordnung zerlegbar sein, das Hilfsmittel zu einer solchen Zerlegung ist die **Partialbruchzerlegung**.
Grundsätzlich würde es also genügen, die Korrespondenz zu kennen für ein System 1. Ordnung und die 3 Korrespondenzen für das System 2. Ordnung mit d >,=,< 1 (Basis-Rücktransformationen). Freundlicherweise haben jedoch die "Berechner" der Korrespondenz-Tabellen aber auch zusätzlich schon Kombinationen (häufig auftretende Terme höherer Ordnung) berücksichtigt, sodass nicht jedesmal unbedingt zuerst eine Partialbruchzerlegung gemacht werden muss. Man klärt also zuerst ab, ob für das vorliegende Problem bereits eine Vorlage vorhanden ist. Die Additionen, die sich zwischen den Partialbruchtermen ergeben, werden auch in der Rücktransformation erhalten bleiben, da es sich per definitionem um lineare Systeme handelt.

Diese für die **Rücktransformation** notwendigen üblichsten Korrespondenzen können z.B. den schon angesprochenen Regelungstechnik-Büchern oder z.B. der Formelsammlung Papula entnommen werden. Dabei ist zu beachten, dass die in unserem Kurs verwendete "angelsächsische" Definition des Laplace-Operators s in der deutschen Literatur vielfach auch mit p bezeichnet wird.
(Papula verwendet bereits "s"). Es sind verschiedene kompatible Darstellungsarten üblich:

Papula verwendet die Darstellung mit z.B. $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s}-\mathbf{a}}$ ●–○ $e^{a.t}$ (System 1. Ordnung)

Die Laplace-Tabelle aus "Di Stefano, Regelsysteme III" befasst sich vor allem auch mit **Systemen 2. Ordnung, deren Dämpfungsmass d < 1** ist. Da diese "schwingenden" Systeme in der Praxis oft vorkommen, wird diese Tabelle dafür auch vorwiegend verwendet.

Di Stefano verwendet die Darstellung mit z.B. $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s}+\mathbf{a}}$ ●–○ $e^{-a.t}$ (System 1. Ordnung)

Noch andere Tabellen verwenden die Form

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{s}} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{a}} \quad ●–○ \quad \frac{1}{a}\cdot e^{-t/a} \qquad \text{(System 1. Ordnung)}$$

Vor der Verwendung einer der Tabellen sind also die Terme auf die verwendete Form zu bringen.
Der Platzhalter **a** hat für jede Form eine **andere Bedeutung**!

Statt der Tabellen können auch Taschenrechner (z.B. HP oder TI) verwendet werden, die Laplace-Transformationen vornehmen können.

Aus den Tabellen können auch die Korrespondenzen von einfachen Stimuli entnommen werden:

Bildfunktion F(s)	Originalfunktion f(t)	
1	δ(t)	Dirac-Stoss (unit impulse)
$\frac{1}{s}$	σ(t) = 1(t)	Einheits-Sprungfunktion (unit step)
$\frac{1}{s^2}$	t	Einheits-Rampe (unit ramp)

Den Sprung erhält man durch Integration des Stosses, die Rampe durch Integration des Sprunges, etc. Die Integration drückt sich im Laplace-Bereich bekanntlich durch eine Division mit s aus, was in obiger Tabelle bestätigt wird.

Systeme 2. Ordnung:
Die zu benutzende Korrespondenz hängt von der Art des zu transformierenden Systemes 2. Ordnung ab, wir müssen also **zuerst untersuchen**, welche Art vorliegt: d >, = ,< 1?
Korrespondenzen (nach di Stefano):

d > 1:	$\frac{1}{(s+a)\cdot(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}\cdot\left(e^{-a\cdot t}-e^{-b\cdot t}\right)$
d = 1:	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t\cdot e^{-a\cdot t}$
d < 1:	$\frac{1}{s^2+2\cdot d\cdot\omega_0\cdot s+\omega_0^2}$	$\frac{1}{\omega_e}\cdot e^{-d\cdot\omega_0\cdot t}.\sin\left(\omega_e\cdot t\right)$

Mit den bereits in Kapitel 2 definierten Ausdrücken für Systeme 2. Ordnung:

natürliche Kreisfrequenz: (Polkreisfrequenz)	ω_0	[omega]	[s^{-1}]
Eigenkreisfrequenz:	ω_e		[s^{-1}]
Dämpfungsmass:	d		[1]
Phasenverschiebung: (achtung: jeweils Quadrant berücksichtigen!)	φ	[phi]	[Grad, rad]
kompatible **Nennerdarstellung**:	$(s+\sigma_e)^2+\omega_e^2$		
Definitionen:	$\sigma_e=\omega_0\cdot d$	[sigma]	$\sigma_e^2+\omega_e^2=\omega_0^2$

Zusammenhang der Darstellungen für d < 1:

$$(s+\sigma_e)^2+\omega_e^2 = s^2+2\cdot\sigma_e\cdot s+\sigma_e^2+\omega_e^2 = s^2+2\cdot\sigma_e\cdot s+\omega_0^2 = s^2+2\cdot d\cdot\omega_0\cdot s+\omega_0^2 \quad \text{(Normalform)}$$

Berücksichtigen der **Anfangsbedingungen**:

Alle AB sind als **Spünge** aufzufassen, da alle Signale für $t < 0$ gemäss Definition verschwinden müssen.

z.B. passive elektrische Elemente:

	Zeitbereich $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$	Laplace-Bereich
R:	$i(t) = u(t)/R$	$I(s) = U(s)/R$
L:	$u(t) = L.di(t)/dt$ (*Ableitungsregel*)	$U(s) = s\;.\;L\;.\;I(s) - L\;.\;i_{L0}$
	Einheiten :	$[V.s] = [(s^{-1}).(V.s/A).A.s]-[(V.s/A).A]$
	(umrechnen auf die andere Variable ergibt dasselbe)	
	$i(t) = (1/L).\,{}_0\!\int^t u(\alpha).d\alpha + i_{L0}$ (*Integralregel* + *Sprungfunktion*)	$I(s) = U(s)/(s.L) + i_{L0}/s$
		Impedanz: Übertragungsfunktion G_{Imp} (Def. s. später) mit AB = 0:
		$G_{Imp}(s) = G_L(s) = U(s)/I(s) = X_L(s) = s.L$
		(vergl. KWST: $X_L(j.\omega) = j.\omega.L$)
C:	$u(t) = (1/C).\,{}_0\!\int^t i(\alpha).d\alpha + u_{C0}$	$U(s) = I(s)/(s.C) + u_{C0}/s$
	$i(t) = C.du(t)/dt$	$I(s) = s.C.U(s) - C.u_{C0}$
		Impedanz: ÜF mit AB = 0:
		$G_{Imp}(s) = G_C(s) = U(s)/I(s) = X_C(s) = 1/(s.C)$
		(vergl. KWST: $X_C(j.\omega) = 1/(j.\omega.C)$)

Beispiel Serie-Schwingkreis:

DGl.: (aus Maschen-gleichung)

$$u(t) = \underbrace{R.i(t)}_{u_R(t)} + \underbrace{(1/C).\,{}_0\!\int^t i(\alpha).d\alpha + u_{C0}}_{u_C(t)} + \underbrace{L.(di(t)/dt)}_{u_L(t)} \qquad [V]$$

$\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$

Transformation mit Hilfe der Rechenregeln:

$$U(s) = R\cdot I(s) + \underset{(1)}{\frac{1}{s\cdot C}}\cdot I(s) + \underset{(2)}{\frac{u_{C0}}{s}} + L\cdot s\cdot I(s) - L\cdot i_{L0} \qquad [V.s]$$

Man erkennt, dass sämtliche Anfangsbedingungen problemlos eingefügt werden.

Bemerkungen zu s: im Fall (1) wirkt s als *Operator* (Integral), angewandt auf die Funktion I(s), im Fall (2) wirkt s als *Funktion* (Sprungfunktion u_{C0}).

4.3 Lösung von linearen Differentialgleichungen mittels Laplace-Transformation

Die klassische Lösung im Zeitbereich liefert für ein System 1. Ordnung (s. Kap.2):

$x(t) = x_e(t) + x_f(t)$ mit einem "erzwungenen" und einem "freien" Teil.
(forced response) (free response)

Die Lösung über den Umweg (Laplace) beinhaltet folgende **3 Schritte** (s. Abb. 1):

1. **Transformation** (mit einer allgemeinen oder spezifizierten Eingangsfunktion u(t))
2. **algebr. Gleichung** nach X(s) auflösen + wenn nötig Partialbruchzerlegung
3. **Rücktransformation**

Die Anfangsbed. gehen gemäss (Differentiations-)Regeln bereits in die Transformation ein, so dass die Rücktransformation von X(s) die **komplette Lösung** für x(t) liefert.

Beispiel: allg. DGl. 1. Ordnung

$\tau \cdot x'(t) + x(t) = b \cdot u(t)$; $x(0) = x_0$; $u(t) = k \cdot \sigma(t)$; $x(t) = ?$

Eingangsfunktion u(t) ist also ein **Sprung** der Höhe k → $u(t) = k \cdot \sigma(t)$,
$\sigma(t)$: Einheits-Sprungfunktion

1. Transformation:

$u(t) = k \cdot \sigma(t)$	○——●	$U(s) = k \cdot (1/s)$	Sprung im Laplace-Bereich (s. Tabelle)
$x(t)$	○——●	$X(s)$	Variablentransformation
$\tau \cdot x'(t)$	○——●	$\tau \cdot s \cdot X(s) - \tau \cdot x(0)$	Differentiationsregel

"DGl." im Laplacebereich wird eine **algebraische Gleichung**:

$\tau \cdot s \cdot X(s) - \tau \cdot x(0) + X(s) = b \cdot U(s) = b \cdot k \cdot (1/s)$ "DGl." im Laplacebereich

2. algebraische Gleichung ordnen und nach X(s) auflösen:

$X(s) \cdot (1 + s \cdot \tau) = b \cdot k \cdot (1/s) + \tau \cdot x(0)$

$$X(s) = \frac{1}{1 + s \cdot \tau} \cdot \frac{b \cdot k}{s} + \frac{\tau \cdot x(0)}{1 + s \cdot \tau} = X_e(s) + X_f(s)$$

X(s) ist die Antwort des Systems im Laplacebereich auf einen Sprung der Höhe k mit AB x(0). X(s) lässt sich sehr schön darstellen in einem erzwungenen Teil ($X_e(s)$) und einem freien Teil ($X_f(s)$) (vergl. Kap. 2). Diese Teile lassen sich denn auch einzeln rücktransformieren.

Die Teile $X_e(s)$ und $X_f(s)$ findet man hier als Einzelterme problemlos in den Korrespondenz-Tabellen, so dass hier keine Partialbruchzerlegung vorgenommenn werden muss.

3. Rücktransformation

$$X_e(s) = b \cdot k \cdot \frac{1}{s \cdot (1 + s \cdot \tau)} \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad b \cdot k \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad \text{erzwungener Teil}$$

⌜ aus z.B. di Stefano: $F(s) = \dfrac{1}{s \cdot (s + a)} \quad \bullet - \circ \quad f(t) = \dfrac{1}{a} \cdot \left(1 - e^{-a \cdot t}\right)$

mit Multiplikationsregel aus der Linearitätsregel (für b·k) und mathematischer

Umformung: $\dfrac{1}{s \cdot (1 + s \cdot \tau)} = \dfrac{1}{s \cdot \tau \cdot \left(s + \frac{1}{\tau}\right)} \quad und\ a = \dfrac{1}{\tau}$ ⌟

$$X_f(s) = \tau \cdot x(0) \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau} \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad \tau \cdot x(0) \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{freier Teil}$$

⌜ aus z.B. di Stefano: $F(s) = \dfrac{1}{s + a} \quad \bullet - \circ \quad f(t) = e^{-a \cdot t}$

mit Multiplikationsregel aus der Linearitätsregel (für τ·x(0)) und mathematischer

Umformung: $\dfrac{1}{1 + s \cdot \tau} = \dfrac{1}{\tau \cdot \left(s + \frac{1}{\tau}\right)} \quad und\ a = \dfrac{1}{\tau}$ ⌟

❍ $$\underline{x(t) = \underbrace{b.k.(1 - e^{-t/\tau})}_{\substack{\text{erzwungene}\\ \text{Antwort}\\ x_e(t)}} + \underbrace{x(0).e^{-t/\tau}}_{\substack{\text{freie}\\ \text{Antwort}\\ x_f(t)}}}$$

Dies entspricht **der Lösung im Zeitbereich** mit einem Sprung-Ansatz (Kap. 2)

Bemerkung: Stehen nur die Papula-Tabellen zur Verfügung, müssen die vorliegenden Formen an die Papula-Formen angepasst werden:

diese entsprechen weitgehend den "di Stefano"-Formen mit der Änderung
a = - 1/τ

⌟ Ende Bemerkung

Weitere Beispiele:

1. Parallelresonanzkreis:

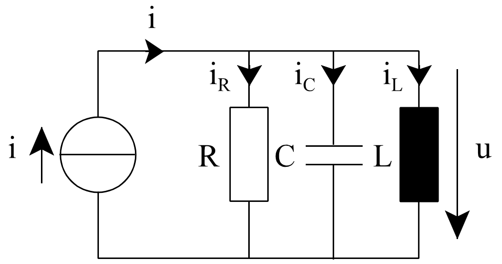

Abb. 3

aus Knotengleichung:

$$i = i_R + i_C + i_L = \frac{u}{R} + C \cdot \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} \cdot \int u \cdot dt + i_L(0)$$

Laplace – transformiert:

$$I(s) = U(s) \cdot \frac{1}{R} + s \cdot C \cdot U(s) - C \cdot u_C(0) + \frac{1}{s \cdot L} \cdot U(s) + \frac{i_L(0)}{s}$$

$$U(s) \cdot \left(\frac{1}{R} + s \cdot C + \frac{1}{s \cdot L} \right) = I(s) + C \cdot u_C(0) - \frac{i_L(0)}{s}$$

$$U(s) \cdot \frac{R + s \cdot L + s^2 \cdot R \cdot C \cdot L}{s \cdot R \cdot L} = I(s) + C \cdot u_C(0) - \frac{i_L(0)}{s}$$

$$U(s) = I(s) \cdot \frac{s \cdot R \cdot L}{R + s \cdot L + s^2 \cdot R \cdot C \cdot L} + \frac{R \cdot L \cdot \left(-i_L(0) + s \cdot C \cdot u_C(0) \right)}{R + s \cdot L + s^2 \cdot R \cdot C \cdot L}$$

Ausgehend vom Schema (Netzwerk, Abb. 3) sind wir über die DGl. und die Laplace-Transformation zu einer algebraischen Gleichung von U(s) als Funktion des Eingangsstromes I(s) gekommen. Um rücktransformieren zu können, müssen wir:
1. die Zeitfunktion der Eingangsgrösse i(t) und die AB kennen.
2. da es sich um ein System 2. Ordnung handelt, müssen wir zuerst das Dämpfungsmass d des Nenners berechnen, dies muss **numerisch** erfolgen, es gibt keine generelle algebraische Rücktransformation!

1. Der Strom i(t) mache einen **Sprung** von 5 A, wir suchen also eine Sprungantwort bei folgenden AB:

$u_C(0) = 20$ V; $i_L(0) = -2$ A

2. Parameter: L = 10 mH; C = 22 µF; R = 80 Ω

Koeffizientenvergleich mit Normdarstellung des Nenners 2. Ordnung (s. Kap. 2)

ergibt: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = 2132\ s^{-1}$; $d = \frac{1}{2 \cdot R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = 0.13325$

→ $I(s) = \frac{5}{s}$; *forced response*: $\frac{5}{s} \cdot \frac{s \cdot L}{1 + s \cdot \frac{L}{R} + s^2 \cdot C \cdot L} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{1 + s \cdot 125 \cdot 10^{-6} + s^2 \cdot 220 \cdot 10^{-9}}$

free response: $\frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot \left(2 + s \cdot 440 \cdot 10^{-6} \right)}{1 + s \cdot 125 \cdot 10^{-6} + s^2 \cdot 220 \cdot 10^{-9}}$

d < 1: (Dämpfungsmass des Nenners)
da d < 1 ist, verwenden wir für dir Rücktransformation die entsprechende Formel aus S. 6:

wir müssen obige Formeln durch mathematische Manipulationen an diese Darstellung anpassen:

$$\textit{forced response}: \quad U_{forced}(s) = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{1 + s \cdot 125 \cdot 10^{-6} + s^2 \cdot 220 \cdot 10^{-9}} = \frac{227.27 \cdot 10^3}{s^2 + s \cdot 568.18 + 4.5455 \cdot 10^6}$$

die Rücktransformation ergibt dann mit:

$$\omega_e = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - d^2} = 2132 \cdot \sqrt{1 - 0.13325^2} = 2113\, s^{-1} \quad ; \quad \sigma = d \cdot \omega_0 = 284.09\, s^{-1} \quad ; \quad K_1 = 227.27 \cdot 10^3$$

also: $u_{forced}(t) = K_1 \cdot \frac{1}{\omega_e} \cdot e^{-d \cdot \omega_0 \cdot t} . \sin(\omega_e \cdot t) = \frac{227.27 \cdot 10^3}{2113} \cdot e^{-284.09 \cdot t} \cdot \sin(2113 \cdot t) = 107.56 \cdot e^{-284.09 \cdot t} \cdot \sin(2113 \cdot t)$

free response: $U_{free}(s) = \frac{45.455\cdot 10^3\cdot\left(2+s\cdot 440\cdot 10^{-6}\right)}{s^2 + s\cdot 568.18 + 4.5455\cdot 10^6}$

Für diese Form (mit d < 1) findet man bei di Stefano (z als Substitution):

$$F(s) = \frac{s+z}{\left(s+\sigma\right)^2 + \omega_e^2} \quad \bullet\!-\!\circ \quad f(t) = \sqrt{\frac{\left(z-\sigma\right)^2 + \omega_e^2}{\omega_e^2}}\cdot e^{-\sigma\cdot t}\cdot\sin\left[\omega_e\cdot t + a\tan\left(\frac{\omega_e}{z-\sigma}\right)\right]$$

Wir müssen auch hier unsere Form durch Ausmultiplizieren anpassen:

Zähler (Koeff. von s ist = 1): $20\cdot(s+4.5455\cdot 10^3)$ mit: $K_2 = 20$ und $z = 4.5455\cdot 10^3$

Nenner (S. 6): $(s+\sigma)^2 + \omega_e^2 = s^2 + 2\cdot\sigma\cdot s + \sigma^2 + \omega_e^2 = s^2 + 2\cdot\sigma\cdot s + \omega_0^2 = s^2 + 2\cdot d\cdot\omega_0\cdot s + \omega_0^2$

der Nenner ist ja **derselbe** wie bei der forced response

Damit ergibt sich für $u_{free}(t)$:

$$u_{free}(t) = 20\cdot\sqrt{\frac{\left(4.5455\cdot 10^3 - 284.09\right)^2 + 2113^2}{2113^2}}\cdot e^{-284.09\cdot t}\cdot\sin\left[2113\cdot t + a\tan\left(\frac{2113}{4.5455\cdot 10^3 - 284.09}\right)\right] =$$
$$= 45.021\cdot e^{-284.09\cdot t}\cdot\sin\left[2113\cdot t + 0.4603\right] \qquad (1.\,Quadrant!)$$

$$u(t) = u_{forced}(t) + u_{free}(t) = 107.56\cdot e^{-284.09\cdot t}\cdot\sin\left(2113\cdot t\right) + 45.021\cdot e^{-284.09\cdot t}\cdot\sin\left(2113\cdot t + 0.4603\right)$$

➜ $\underline{u_{Step(d<1)}(t) = \left[107.56\cdot\sin\left(2113\cdot t\right) + 45.021\cdot\sin\left(2113\cdot t + 0.4603\right)\right]\cdot e^{-284.09\cdot t}}$

Vergleichsfile: Kap4Beisp1.m

Enthalten ist auch ein Simulations-file, das aus dem BSB des Netzwerkes entstanden ist.
Aus Kap. 2 sind Sie im Stande aus dem Netzwerk, Abb. 3 dieses physikalische BSB selbst zu erstellen.
Sie können Ihren BSB-Vorschlag am entsprechenden File kontrollieren: Kap4Beisp1s.mdl

Falls die Tabelle von Papula verwendet wird, bietet sich für die forced response mit d < 1 an:

$$F(s) = \frac{1}{\left(s-b\right)^2 + a^2} \quad \bullet\!-\!\circ \quad f(t) = \frac{e^{b\cdot t}\cdot\sin\left(a\cdot t\right)}{a}$$

$U_{forced}(s) = \frac{227.27\cdot 10^3}{s^2 + s\cdot 568.18 + 4.5455\cdot 10^6}$ damit wird $b = -\sigma$ und $a = \omega_e$

$u_{forced}(t) = \frac{227.27\cdot 10^3}{2113}\cdot e^{-284.09\cdot t}\cdot\sin\left(2113\cdot t\right)$ also gleich wie oben.

d = 1: Ist R = 10.66 Ω, (wenn L und C gleich bleiben), dann wird **d = 1** und dann ist $\sigma = \omega_0$

Für diesen Fall verwenden wir aus S.6 die mittlere Korrespondenz ($a = \omega_0$):

Der Nenner wird: $1 + s\cdot 938.09\cdot 10^{-6} + s^2\cdot 220\cdot 10^{-9} = 220\cdot 10^{-9}\cdot(s^2 + s\cdot 4.264\cdot 10^3 + 4.5455\cdot 10^6) =$

$= 220\cdot 10^{-9}\cdot(s^2 + 2\cdot\omega_0\cdot s + \omega_0^2) = 220\cdot 10^{-9}\cdot(s + \omega_0)^2 = 220\cdot 10^{-9}\cdot(s + 2132)^2$

also: $u_{forced(d=1)} = \dfrac{50\cdot 10^{-3}}{220\cdot 10^{-9}}\cdot t\cdot e^{-2132\cdot t} = 227.27\cdot 10^3\cdot t\cdot e^{-2132\cdot t}$

Free response:

$$U_{free}(s) = \frac{20\cdot\left(s + 4.5455\cdot 10^3\right)}{s^2 + s\cdot 4264 + 4.5455\cdot 10^6} = \frac{20\cdot(s + 4545.5)}{(s + 2132)^2} = \frac{s\cdot 20}{(s + 2132)^2} + \frac{90.91\cdot 10^3}{(s + 2132)^2}$$

In den Tabellen findet man: $F(s) = \dfrac{1}{(s - a)^2} \quad \bullet\!-\!\circ \quad f(t) = t\cdot e^{a\cdot t}$

$$F(s) = \frac{s}{(s - a)^2} \quad \bullet\!-\!\circ \quad f(t) = (1 + a\cdot t)\cdot e^{a\cdot t}$$

$\sigma = \omega_0 = -a \quad\rightarrow\quad u_{free}(t) = 20\cdot(1 - 2132\cdot t)\cdot e^{-2132\cdot t} + 90.91\cdot 10^3\cdot t\cdot e^{-2132\cdot t} = \left(20 + 48.27\cdot 10^3\cdot t\right)\cdot e^{-2132\cdot t}$

➜ $\underline{u_{Step(d=1)}(t) = \left(20 + 275.54\cdot 10^3\cdot t\right)\cdot e^{-2132\cdot t}}$

d > 1: Ist R < 10.66 Ω, (wenn L und C gleich bleiben), dann wird **d > 1**:

z.B. R = 5 Ω → d = 2.132 , d.h. der Nenner 2. Ordnung hat 2 reelle Lösungen, →
das System 2. Ordnung kann in 2 Systeme 1. Ordnung zerlegt werden:

Der Nenner wird: $1 + s\cdot 2\cdot 10^{-3} + s^2\cdot 220\cdot 10^{-9} = 220\cdot 10^{-9}\cdot(s^2 + s\cdot 9.0909\cdot 10^3 + 4.5455\cdot 10^6) =$
$= 220\cdot 10^{-9}\cdot(s - p_1)\cdot(s - p_2)$

Wie gesehen in Kapitel 2 sind die Nullstellen des Nenners bei: $p_{1,2} = -\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2}$
da L und C gleich geblieben sind, ist immer noch $\omega_0 = 2132\ s^{-1}$ und $\sigma = \omega_0\cdot d = 4545.5\ s^{-1}$
also werden $p_1 = -531.08\ s^{-1}$, $p_2 = -8559.9\ s^{-1}$

mit der Korrespondenz S. 6 ist $a = -p_1$, $b = -p_2$:

$$u_{forced}(t) = 227.27\cdot 10^3\cdot\frac{1}{8559.9 - 531.08}\cdot\left(e^{-531.08\cdot t} - e^{-8559.9\cdot t}\right) = 28.307\cdot\left(e^{-531.08\cdot t} - e^{-8559.9\cdot t}\right)$$

$$U_{free}(s) = \frac{20\cdot\left(s + 4.5455\cdot 10^3\right)}{s^2 + s\cdot 9090.9 + 4.5455\cdot 10^6} = \frac{20\cdot(s + 4545.5)}{(s + 531.08)\cdot(s + 8559.9)}$$

aus Tabelle: $F(s) = \dfrac{s + z}{(s + a)\cdot(s + b)} \quad \bullet\!-\!\circ \quad f(t) = \dfrac{1}{b - a}\cdot\left[(z - a)\cdot e^{-a\cdot t} - (z - b)\cdot e^{-b\cdot t}\right]$

$$u_{free}(t) = \frac{20}{8559.9 - 531.08}\cdot\left[(4545.5 - 531.08)\cdot e^{-531.08\cdot t} - (4545.5 - 8559.9)\cdot e^{-8559.9\cdot t}\right] = 2.491\cdot 10^{-3}\cdot\left[4014.4\cdot e^{-531.08\cdot t} + 4014.4\cdot e^{-8559.9\cdot t}\right]$$

➜ $\underline{u_{Step(d>1)} = 38.307\cdot e^{-531.08\cdot t} - 18.307\cdot e^{-8559.9\cdot t}}$

2. Beispiel:

Folgende Funktion soll rücktransformiert werden mittels Partialbruchzerlegung:

$$X(s) = \frac{5\cdot s^2 - 15\cdot s + 8}{(s-3)\cdot(s-1)^2}$$ Generell: was fällt auf an der Lösung?

Partialbruchzerlegung: $$\frac{5\cdot s^2 - 15\cdot s + 8}{(s-3)\cdot(s-1)^2} = \frac{A}{(s-1)^2} + \frac{B}{(s-1)} + \frac{C}{(s-3)}$$

$\rightarrow$ $A\cdot(s-3) + B\cdot(s-1)\cdot(s-3) + C\cdot(s-1)^2 = 5\cdot s^2 - 15\cdot s + 8$

$\rightarrow$ s^2: $B + C = 5$

s^1: $A - 4\cdot B - 2\cdot C = -15$ $\rightarrow$ $A = 1$; $B = 3$; $C = 2$

s^0: $-3\cdot A + 3\cdot B + C = 8$

$$X(s) = \frac{5\cdot s^2 - 15\cdot s + 8}{(s-3)\cdot(s-1)^2} = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{3}{(s-1)} + \frac{2}{(s-3)} \quad \bullet\!-\!-\!\circ \quad \underline{x(t)} = t\cdot e^t + 3\cdot e^t + 2\cdot e^{3t} = \underline{(t+3)\cdot e^t + 2\cdot e^{3t}}$$

grafische Interpretation:

Die Exponenten sind positiv,
die entsprechenden Zeitkonstanten werden negativ:
$\tau_1 = -1$ s ; $\tau_2 = -1/3$ s
$\rightarrow$ die Ausgangsvariable x(t) läuft weg!
$\rightarrow$ Das System ist **instabil**!

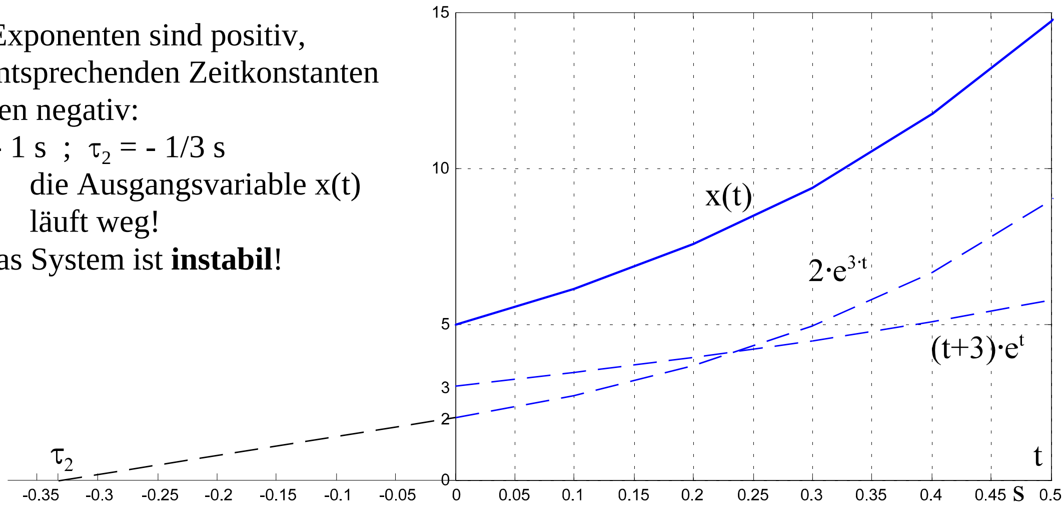

Abb. 4

3. Beispiel:

Rücktransformation von $X(s) = \frac{4}{s\cdot(s^2 + 4\cdot s + 4)}$:

Mögliche Interpretation: System 2. Ordnung, auf das ein Sprung (1/s) gegeben wird. Für die Rücktransformation muss also zuerst abgeklärt werden, ob d >,=, < 1 ist.

d = ?: $s^2 + 4\cdot s + 4$ $\rightarrow$ $s^2 + 2\cdot d\cdot\omega_0\cdot s + \omega_0^2$ $\rightarrow$ $\omega_0 = 2\ s^{-1}$; d = 4/(2·2) = 1, reell, Doppellösung

$\sigma = 4/2 = 2\ s^{-1}$ $\rightarrow$ $p_{1,2} = -\sigma = -2\ s^{-1}$; $-2\ s^{-1}$ $\rightarrow$ $(s-(-2))\cdot(s-(-2)) = (s+2)^2$

$\rightarrow$ $$\frac{4}{s\cdot(s^2 + 4\cdot s + 4)} = \frac{4}{s\cdot(s+2)^2} = \frac{A}{(s+2)^2} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{s}$$

$\rightarrow \quad A \cdot s + B \cdot s \cdot (s+2) + C \cdot (s+2)^2 = 4 \qquad \begin{array}{ll} B + C & = 0 \\ A + 2 \cdot B + 4 \cdot C & = 0 \\ 4 \cdot C & = 4 \end{array} \rightarrow A = -2 \; ; \; B = -1 \; ; \; C = 1$

$$X(s) = \frac{4}{s \cdot (s^2 + 4 \cdot s + 4)} = \frac{-2}{(s+2)^2} + \frac{-1}{(s+2)} + \frac{1}{s} \quad \bullet\!-\!-\!\circ \quad \underline{x(t)} = -2 \cdot t \cdot e^{-2 \cdot t} - e^{-2 \cdot t} + \sigma(t) = \underline{1 - e^{-2 \cdot t} \cdot (2 \cdot t + 1)}$$

Sprung $\sigma(t) = 1$ für $t > 0$

Grafische Interpretation der Sprungantwort: System 2. Ordnung müsste einen Wendepunkt zeigen und bei AB = 0 horizontal aus t = 0 weglaufen:

Wendepunkt: $x'(t) = 2 \cdot e^{-2 \cdot t} \cdot (2 \cdot t + 1) - 2 \cdot e^{-2 \cdot t} = 4 \cdot t \cdot e^{-2 \cdot t}$

$x''(t) = 4 \cdot e^{-2 \cdot t} - 8 \cdot t \cdot e^{-2 \cdot t} = 4 \cdot e^{-2 \cdot t} \cdot (1 - 2 \cdot t)$

Im Wendepunkt muss x" gleich Null sein und das Vorzeichen wechseln:

$x''(t = t_{WP}) = 4 \cdot e^{-2 \cdot t} \cdot (1 - 2 \cdot t) = 0 \quad \rightarrow t_{WP} = 0{,}5\ s \rightarrow x_{WP} = 0{,}264$

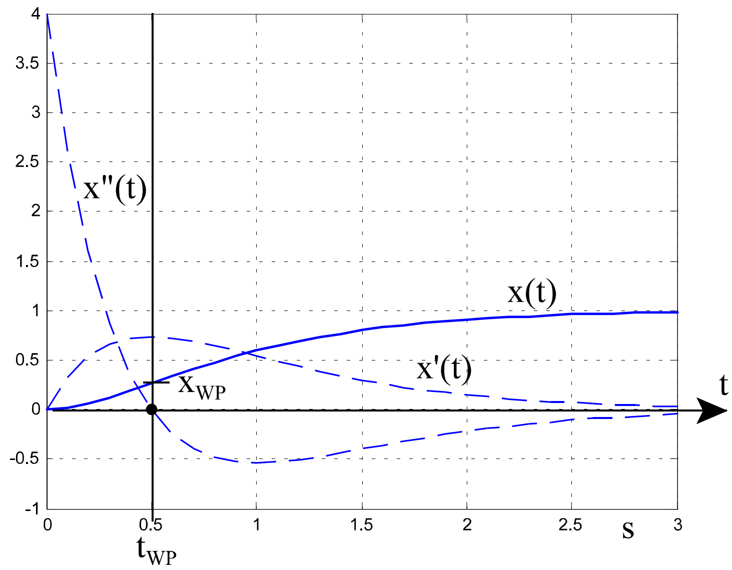

Abb. 5

4. Beispiel:

Dgl.: $5 \cdot y'' + 4 \cdot y' = 2 \cdot u' + 3 \cdot u$; AB: $y(+0) = -3$; $y'(+0) = 5$; $u(+0) = 6.5$

Auf das System wird eine Rampe mit Steilheit 4 "V"/s so gegeben, dass die AB eingehalten werden. Wie sieht die Systemantwort y(t) als Zeitfunktion aus?

"Laplacieren": $5 \cdot (s^2 \cdot Y - s \cdot y_0 - y'_0) + 4 \cdot (s \cdot Y - y_0) = 2 \cdot (s \cdot U - u_0) + 3 \cdot U$

Zusammenfassen: $Y \cdot (5 \cdot s^2 + 4 \cdot s) = U \cdot (2 \cdot s + 3) + 5 \cdot s \cdot y_0 + 5 \cdot y'_0 + 4 \cdot y_0 - 2 \cdot u_0$

Auflösen nach Y(s): $Y = U \cdot \dfrac{2 \cdot s + 3}{s \cdot (5 \cdot s + 4)} + \dfrac{a + s \cdot b}{s \cdot (5 \cdot s + 4)} = Y_{forced} + Y_{free}$

Substitutionen: $a = 5 \cdot y'_0 + 4 \cdot y_0 - 2 \cdot u_0 = 5 \cdot 5 + 4 \cdot (-3) - 2 \cdot 6.5 = 0$

$b = 5 \cdot y_0 = 5 \cdot (-3) = -15$

Rampe (mit AB: u(+0)): $u(t) = 6.5 + 4 \cdot t \quad \circ\!-\!-\!\bullet \quad U(s) = \dfrac{6.5}{s} + \dfrac{4}{s^2}$

forced response:

$$Y_{forced} = \left(\frac{6.5}{s} + \frac{4}{s^2}\right) \cdot \frac{2 \cdot s + 3}{s \cdot (5 \cdot s + 4)} = 6.5 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{s + 1.5}{s^2 \cdot (s + 0.8)} + 4 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{s + 1.5}{s^3 \cdot (s + 0.8)} = \underbrace{2.6 \cdot \frac{s + 1.5}{s^2 \cdot (s + 0.8)}}_{[1]} + \underbrace{1.6 \cdot \frac{s + 1.5}{s^3 \cdot (s + 0.8)}}_{[2]}$$

[1]: $$\frac{2.6}{s \cdot (s + 0.8)} + \frac{3.9}{s^2 \cdot (s + 0.8)}$$

aus Tabellen: $$F(s) = \frac{1}{s \cdot (s + a)} \quad \bullet\!-\!\circ \quad f(t) = \frac{1}{a} \cdot \left(1 - e^{-a \cdot t}\right)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2 \cdot (s + a)} \quad \bullet\!-\!\circ \quad f(t) = \frac{1}{a^2} \cdot \left(a \cdot t - 1 + e^{-a \cdot t}\right)$$

$$y_{forced[1]} = \frac{2.6}{0.8} \cdot \left(1 - e^{-0.8 \cdot t}\right) + \frac{3.9}{0.8^2} \cdot \left(0.8 \cdot t - 1 + e^{-0.8 \cdot t}\right) = -2.84375 + 2.84375 \cdot e^{-0.8 \cdot t} + 4.875 \cdot t$$

[2]: Partialbruchzerlegung: $$1.6 \cdot \frac{s + 1.5}{s^3 \cdot (s + 0.8)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s + 0.8}$$

$A \cdot s^3 + A \cdot 0.8 \cdot s^2 + B \cdot s^2 + B \cdot 0.8 \cdot s + C \cdot s + C \cdot 0.8 + D \cdot s^3 = 1.6 \cdot s + 2.4$

s^3 : $A + D = 0$ $\quad D = -2.1875$

s^2 : $A \cdot 0.8 + B = 0$ $\quad A = 2.1875$ ↗

s^1 : $B \cdot 0.8 + C = 1.6$ $\quad B = -1.75$ ↗

s^0 : $C \cdot 0.8 = 2.4$ $\quad C = 3$ ↗

Rücktransformation der Einzelglieder mit u.a.: $F(s) = \frac{1}{s^n} \quad \bullet\!-\!\circ \quad f(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$

→ $$y_{forced[2]} = 2.1875 - 1.75 \cdot t + 3 \cdot \frac{t^2}{2!} - 2.1875 \cdot e^{-0.8 \cdot t}$$

→ $$y_{forced}(t) = y_{forced[1]}(t) + y_{forced[2]}(t) - 0.65625 + 0.65625 \cdot e^{-0.8 \cdot t} + 3.125 \cdot t + 1.5 \cdot t^2$$

free response: $$Y_{free}(s) = \frac{-15 \cdot s}{5 \cdot s \cdot (s + 0.8)} = \frac{-3}{(s + 0.8)} \quad \bullet\!-\!-\!\circ \quad y_{free}(t) = -3 \cdot e^{-0.8 \cdot t}$$

→ Systemantwort: $$\underline{y(t) = -0.65625 - 2.34375 \cdot e^{-0.8 \cdot t} + 3.125 \cdot t + 1.5 \cdot t^2}$$

Wir können die AB kontrollieren: y(0) = - 0.65625 - 2.34375 = - 3 ✓

Ableiten: $$\dot{y}(t) = (-0.8) \cdot (-2.34375) \cdot e^{-0.8 \cdot t} + 3.125 + 3 \cdot t$$

AB y'(0): y'(0) = 1.875 + 3.125 = 5 ✓

Graphische Darstellung der Systemantwort s. MATLAB-file Kap4Beisp2.m

Entsprechend kann zur Simulation auch ein BSB erstellt werden (s. Kap. 3), hier z.B. in Regelungnormalform s. SIMULINK-file Kap4Beisp2s.mdl

Allerdings müssen dazu nun AB-Umrechnungen vorgenommen werden:

Aus BSB: $x_1 \cdot 0.6 + x_2 \cdot 0.4 = y$ → $y' = x'_1 \cdot 0.6 + x'_2 \cdot 0.4 = x_2 \cdot 0.6 + (u - x_2 \cdot 0.8) \cdot 0.4$

→ $x_2 \cdot 0.28 = y' - u \cdot 0.4$ →

$$x_2(0) = \frac{\dot{y}(0) - u(0) \cdot 0.4}{0.28} = \frac{5 - 6.5 \cdot 0.4}{0.28} = 8.57143$$

$$x_1(0) = \frac{y(0) - x_2(0) \cdot 0.4}{0.6} = \frac{-3 - 8.57143 \cdot 0.4}{0.6} = -10.7143$$

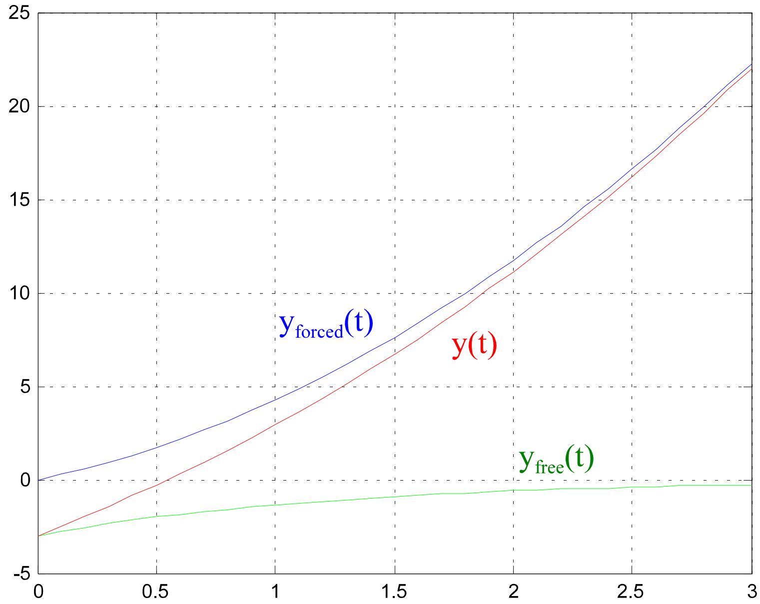

Abb. 6

Aufgaben

Aufgabe 1. DGl. $\tau \cdot x' + x = B \cdot e^{-t}$; $x(0)$ algebraische Rücktransformation?

Lösung:

$$\tau \cdot \dot{x} + x = B \cdot e^{-t} \quad \circ\!-\!-\!\bullet \quad \tau \cdot \left(s \cdot X(s) - x(0)\right) + X(s) = B \cdot \frac{1}{s+1}$$

$$\rightarrow \quad X(s) \cdot (\tau \cdot s + 1) = B \cdot \frac{1}{s+1} + \tau \cdot x(0)$$

$$X(s) = \frac{B}{1+\tau \cdot s} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{\tau \cdot x(0)}{1+\tau \cdot s} = \frac{B}{\tau} \cdot \frac{1}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right) \cdot (s+1)} + \frac{x(0)}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}$$

$$\bullet\!-\!-\!\circ \quad \underline{x(t)} = \frac{B}{\tau} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{\tau}} \cdot \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-t}\right) + x(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \underline{\frac{B}{\tau-1} \cdot \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-t}\right) + x(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

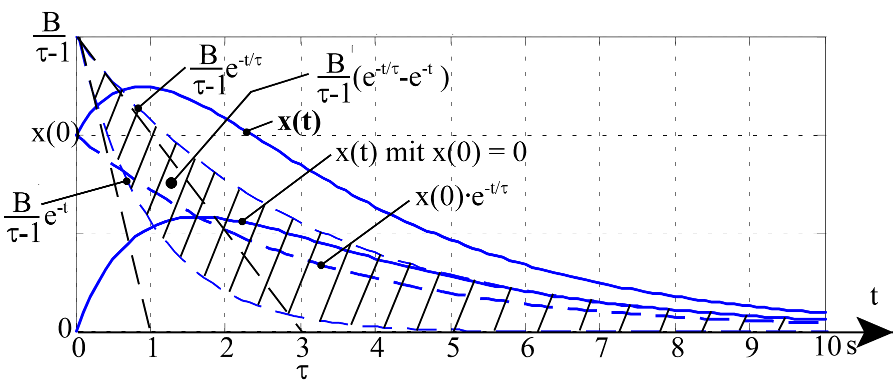

Abb. 7

Aufgabe 2:

Rücktransformation von $X(s) = \dfrac{8 \cdot s + 13}{s^2 + 3 \cdot s + 2}$

⌈ Lösung:

d = ?: $s^2 + 3 \cdot s + 2 \rightarrow s^2 + 2 \cdot d \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2 \rightarrow \omega_0 = \sqrt{2}\ s^{-1}$; $d = 3/(2 \cdot \sqrt{2}) = 1{,}061 > 1$, reell

$\sigma = 3/2 = 1{,}5\ s^{-1} \rightarrow p_{1,2} = -\sigma \pm \sqrt{(\sigma^2 - \omega_0^2)} = -1{,}5 \pm 0{,}5 = -2\ s^{-1}\ ; -1\ s^{-1} \rightarrow (s+2) \cdot (s+1)$

$X(s) = \dfrac{8 \cdot s + 13}{s^2 + 3 \cdot s + 2} = \dfrac{8 \cdot s + 13}{(s+1) \cdot (s+2)} = \dfrac{A}{s+1} + \dfrac{B}{s+2}$ mit Partialbruchzerlegung, es könnte aber eine direkte Korrespondenz gefunden werden.

$\rightarrow A \cdot (s+2) + B \cdot (s+1) = 8 \cdot s + 13 \rightarrow 2 \cdot A + B = 13\ ;\ s \cdot (A+B) = 8 \cdot s \rightarrow A = 5\ ;\ B = 3$

$X(s) = \dfrac{8 \cdot s + 13}{s^2 + 3 \cdot s + 2} = \dfrac{5}{s+1} + \dfrac{3}{s+2}$ •−−○ $\underline{x(t) = 5 \cdot e^{-t} + 3 \cdot e^{-2 \cdot t}}$; $\tau_1 = 1$ s ; $\tau_2 = 0{,}5$ s

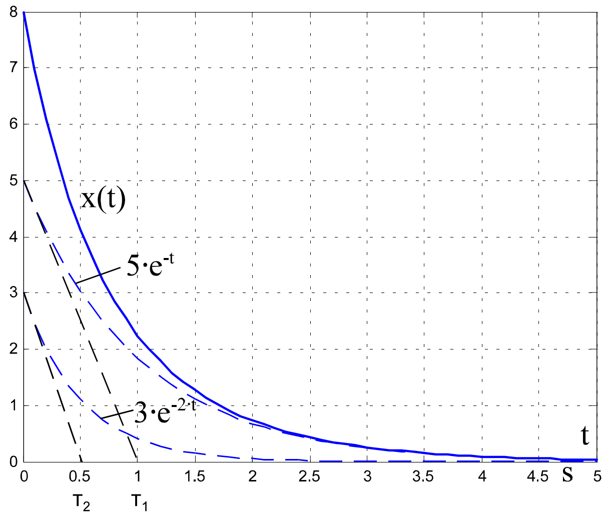

Abb. 8

⌋

4.4 Rücktransformation mittels Faltung

Wir haben für die Rücktransformation immer eine Darstellung in Form einer Addition von forced response mit free response erhalten, z.B. für ein System 1. Ordnung (gilt aber allgemein):

$$X(s) = \underbrace{\underbrace{\frac{b}{1+s\cdot\tau}}_{G(s)} \cdot U(s)}_{X_{forced}(s)} + \underbrace{\frac{\tau\cdot x(0)}{1+s\cdot\tau}}_{X_{free}(s)}$$

Die forced response $X_{forced}(s)$ lässt sich also immer durch eine Multiplikation $G(s)\cdot U(s)$ darstellen. U(s) ist die laplacierte Eingangszeitfunktion u(t), G(s) ist die sogenannte **Übertragungsfunktion** (vergl. entsprechendes Kapitel).
Die free response ist ja gemäss Definition unabhängig von U(s).

Wir haben bis jetzt jeweils die Eingangsfunktion im Laplace-Bereich nicht allgemein gehalten, sondern haben sie immer spezifiziert: z.B. gewichteter Sprung: U(s) = a/s oder gewichtete Rampe: $U(s) = b/s^2$.

Statt nun das Signal bereits im Laplacebereich zu spezifizieren, könnten wir das allgemeine Signal U(s) verwenden und erst nach der Rücktransformation in den Zeitbereich das Signal u(t) dort definieren.

Die Rücktransformation einer **Multiplikation von 2 Funktionen von s im Bildbereich** (hier z.B. **$X_{forced}(s) = G(s).U(s)$**) ergibt im Originalbereich eine **Faltung**.

→ **Faltungsregel** der Laplace-Transformation, Symbol dieser Operation: *:

Faltung angewandt auf unser Beispiel für die erzwungene Lösung $X_{forced}(s)$ im Bildbereich:

$\boxed{X_{forced}(s) = G(s).U(s) \quad ●—○ \quad x_{forced}(t) = g(t)*u(t)}$ mit: g(t) ○—● G(s), u(t) ○—● U(s)

NB: Für $X_{free}(s) = F(s)\cdot\tau\cdot x(0)$ ergibt sich **keine** Faltung, da die 2. Funktion ($\tau.x(0)$) dieser Multiplikation eine **Konstante** und keine Funktion von s ist.

Definition der Faltung:

allg.: $$\boxed{x(t) = g(t) * u(t) = \int_{(\rho=)0}^{(\rho=)t} g(t-\rho)\cdot u(\rho)\cdot d\rho = \int_{(\rho=)0}^{(\rho=)t} g(\rho)\cdot u(t-\rho)\cdot d\rho}$$

Vorschrift ist also: g(t) und u(t) ersetzen durch g(t-ϱ) und u(ϱ) resp. g(ϱ) und u(t-ϱ); ϱ ist Variable, t wird als Konstante behandelt.
Die eine Variable wird also von "links (ρ = 0) nach rechts" mit der anderen "von rechts (ρ = t) nach links" multipliziert → **Faltung**.
g(t): Stossantwort = Gewichtsfunktion
(s. Übertragungsfunktion: Die Laplace-Rücktransformierte der Übertragungsfunktion ist die Stossantwort: G(s) ●—❍ g(t))

Die Lösung dieses **Faltungsintegrals**, nach Einsetzen einer *spezifischen* Eingangsfunktion u(t) = ... (in der Formel einsetzen als u(ϱ) resp. u(t-ϱ)), ergäbe die gleiche Lösung wie beim vorher gesehenen direkten Einsatz des spezifischen Einganges bereits im s-Bereich. Die Lösung des Faltungsintegrals im Zeitbereich ist jedoch sehr umständlich und aufwendig. Es empfiehlt sich deshalb, ***alles im Laplace-Bereich aufzubereiten*** (d.h.: die spezifische Eingangsfunktion bereits in den Laplace-Bereich zu transformieren und dort zu multiplizieren) und am Schluss die Gesamt-Rücktransformation vorzunehmen.
Also z.B.: den **Sprung** als spezifische Eingangsfunktion u(t) = a.σ(t) mit U(s) = a/s in den Laplace-Bereich übertragen.

Die Berechnung der Rücktransformation mittels Faltung im *kontinuierlichen* Bereich ist also nicht gerade einfach.
Es wird sich dagegen zeigen, dass die Faltung im *zeitdiskreten* Bereich recht einfach zu handhaben ist und deshalb dort eine viel grössere Bedeutung hat als im kontinuierlichen Bereich.
Aus dem **Faltungintegral** wird dann nämlich eine viel einfacher zu handhabende **Faltungssumme**.

Aufgabe:

Es sind folgende Zeitfunktionen gegeben: $g(t) = 2 \cdot e^{-t}$ und $u(t) = 0.5 \cdot t$

es wird die Faltung $x(t) = g(t)*u(t)$ gesucht.

Sie können für die Lösung

1. den Faltungssatz anwenden und
2. den Vergleich mit dem "Umweg über Laplace" machen
   (d.h. im Bildbereich $X(s) = G(s) \cdot U(s)$ berechnen und anschliessend rücktransformieren)
   Was ist einfacher?

Lösung:

1. Faltung

$$x(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t 2 \cdot e^{-(t-\rho)} \cdot 0{,}5 \cdot \rho \cdot d\rho = \int_0^t 2 \cdot e^{-\rho} \cdot 0{,}5 \cdot (t-\rho) \cdot d\rho$$

2te Möglichkeit scheint einfacher in der Bearbeitung

$$\rightarrow \int_0^t \left(e^{-\rho} \cdot t - e^{-\rho} \cdot \rho\right) \cdot d\rho = t \cdot \int_0^t e^{-\rho} \cdot d\rho - \int_0^t e^{-\rho} \cdot \rho \cdot d\rho \qquad (t \text{ als Konstante})$$

Partielle Integration des 2ten Terms: $\int e^{-\rho} \cdot \rho \cdot d\rho = -e^{-\rho} \cdot \rho - \int \left(-e^{-\rho}\right) \cdot d\rho = -e^{-\rho} \cdot \rho - e^{-\rho}$

Total: $- t \cdot e^{-\rho}\Big|_0^{\rho=t} + e^{-\rho} \cdot (1+\rho)\Big|_0^{\rho=t} = -t \cdot e^{-t} + t + e^{-t} \cdot (1+t) - 1$

$\rightarrow$ **$\underline{x(t) = t + e^{-t} - 1}$** $(\tau = 1\ \text{s})$

2. über Laplace:

$$g(t) = 2 \cdot e^{-t} \quad \circ\!-\!-\!\bullet \quad G(s) = \frac{2}{s+1}$$

$$u(t) = 0{,}5 \cdot t \quad \circ\!-\!-\!\bullet \quad U(s) = \frac{0{,}5}{s^2}$$

$$X(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{1}{s^2 \cdot (s+1)} \quad \bullet\!-\!-\!\circ \quad \underline{\mathbf{x(t)} = -\mathbf{1} + \mathbf{t} + \mathbf{e}^{-\mathbf{t}}}$$

Grafische Interpretation:

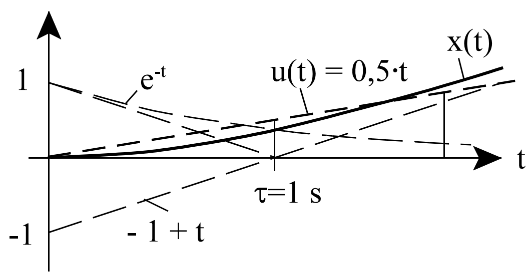

Abb. 9

4.5 Zusammenfassung

Die Laplace-Transformation ist eine von mehreren Möglichkeiten, Differentialgleichungen zu lösen. Dabei werden *Differentialgleichungen*, die beschreiben, wie sich ein System im **Zeitbereich** verhält, mittels der Laplace-Transformation in einfach zu handhabende *algebraische Gleichungen* transformiert, in welchen die Zeit nicht erscheint, man arbeitet im **Laplace-Bereich**. In diesem Bereich können nun normale algebraische Manipulationen mit den Variablen einfach vorgenommen werden. Um die Lösung zu erhalten, die beschreibt, wie sich das Signal zeitlich verhält, verwendet man die inverse Laplace-Transformation (Rücktransformation aus dem Laplace-Bereich in den Zeitbereich) meist in Form von Korrespondenz-Tabellen.
Die Lösung der DGl. mittels Laplace-Transformation erfolgt also eigentlich über einen **Umweg** aus dem *Zeitbereich* (Originalbereich, Oberbereich als f(t)) in den *Laplace-Bereich* (Bildbereich, Unterbereich als f(s), s-Bereich) und wieder zurück. Trotzdem ist die Handhabung viel einfacher als bei der Suche der Lösung im Zeitbereich.
Die Schwierigkeit beim Lösen von Differentialgleichungen wird dabei hauptsächlich auf die *Rücktransformation* vom Laplace- in den Zeitbereich verschoben, doch stehen viele Tabellen der Laplace-Transformationen (Korrespondenz-Tabellen) für diesen Fall zur Verfügung, es muss also keine Rücktransformationsformel gelöst werden. Um auf die in den Tabellen standardisierten Terme zu gelangen, bedient man sich meist der **Partialbruchzerlegung**.

Die **Laplace-Transformation** ermöglicht die Integraltransformation mit Berücksichtigung der Anfangsbedingungen auf ideale Weise und ermöglicht eine einfache Handhabung der Berechnungen. Die Lösungsterme erscheinen sowohl im Laplace-Bereich wie im Zeitbereich schön übersichtlich aufgeteilt in forced response und free response.

Vorausschauend können wir bemerken, dass man im zeitdiskreten Bereich mit einer ähnlichen Vorgehensweise arbeitet, die entsprechende Transformation vom Zeitbereich in den dortigen z-Bereich ist die **z-Transformation** ("diskrete Laplace-Transformation"). Wenn man das Arbeiten im Laplace-Bereich begriffen hat, ist das Vorgehen im z-Bereich entsprechend einfach. Es existieren dann für die Rücktransformation entsprechende z-Tabellen.
Beispiel der Tabellen gleichzeitig für s- und z-Bereich (aus Abtastregelung, J. Ackermann):
(Im z-Bereich erscheint dann als weiteres Argument auch die Abtastzeit T)

$f(t)$	$F(s)$	$F(z)$
$t \cdot e^{-a \cdot t}$	$\dfrac{2}{(s+a)^2}$	$\dfrac{T \cdot z \cdot e^{-a \cdot T}}{\left(z - e^{a \cdot T}\right)^2}$

Die gegenseitigen Zusammenhänge zwischen den einzelnen Ebenen können folgendermassen dargestellt werden:

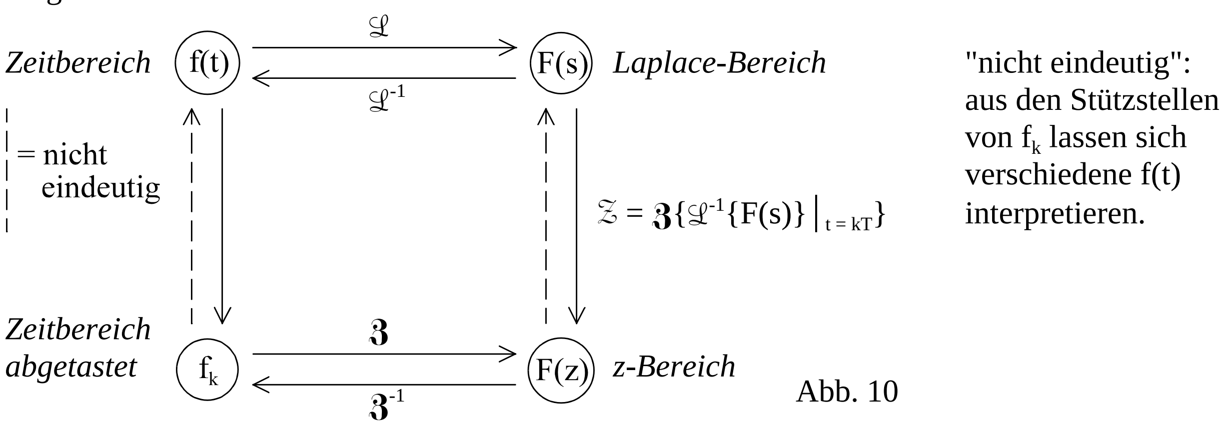

Abb. 10