

Titel: Das stationäre Verhalten dynamischer Systeme bei sinusförmiger Anregung - Frequenzgang

Titel-Kürzel: SIN

Autor: Ulrich Gysel, gys,

Koautoren: G. Lekkas, Iks, Jürg Wild, wil

Version: v2.1 23. November 2005

Inhaltlich keine Änderungen, nur pdf-Version verbesserter

Version: v2.2 6. Januar 2007

kleinere Fehler korrigiert, Aufgaben mit Lösungen hinzugefügt

Version: v2.3 6. September 2007

Ergänzungen von J. Wild berücksichtigt

Das stationäre Verhalten dynamischer Systeme bei sinusförmiger Anregung – Frequenzgang

1. Einstieg	3
2. Stationäre Lösung der Differentialgleichung bei sinusförmiger Anregung	6
3. Zusammenhang zwischen Stossantwort und Frequenzgangfunktion	9
4. Darstellungsarten der Frequenzgangfunktion	10
5. Das Bodediagramm	13
5.1 Logarithmische Darstellung von Betrag und Phase	13
5.2 Die grossen Vorteile des Bodediagramms	15
5.3 Die Bodediagramme der vier Faktoren \underline{G}_a bis \underline{G}_d	17
6. Das Bodediagramm für Systeme 2. Ordnung	22
7. Das Nyquistdiagramm (Ortskurve)	26
8. Schlussbemerkungen	30
9. Zusammenfassung	31
Aufgaben	34
Lösungen	36

Lernziele

- Die Bedeutung der Anregung eines Systems mit einem sinusförmigen Signal und die zugehörige Beschreibung der Systemantwort mittels Frequenzgangfunktion.
- Die Berechnung der Frequenzgangfunktion aus der Differentialgleichung des Systems.
- Der Zusammenhang zwischen Stossantwort und Frequenzgangfunktion.
- Darstellungsarten der Frequenzgangfunktion: Real- und Imaginärteil oder Betrag und Phase in Funktion der Frequenz, sowie Bode- und Nyquistdiagramm.

Voraussetzungen

- Die Darstellung komplexer Zahlen in Polarform und getrennt nach Real- und Imaginärteil ist bekannt.
- Sie kennen die Eulersche Beziehung und die Darstellung sinusförmiger Zeitsignale mittels Drehzeigern, insbesondere komplexer Drehzeiger.

1. Einstieg

Im Kapitel **Modellbildung** haben wir für einfache dynamische Systeme ihre Differentialgleichungen aufgestellt und gelöst. Schon bei diesen relativ einfachen Beispielen haben wir gesehen, dass die Lösung der Differentialgleichung nicht ganz einfach ist. Wie viel schwieriger wird es dann erst, wenn ein komplexeres System vorliegt. Es ist daher nahe liegend, nach Wegen zu suchen, welche einem die Lösungsfindung in Spezialfällen vereinfachen.

In vielen Fällen ist das Eingangssignal eines Systems über **längere Zeit sinusförmig**. Sowohl die Frequenz wie auch die Amplitude bleiben dabei konstant. Ein sehr einleuchtendes Beispiel ist unsere Stromversorgung mit ihrer konstanten Spannung von 230 V und der konstanten Frequenz von 50 Hz. Schalten wir eine Lampe ein, so erreicht der Strom nach ganz kurzer Zeit einen stationären Wert (sein Effektivwert bleibt konstant), bis wir die Lampe ausschalten. Ähnlich verhält es sich bei einem elektrisch angetriebenen Gerät, z.B. einem Gebläse. Nach dem Einschalten und Hochfahren bleiben sowohl Strom wie auch Drehzahl konstant, solange wir die Last nicht verändern. In beiden Fällen interessiert oft nur die Spannung, der Strom oder die Drehzahl, nachdem der Einschaltvorgang abgeklungen ist. Wir sprechen vom **eingeschwungenen** oder sog. **stationären Zustand** (vergleiche **Kapitel Modellbildung**, Fig. 10).

Um diese Begriffe zu veranschaulichen führen wir ein Experiment durch. Ein Übertragungssystem mit der Differentialgleichung

$$\tau \frac{dx}{dt} + x = u(t) \quad (1)$$

werde aus einem Sinusgenerator mit variabler Frequenz aber konstanter Amplitude gespeist, wie Fig. 1 dies zeigt. In Fig. 2 sind die Signalverläufe ("Oszillogramme") als Ergebnis des

Experimente für drei ausgewählte Frequenzen und $\tau = 1.5$ s gezeichnet. Damit der Einschwingvorgang besser zur Geltung kommt und vom stationären Zustand klar abgetrennt werden kann, setzen wir die Anfangsbedingung des Systems $x(0) = 1$.

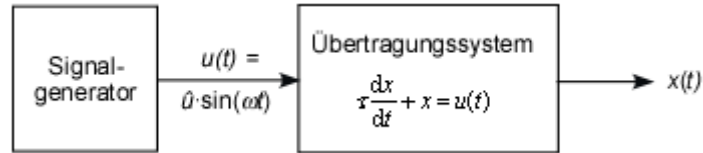


Fig. 1 Übertragungssystem an Sinusgenerator, der zur Zeit $t = 0$ eingeschaltet wird

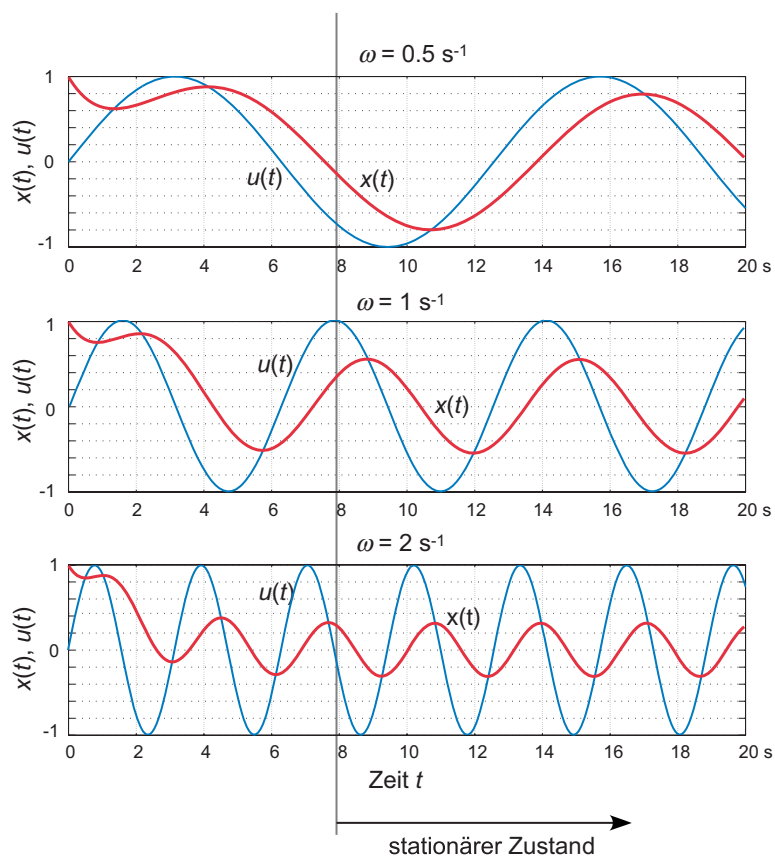


Fig. 2 Einschaltvorgang zum System von Fig. 1 mit drei verschiedenen Frequenzen des Sinusgenerators und $x(0) = 1$.

Wir konzentrieren unsern Blick auf den Verlauf nach ca. 8 s. Von diesem Zeitpunkt an ist das Ausgangssignal wieder sinusförmig (mit unveränderter Frequenz) und wir haben den stationären Zustand erreicht. Zwei Größen genügen offenbar, um die Ausgangsschwingung vollständig zu beschreiben: Die Amplitude \hat{x} und die Phasenverschiebung φ gegenüber dem Eingangssignal. Wir tragen einige Werte in die Tabelle 1 ein.

Kreisfrequenz ω s ⁻¹	Amplitude der Ausgangsschwingung \hat{x}	Amplitudenverhältnis $G = \frac{\hat{x}}{\hat{u}}$	Phasenverschiebung der Ausgangsschwingung φ in Grad
0.5	0.8	0.8	-37°
1	0.55	0.55	-56°
2	0.32	0.32	-72°

Tabelle 1 Stationärer Zustand des eingeschalteten Systems von Fig. 1

In Tabelle 1 haben wir eine weitere Spalte mit dem Amplitudenverhältnis $G = \hat{x}/\hat{u}$ gebildet. Dieses Verhältnis G (von Englisch *Gain*) ist eine Funktion der Frequenz und wird **Amplitudengang** $G(\omega)$ genannt. Die Phasenverschiebung oder -differenz φ in Funktion der Frequenz wird sinngemäss **Phasengang** $\varphi(\omega)$ genannt. Zusammen ergeben sie die sog. **Frequenzgangfunktion**, die elegant als komplexe Funktion

$$\underline{G}(j\omega) = G(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = G \angle \varphi \quad (2)$$

dargestellt werden kann. Bei einer sinusförmigen Anregung wird die Beschreibung des Ausgangssignals im Stationären Zustand also sehr einfach:

$$x(t) = \hat{x} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{mit } \hat{x} = |\underline{G}(j\omega)| \cdot \hat{u} \quad \text{und } \varphi = \arg\{\underline{G}(j\omega)\} \quad (3)$$

In vielen Anwendungen ist man nur am stationären Zustand interessiert. So sind viele Nachrichtensignale sinusförmig oder lassen sich als Summe von Sinussignalen darstellen. Die Änderungen in Amplitude und Frequenz erfolgen langsam, so dass man mit der stationären Rechnung brauchbare Resultate erhält. Ein Beispiel ist das Verhalten eines Verstärkers für Audiosignale. Schaut man sich die Datenblätter eines solchen Verstärkers an, so findet man dort Angaben zur Verstärkung in Funktion der Frequenz, ev. auch der Phase. Dabei wird am Eingang wie in unserm Experiment ein sinusförmiges Signal mit konstanter Amplitude eingespeist, dessen Frequenz über einen grossen Bereich variiert wird. Am Ausgang misst man die Amplitude und die Phasenverschiebung und bestimmt daraus den Amplituden- und Phasengang des Verstärkers. Das sind Qualitätsmerkmale für einen Verstärker.

Im nächsten Abschnitt lernen wir den Zusammenhang zwischen der Differentialgleichung eines dynamischen Systems und seinem stationären Verhalten kennen.

2. Stationäre Lösung der Differentialgleichung bei sinusförmiger Anregung

Im Kapitel **Modellbildung** haben wir von ein paar einfachen linearen und zeitinvarianten Systemen die zugehörige Differentialgleichung aufgestellt. Schaut man sich die Gleichungen genauer an, so erkennt man in allen Fällen, dass diese einerseits die Systemvariable x und ihre Ableitungen nach der Zeit enthalten. Andererseits kommt in jeder Gleichung auch das Eingangssignal u vor. Untersucht man weitere lineare und zeitinvariante Systeme, so findet man, dass die Differentialgleichungen all dieser Systeme auf folgende allgemeine Form gebracht werden können:

$$a_0x + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_3 \frac{d^3x}{dt^3} + \dots = b_0u + b_1 \frac{du}{dt} + b_2 \frac{d^2u}{dt^2} + b_3 \frac{d^3u}{dt^3} + \dots \quad (4)$$

oder abgekürzt geschrieben

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k x}{dt^k} = \sum_{k=0}^L b_k \frac{d^k u}{dt^k} \quad (5)$$

In praktischen, technisch realisierbaren Systemen ist $N \geq L$. Bei einem System N-ter Ordnung ist die höchste auftretende Ableitung von x gerade N . Die allgemeine Differentialgleichung (5) soll nun für eine sinusförmige Anregung $u(t)$ gelöst werden.

Um die folgenden Herleitungen möglichst knapp zu gestalten, nutzen wir die Eulersche Beziehung aus und schreiben alle sinusförmigen Signale als komplexe Drehzeiger. Wir zeigen die verwendete Schreibweise am Beispiel von $u(t)$. Statt

$$u(t) = \hat{u} \cdot \cos[\omega t + \varphi_u] \quad (6)$$

schreibt man zunächst

$$u(t) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} \right\} \quad (7)$$

und operiert mit dem komplexen Drehzeiger

$$\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \hat{u} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi_u} = \sqrt{2} U \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t} = \sqrt{2} \underline{U} \cdot e^{j\omega t} \quad (8)$$

Mit $\hat{u} = \sqrt{2} U$ und $\underline{U} = U \cdot e^{j\varphi_u} = U \angle \varphi_u$

Die Grösse \underline{U} bezeichnet man auch als Festzeiger und U ist der Effektivwert des Eingangssignals. Der Zusammenhang zwischen $u(t)$ und $\underline{u}(t)$ ist gegeben durch

$$u(t) = \operatorname{Re}[\underline{u}(t)] \quad (9)$$

Nun schreiben wir Gl. (5) auf komplexe Variablen um und behalten anschliessend im Kopf, dass die **reellen Zeitsignale immer den Realteilen der komplexen Signale entsprechen**.

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k x}{dt^k} = \sum_{k=0}^L b_k \frac{d^k u}{dt^k} \quad (10)$$

Bei sinusförmiger Anregung ist im stationären Zustand auch die Systemvariable $\underline{x}(t)$ sinusförmig, wir verwenden also den Ansatz

$$\underline{x}(t) = \sqrt{2} X \cdot e^{j(\omega t + \varphi_x)} = \sqrt{2} \underline{X} \cdot e^{j\omega t} \quad \text{mit } \underline{X} = X \cdot e^{j\varphi_x} \quad (11)$$

Mit diesen Ansätzen für $\underline{u}(t)$ und $\underline{x}(t)$ können wir alle in Gl. (10) geforderten Ableitungen berechnen, nämlich

$$\frac{d^k \underline{x}}{dt^k} = \frac{d^k}{dt^k} \left[\sqrt{2} \underline{X} \cdot e^{j\omega t} \right] = \sqrt{2} \underline{X} \cdot (j\omega)^k e^{j\omega t} \quad (12)$$

für die k-te Ableitung von \underline{x} und einen entsprechenden Ausdruck für die k-te Ableitung von \underline{u} . Diese setzen wir in die Gl. (10) ein und erhalten:

$$\sum_{k=0}^N a_k \sqrt{2} \underline{X} \cdot (j\omega)^k e^{j\omega t} = \sum_{k=0}^L b_k \sqrt{2} \underline{U} \cdot (j\omega)^k e^{j\omega t} \quad (13)$$

In dieser Gleichung lassen sich sowohl die $\sqrt{2}$ als auch die Exponentialfunktion wegkürzen und wir erhalten aufgelöst nach \underline{X}

$$\underline{X} = \underline{U} \frac{\sum_{k=0}^L b_k \cdot (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k \cdot (j\omega)^k} \quad (14)$$

Bilden wir noch das Verhältnis von Ausgang zu Eingang, $\underline{X}/\underline{U}$, so erhalten wir die **Frequenzgangfunktion** $\underline{G}(j\omega)$ bzw. $\underline{G}(f)$, oft auch einfach Frequenzgang genannt, also

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{X}}{\underline{U}} = \frac{\sum_{k=0}^L b_k \cdot (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k \cdot (j\omega)^k} \quad (15)^1$$

¹ Wir könnten die Differentialgleichung auch mit Hilfe der Fouriertransformation lösen. Im Kapitel **Fouriertransformation** haben wir die beiden Transformationspaare

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \underline{X}(\omega) \quad \text{und} \quad u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \underline{U}(\omega)$$

kennen gelernt. Unterwirft man die Differentialgleichung (5) der Fouriertransformation und verwendet man noch die Ableitungsregel der Fouriertransformation,

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right\} = (j\omega)^k \cdot \underline{X}(\omega)$$

Beispiel 1 Frequenzgangfunktion des RC-Glieds

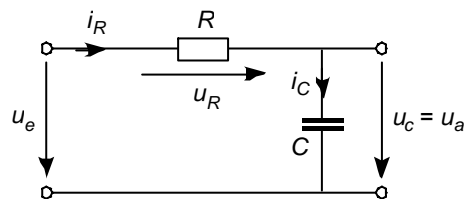
Für eine erste Illustration kehren wir zum Beispiel 1 aus dem Kapitel **Modellbildung** zurück. Dort haben wir die Differentialgleichung für die Ausgangsspannung des RC-Glieds von Fig. 3 aufgestellt. Sie lautet:

$$\tau \cdot \dot{u}_a + u_a = u_e \quad \text{mit } \tau = RC \tag{16}$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der allgemeinen Form der Differentialgleichung, so erhalten wir

$$\begin{aligned} x = u_a & & u = u_e \\ a_0 = 1 & & b_0 = 1 \\ a_1 = \tau & & \end{aligned}$$

Fig. 3 RC-Netzwerk aus dem Kapitel **Modellbildung**



Diese Werte setzen wir in Gl. (15) ein und finden

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{U}_a(j\omega)}{\underline{U}_e(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \tag{17}$$

Den angehenden Elektroingenieuren ist bestimmt aufgefallen, dass diese Gleichung exakt mit der **Lösung übereinstimmt**, welche mit Hilfe der **komplexen Wechselstromlehre** gefunden wird. Dies ist nicht zufällig, denn die komplexe Wechselstromlehre liefert genau die stationäre Lösung bei sinusförmiger Anregung. Dieser Zusammenhang muss so sein. Neu wurde hier die Beziehung, welche zwischen dem Frequenzgangfunktion eines Systems und seiner Differentialgleichung besteht, aufgezeigt. Mit diesem Ergebnis öffnet sich uns ein neuer Weg, wie wir die Differentialgleichung eines Systems finden können, nämlich über den Frequenzgang $\underline{G}(j\omega)$, der bei elektrischen Aufgabestellungen mittels komplexer Schaltungsanalyse gefunden werden kann.

so findet man ebenfalls die Gl. (15), jedoch mit der erweiterten Bedeutung

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{X}(\omega)}{\underline{U}(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^L b_k \cdot (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k \cdot (j\omega)^k}$$

Die Frequenzgangfunktion verknüpft also nicht nur die Drehzeiger von periodischen Ein- und Ausgangssignalen miteinander, sondern sie gilt viel allgemeiner für Ein- und Ausgangssignale, die eine Fouriertransformierte besitzen. D.h. ist $\underline{U}(\omega)$ das Spektrum des Eingangssignals $u(t)$ eines Systems mit der Frequenzgangfunktion $\underline{G}(j\omega)$, so liefert die Beziehung $\underline{X}(j\omega) = \underline{G}(j\omega) \cdot \underline{U}(j\omega)$ das Spektrum des Ausgangssignals.

3. Zusammenhang zwischen Stossantwort und Frequenzgangfunktion

Im letzten Kapitel haben wir die Stoss- oder Impulsantwort eines dynamischen Systems eingeführt. Auch zwischen dieser und dem Frequenzgang besteht ein enger Zusammenhang. Um diesen aufzuzeigen, gehen wir von einem allgemeinen System aus, von dem wir die Stossantwort $g(t)$ kennen. An dieses System legen wir eine sinusförmige Anregung und berechnen nun den Systemausgang $x(t)$ via Faltungsintegral

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda) \cdot g(t - \lambda) \cdot d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) \cdot u(t - \lambda) \cdot d\lambda \quad (18)$$

Die Anregung selber schreiben wir als komplexen Drehzeiger, da auf diese Weise die Rechnung wieder sehr einfach wird.

$$\underline{u}(t) = \sqrt{2} \underline{U} \cdot e^{j\omega t}$$

Bei dieser komplexen Anregung muss auch die Systemantwort im stationären Zustand notwendigerweise mit einem komplexen Drehzeiger beschrieben werden, nämlich

$$\underline{x}(t) = \sqrt{2} \underline{X} \cdot e^{j\omega t}$$

Nun setzen wir $\underline{u}(t)$ und $\underline{x}(t)$ in das Faltungsintegral ein:

$$\underline{x}(t) = \sqrt{2} \underline{X} \cdot e^{j\omega t} = \sqrt{2} \underline{U} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) e^{j\omega(t-\lambda)} d\lambda = \sqrt{2} \underline{U} \cdot e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda \quad (19)$$

Nach Kürzen von $\sqrt{2}$ und $e^{j\omega t}$ auf beiden Seiten bleibt schliesslich

$$\underline{X} = \underline{U} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda \quad (20)$$

Nun bilden wir noch das Verhältnis von $\underline{X}/\underline{U}$, vertauschen λ mit t und erhalten

$$\frac{\underline{X}}{\underline{U}} = \underline{G}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \quad (21)$$

Damit haben wir eine direkte Beziehung zwischen dem **Frequenzgang $\underline{G}(j\omega)$** und der **Stoss- oder Impulsantwort $g(t)$** gefunden: die beiden sind ein **Fouriertransformationspaar**, was wir formal auch mit

$$g(t) \longleftrightarrow \underline{G}(j\omega)$$

schreiben können. Wir wissen bereits, dass mit der Kenntnis der Stossantwort das Eingangs-Ausgangs-Verhalten eines Systems vollständig bekannt ist. Dies gilt gleichermassen für den Frequenzgang: Das **Eingangs-Ausgangs-Verhalten eines Systems** ist mit der Kenntnis des **Frequenzgangs vollständig bekannt**.

Beispiel 2 Fouriertransformation der Stossantwort des RC-Glieds

Auch hier soll ein Beispiel die theoretische Herleitung veranschaulichen. Im Kapitel **Stossantwort** haben wir die Stossantwort zur elektrischen Schaltung von Fig. 3 angegeben:

$$g(t) = \varepsilon(t) \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \quad \text{mit } \tau = RC$$

Eingesetzt in Gl. (21) erhalten wir

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} e^{-t/\tau} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{-1}{1/\tau + j\omega} e^{-t/\tau - j\omega t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \quad (22)$$

Wir bestätigen also noch einmal den bereits im vorhergehenden Abschnitt gefundenen Frequenzgang. Zur Transformationsgleichung gibt es auch die Rücktransformation, mit welcher aus dem Frequenzgang die Stossantwort gefunden werden kann. Dieser Weg wird bei elektrotechnischen Anwendungen sogar eher der häufigere sein, da der Frequenzgang relativ einfach aus dem Ersatzschaltbild gewonnen werden kann.

4. Darstellungsarten der Frequenzgangfunktion

Die Frequenzgangfunktion, oder abgekürzt der Frequenzgang eines Systems, lässt sich auf verschiedene Arten grafisch darstellen. Im Verlauf dieses Kapitels werden wir dafür drei verschiedene Darstellungsarten kennen lernen:

- Darstellungen von Real- und Imaginärteil oder Betrag und Phase in Funktion der linearen Frequenz f oder der linearen Kreisfrequenz ω .
- Das Bodediagramm, eine logarithmische Darstellungsart
- Das Nyquistdiagramm, eine komplexe Ortskurvendarstellung

Zuerst sehen wir uns die linearen Darstellungen an. Der Frequenzgang ist eine **komplexe Funktion** der Frequenz f oder der Kreisfrequenz ω . Er kann daher nicht mit einer einzigen skalaren Grösse in Funktion der Frequenz dargestellt werden. Als erste Variante können wir die komplexe Grösse $\underline{G}(f)$ in Real- und Imaginärteil zerlegen:

$$\underline{G}(f) = \text{Re}\{\underline{G}(f)\} + j\text{Im}\{\underline{G}(f)\} \quad (23)$$

Die beide skalaren Grössen $\text{Re}\{\underline{G}(f)\}$ und $\text{Im}\{\underline{G}(f)\}$ können in Funktion der Frequenz aufgetragen werden. Diese Darstellungsart verwendet man z.B. für Impedanzen. Sie ist aber weniger populär, wenn eine Übertragungsgrösse dargestellt werden soll, beispielsweise ein Spannungsverhältnis oder bei einem mechanischen System das Verhältnis der erforderlichen Kraft für eine bestimmte Auslenkung. In diesen Fällen bevorzugt man eine zweite Zerlegungsart nach Betrag und Phase, man spricht in diesem Zusammenhang auch von der Darstellung in Polarkoordinaten:

$$\underline{G}(f) = |\underline{G}(f)| e^{j\varphi}$$

$$\text{mit } |\underline{G}(f)| = \sqrt{(\operatorname{Re}\{\underline{G}(f)\})^2 + (\operatorname{Im}\{\underline{G}(f)\})^2} \quad (24)$$

$$\text{und } \varphi(f) = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{\underline{G}(f)\}}{\operatorname{Re}\{\underline{G}(f)\}}$$

Sowohl Betrag wie auch Phase sind wieder skalare Größen und lassen sich in Funktion der Frequenz oder Kreisfrequenz darstellen.

Beispiel 3 Darstellung des Frequenzgangs des RC-Glieds

Wir nehmen wieder das einfache RC-Glied von Fig. 3 und zerlegen die Frequenzgangfunktion $\underline{G}(j\omega)$ in Real- und Imaginärteil als auch in Betrag und Phase.

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \angle \arctan(-\omega\tau) \quad (25)$$

Daraus lesen wir vier skalare Größen ab:

$$\operatorname{Re}\{\underline{G}(f)\} = \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}\{\underline{G}(j\omega)\} = \frac{-\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (26)$$

$$\text{Betrag } |\underline{G}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \quad \text{und} \quad \text{Phase } \varphi = -\arctan(\omega\tau) \quad (27)$$

Beide Zerlegungen können wir grafisch in Funktion der Kreisfrequenz darstellen, wie dies in Fig. 4 und Fig. 5 gezeigt wird.

Das RC-Glied hat die Funktion eines einfachen Tiefpasses. Gleichspannung und sehr niedrige Frequenzen werden von dieser Schaltung ungedämpft übertragen. Für $\omega_g \cdot \tau = 1$ erreichen wir die sog. Grenzfrequenz ω_g , welche den Durchlassbereich vom Sperrbereich trennt. In unserem Beispiel mit $\tau = 0.5 \text{ s}$ ist dies für $\omega_g = 2 \text{ s}^{-1}$ der Fall. Allgemein ist die Grenzfrequenz durch die Beziehung $|\underline{G}(f)| = |\underline{G}(0)|/\sqrt{2}$ definiert, d.h. wenn die Ausgangsamplitude auf 0.707 des Wertes bei $f=0$ gefallen ist. In unserem Beispiel gilt für f_g zusätzlich

$$\operatorname{Re}\{\underline{G}(f)\} = -\operatorname{Im}\{\underline{G}(f)\} = |\underline{G}(0)|/2 \quad (28),$$

was durch Einsetzen in Gl. (26) sofort ersichtlich wird.

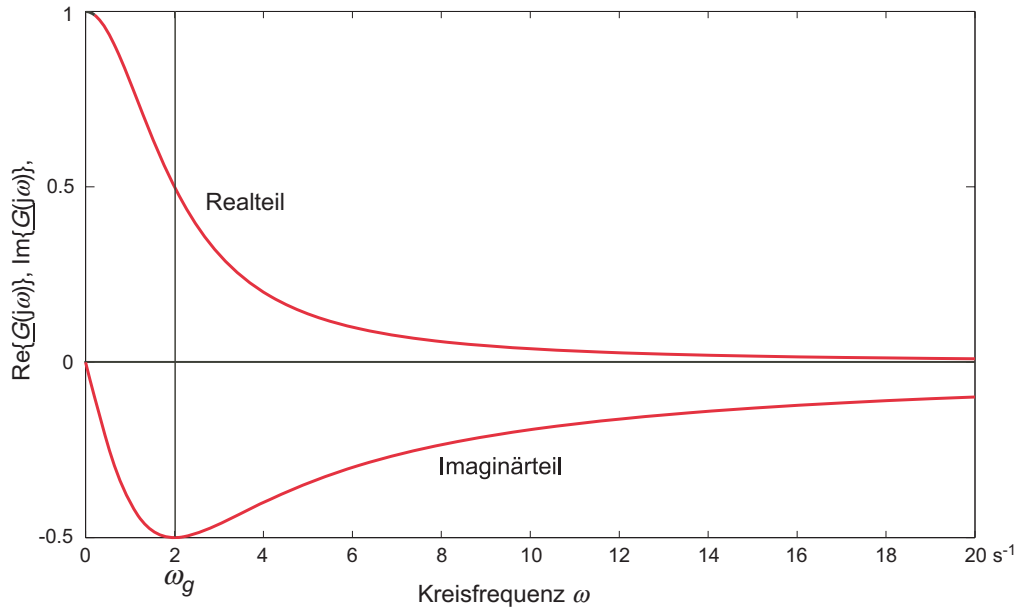


Fig. 4 Darstellung des Frequenzgangs des RC-Netzwerks von Fig. 3 mit $\tau = 0.5$ s aufgeteilt nach Real- und Imaginärteil in Funktion der Kreisfrequenz ω

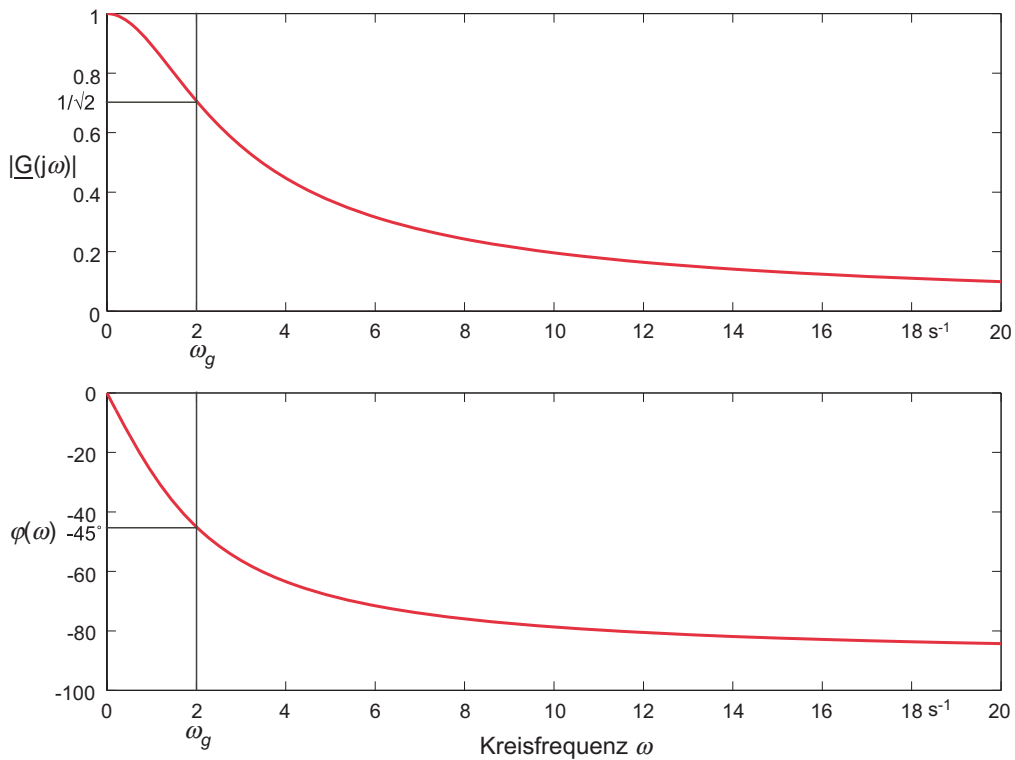


Fig. 5 Darstellung des Frequenzgangs des RC-Netzwerks von Fig. 3 mit $\tau = 0.5$ s aufgeteilt nach Betrag und Phase in Funktion der Kreisfrequenz ω

In diesem Beispiel haben wir nur die positiven Frequenzachsen dargestellt. Wir können uns die negativen sparen, da für alle Systemfunktionen einfache Beziehungen zwischen den Wer-

ten für positive und negative Frequenzen bestehen. Wir betrachten nochmals die Gl. (21). Diese Gleichung können wir auch etwas anders schreiben:

$$\underline{G}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot (\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)) dt = \operatorname{Re}\{\underline{G}(j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{\underline{G}(j\omega)\} \quad (29)$$

Nun ändern wir in diesem Ausdruck das Vorzeichen der Frequenz und erhalten

$$\underline{G}(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)) dt = \operatorname{Re}\{\underline{G}(j\omega)\} - j \operatorname{Im}\{\underline{G}(j\omega)\} \quad (30)$$

Daraus schliessen wir auf

$$\underline{G}(-j\omega) = \underline{G}(j\omega)^* \quad (31)$$

Der **Realteil der Frequenzgangfunktion** ist also immer eine **gerade**, der **Imaginärteil** eine **ungerade** Funktion. Weiter folgt aus diesem Ergebnis zusammen mit Gl. (24), dass der **Betrag von $\underline{G}(f)$** eine **gerade** und die **Phase von $\underline{G}(f)$** eine **ungerade** Funktion sein müssen. Diese Eigenschaften werden wir noch öfters verwenden.

5. Das Bodediagramm

5.1 Logarithmische Darstellung von Betrag und Phase

In vielen Anwendungen überstreicht der interessierende Frequenzbereich aber auch der Betrag des Frequenzgangs viele Dekaden. In diesen Fällen ist eine lineare Frequenzachse wie auch ein linearer Massstab für den Betrag ungeeignet. Ein **logarithmischer Massstab** für beide Achsen drängt sich auf. Für die Frequenz- oder Kreisfrequenzachse wählen wir die linearen Achsen

$$f_{\log} = \log(f) \quad \text{bzw.} \quad \omega_{\log} = \log(\omega) \quad (32)$$

Da der Logarithmus aber nur von einer dimensionslosen Grösse gezogen werden darf, schreiben wir korrekterweise

$$f_{\log} = \log(f/f_{\text{bez}}) \quad \text{bzw.} \quad \omega_{\log} = \log(\omega/\omega_{\text{bez}}) \quad (33)$$

oder auch mit $\tau_{\text{bez}} = 1/\omega_{\text{bez}}$

$$f_{\log} = \log(2\pi f \cdot \tau_{\text{bez}}) \quad \text{bzw.} \quad \omega_{\log} = \log(\omega \cdot \tau_{\text{bez}}) \quad (34)$$

Im einfachsten Fall wählt man $f_{\text{bez}} = 1 \text{ Hz}$ bzw. $\omega_{\text{bez}} = 1 \text{ s}^{-1}$. Wie bei allen einfach oder doppelt logarithmischen Darstellungen schreibt man die logarithmischen Achsen aber mit dem **ursprünglichen Argument f bzw. ω** an.

Für die Darstellung des **Frequenzgangs** gehen wir von der Polardarstellung von Gl. (24) aus. Vom Betrag bilden wir die logarithmierte Grösse, multiplizieren mit dem Faktor 20 und er-

halten den **logarithmierten Amplitudengang**. Die Phase tragen wir direkt linear in Funktion von $\log(f)$ oder $\log(f/f_{\text{bez}})$ auf.

$$G_{\text{dB}}(\omega) = |\underline{G}(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log \frac{|\underline{G}(j\omega)|}{G_{\text{bez}}} \quad (35)$$

$$\varphi(j\omega) = \arg\{G(j\omega)\}$$

Wir bezeichnen den logarithmierten Amplitudengang mit G_{dB} oder $|\underline{G}(j\omega)|_{\text{dB}}$, da die Einheit dieser Darstellung Dezibel oder dB ist. Auch hier haben wir, um korrekt zu sein, $\underline{G}(j\omega)$ durch eine Bezugsgrösse G_{bez} für $\underline{G}(j\omega)$ dividiert. Meist wählt man $G_{\text{bez}} = 1$ mit der richtigen Dimension entsprechend $\underline{G}(j\omega)$. In dieser Darstellung wird die Achse entweder mit der linearen Grösse $|G|$ angeschrieben oder dann viel häufiger mit dem logarithmischen Verhältnis in **Dezibel (dB)**. Man lässt dann allerdings häufig den Index "dB" weg, da die Darstellung klar zeigt, dass es sich um ein logarithmiertes Verhältnis handelt.

Diese kombinierte Darstellung von logarithmiertem Amplituden- und Phasengang in Funktion der logarithmierten Frequenz wird auch **Bodediagramm** genannt nach H. Bode, dem Erfinder dieser Darstellung.

Beispiel 4 Bodediagramm des RC-Glieds

Als Beispiel wählen wir wieder unsere RC-Schaltung von Fig. 3 mit $\underline{G}(j\omega) = 1/(1+j\omega\tau)$, deren Bodediagramm in Fig. 6 gezeigt ist.

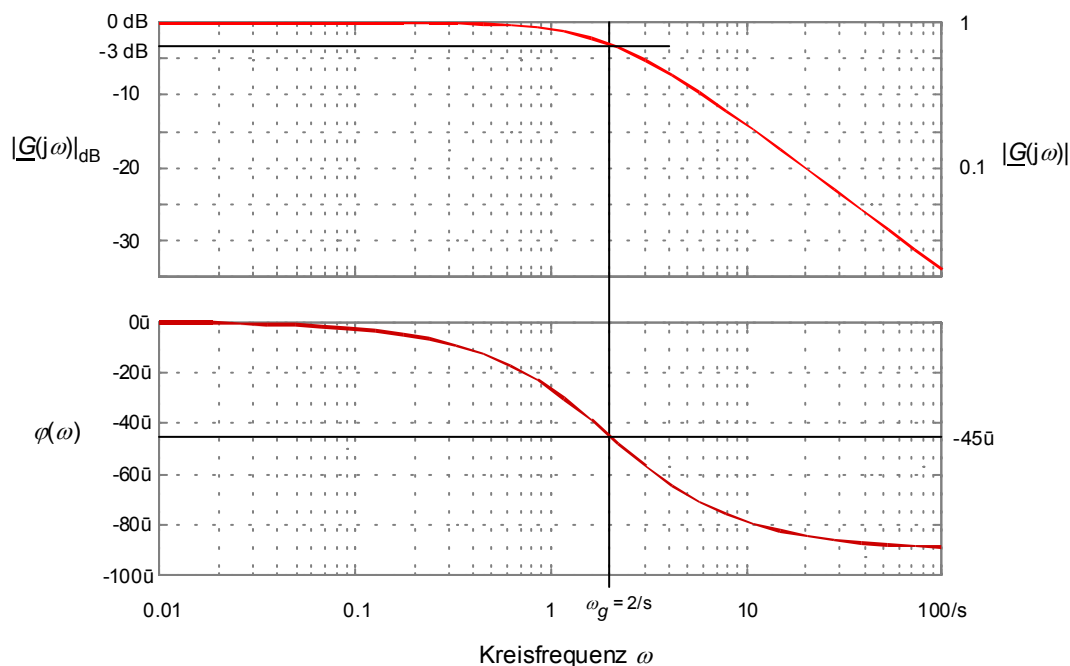


Fig. 6 Bodediagramm zum Beispiel von Fig. 3

Auffallend beim Amplitudengang sind die beiden asymptotischen Geraden für sehr kleine und sehr grosse Frequenzen. Der Übergang vom einen asymptotischen Bereich in den andern erfolgt bei der Grenzfrequenz $\omega_g = 2 \text{ s}^{-1}$. Weiter fällt auf, dass beim Phasengang die Grafik zentralsymmetrisch bezüglich des Wertes bei ω_g ist. Wir werden anschliessend dieses und einige ähnliche Bodediagramme noch genauer untersuchen.

5.2 Die grossen Vorteile des Bodediagramms

Warum ist das Bodediagramm so verbreitet? Verantwortlich dafür sind einige wichtige Vorteile gegenüber anderen Darstellungen, nämlich:

- Grosse Unterschiede in den darzustellenden Werten für Amplitude und Frequenz können auf einem Blatt bewältigt werden.
- Die relative Genauigkeit (beim Ablesen oder Zeichnen) ist über den ganzen Bereich der Darstellung gleich gross. Lesen wir in der Grafik von Fig. 6 einen Wert mit einem Fehler von z.B. einem Millimeter heraus, so entspricht dies immer dem gleichen prozentualen Fehler, unabhängig davon, ob der absolute Wert der Amplitude oder der Frequenz sehr gross oder sehr klein ist. Dies ist eine Grundeigenschaft der logarithmischen Darstellung.
- Häufig auftretende Funktionen können asymptotisch mit Geradenstücken dargestellt werden.
- Setzt sich eine Frequenzgangfunktion aus multiplikativen Faktoren zusammen, so können die Bodediagramme der einzelnen Faktoren direkt zum Gesamtdiagramm addiert werden. Dies ist eine direkte Folge der logarithmischen Darstellung.

Dieser letzten Eigenschaft wollen wir näher auf den Grund gehen. Dazu kehren wir nochmals zurück zur Gl. (15). Zähler wie Nenner der Frequenzgangfunktion sind Polynome in $j\omega$, oder wenn wir für $j\omega = s$ einsetzen, Polynome in s . Diese Substitution ist nicht zufällig. Im allgemeinen Fall hat s neben dem Imaginärteil $j\omega$ noch den Realteil σ , oder

$$s = \sigma + j\omega \quad (36)$$

Sie wird als **komplexe Frequenzvariable** bezeichnet und die Frequenzgangfunktion $\underline{G}(j\omega)$ ist der Spezialfall der allgemeineren sog. Übertragungsfunktion $\underline{G}(s)$ für $s = j\omega$. $\underline{G}(s)$ hat eine grosse Bedeutung für alle Systeme. Im Moment ist nur wichtig, dass wir mit Hilfe der Wurzeln von Zähler und Nenner von $\underline{G}(s)$ beide Polynome in ein Produkt von einfachen Teilfunktionen zerlegen können.

Wir sind s bereits im Kapitel **Modellbildung** bei der charakteristischen Gleichung des Systems 2. Ordnung begegnet. Die Wurzeln des Nenners von $\underline{G}(s)$ lieferten uns dort die freie Antwort des Systems und bestimmen sein Einschwingverhalten. Dies wird, wie wir später sehen werden, auch für das allgemeine System N -ter Ordnung gelten.

Das Nennerpolynom von $\underline{G}(s)$ vom Grad N hat genau N Wurzeln p_k (man bezeichnet sie auch als Pole des Systems). Sie sind reell oder paarweise konjugiert komplexe. Das Zählerpolynom vom Grad L hat genau L Wurzeln (es sind hier die Nullstellen des Systems), ebenfalls reelle oder paarweise konjugiert komplexe, die wir z_k nennen. Mit diesen Wurzeln lässt sich Gl. (15) neu in Faktoren schreiben als

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{b_L}{a_N} \cdot \frac{\prod_{k=1}^L (j\omega - \underline{z}_k)}{\prod_{k=1}^N (j\omega - \underline{p}_k)} \quad \text{mit } L \leq N \text{ und meist } a_N = 1 \text{ (normiert)} \quad (37)$$

Zuerst nehmen wir an, die Wurzeln \underline{z}_k und \underline{p}_k seien rein reell und negativ. Dann verwendet man statt der Schreibweise von Gl. (37) die alternativen Formen (= Zeitkonstanten-Normalform)

$$\underline{G}(j\omega) = K \frac{\prod_{k=1}^L (1 + j\omega\tau_{z_k})}{\prod_{k=1}^N (1 + j\omega\tau_{p_k})} = K \frac{\prod_{k=1}^L (1 + j\omega/\omega_{z_k})}{\prod_{k=1}^N (1 + j\omega/\omega_{p_k})} \quad (38)$$

mit den Beziehungen

$$\begin{aligned} \tau_{z_k} &= 1/\omega_{z_k} = -1/z_k \\ \tau_{p_k} &= 1/\omega_{p_k} = -1/p_k \end{aligned} \quad (39)$$

und
$$K = \frac{b_L}{a_N} \cdot \frac{\prod_{k=1}^L (-z_k)}{\prod_{k=1}^N (-p_k)} \quad (40)$$

Nullstellen und Pole können auch bei $\omega = 0$ liegen, z.B. $z_i = 0$ oder $p_i = 0$. Dies führt dann zu einem Faktor der Form $(j\omega\tau)^\alpha$ im Zähler oder im Nenner mit α einer ganzen Zahl (= Vielfachheit der Wurzel bei $\omega = 0$).

Die einfachsten Faktoren, auch Grundelemente des Bodediagramms genannt, die immer wieder logarithmisch dargestellt werden müssen, lauten somit:

$$\begin{aligned} \underline{G}_a &= j\omega\tau_a & \underline{G}_b &= \frac{1}{j\omega\tau_b} \\ \underline{G}_c &= 1 + j\omega\tau_c & \underline{G}_d &= \frac{1}{1 + j\omega\tau_d} \end{aligned} \quad (41)$$

Jeder dieser einzelnen Faktoren ergibt ein typisches Bodediagramm, das mit Hilfe der Asymptoten schnell gezeichnet werden kann.

Nun müssen wir noch zeigen, warum die Bodediagramme der einzelnen Faktoren direkt addiert werden können. Dazu stellen wir die einzelnen Faktoren in der Produktdarstellung von Gl. (38) polar dar, beispielsweise die beiden Faktoren

$$\underline{G}_1 = |\underline{G}_1| \cdot e^{j\varphi_1} \quad \text{und} \quad \underline{G}_2 = |\underline{G}_2| \cdot e^{j\varphi_2} \quad (42)$$

Nun werde eine Frequenzgangfunktion $\underline{G}(f)$ als Produkt dieser beiden Faktoren gebildet

$$\underline{G}(f) = \underline{G}_1(f) \cdot \underline{G}_2(f) \quad (43)$$

Gemäss der Theorie der komplexen Zahlen gilt

$$\underline{G}(f) = |\underline{G}_1(f)| \cdot |\underline{G}_2(f)| \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} = |\underline{G}(f)| \cdot e^{j\varphi} \quad (44)$$

$$\text{oder } |\underline{G}(f)| = |\underline{G}_1(f)| \cdot |\underline{G}_2(f)| \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (45)$$

Logarithmieren wir jetzt den Betrag von $\underline{G}(f)$ nach Gl. (35), so erhalten wir den logarithmierten **Amplitudengang**

$$G_{\text{dB}}(f) = 20 \log \frac{|\underline{G}(f)|}{G_{\text{bez}}} = 20 \log \frac{|\underline{G}_1(f)|}{G_{\text{bez}}} + 20 \log \frac{|\underline{G}_2(f)|}{G_{\text{bez}}} \quad (46)$$

Für den **Phasengang** gilt nach Gl. (45)

$$\varphi(f) = \arg \{ \underline{G}_1(f) \} + \arg \{ \underline{G}_2(f) \} \quad (47)$$

Diese Aussage lässt sich von zwei auf beliebig viele Faktoren erweitern. Es gilt also:

Die Multiplikation von Faktoren $\underline{G}_k(f)$ zur gesamten Frequenzgangfunktion $\underline{G}(f)$ führt im Bodediagramm zur Addition der logarithmierten Amplitudengänge als auch der Phasengänge der einzelnen Faktoren.

Es genügt somit, die Bodediagramme elementarer Faktoren zu entwickeln. Aus diesen lassen sich die Bodediagramme beliebiger Frequenzgangfunktionen additiv konstruieren. Zunächst entwickeln wir die Bodediagramme der vier Faktoren \underline{G}_a bis \underline{G}_d .

5.3 Die Bodediagramme der vier Faktoren \underline{G}_a bis \underline{G}_d

Faktor $\underline{G}_a = j\omega\tau_a$ mit einer Nullstelle bei $s = 0$

Bei der Darstellung der Bodediagramme der vier einfachsten Faktoren beginnen wir mit dem Faktor $\underline{G}_a = j\omega\tau_a$. Fig. 7 zeigt das zugehörige Bodediagramm für $\tau_a = 0.5$ s. Der Betrag ist eine Gerade mit der konstanten Steigung von 20 dB/DK (DK = Dekade). Bei $\omega_a = 1/\tau_a = 2$ s⁻¹ geht der Betrag durch den Wert 1 bzw. 0 dB. Die Phase ist, da der Ausdruck rein imaginär ist, konstant auf +90°.

Faktor $\underline{G}_b = 1/j\omega\tau_b$ mit einem Pol bei $s = 0$

Das Bodediagramm für die Funktion $\underline{G}_b = 1/j\omega\tau_b$ sieht sehr ähnlich aus, da diese Funktion der reziproken von \underline{G}_a entspricht. Wie Fig. 8 für $\tau_b = 2$ s zeigt, ergibt der Betrag eine mit 20 dB/DK fallende Gerade, welche bei $\omega_b = 1/\tau_b = 0.5$ s durch 0 dB geht. Die Phase beträgt konstant -90°.

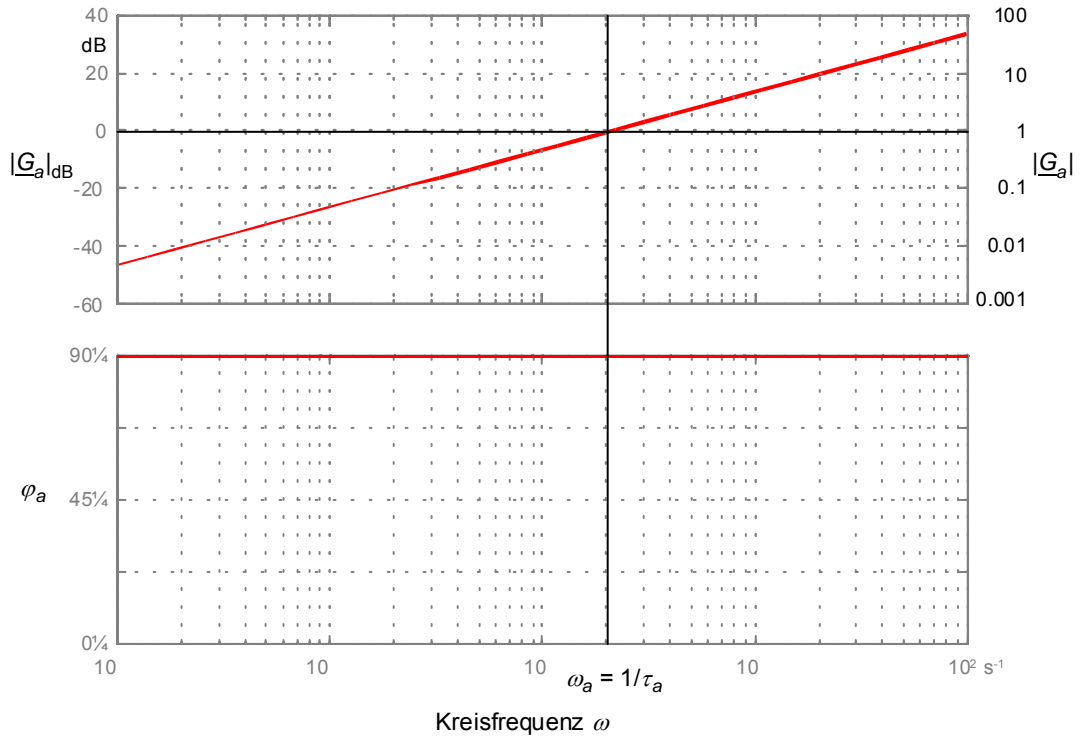


Fig. 7 Bodediagramm der Funktion $\underline{G}_a = j\omega\tau_a$, hier mit $\tau_a = 0.5$ s

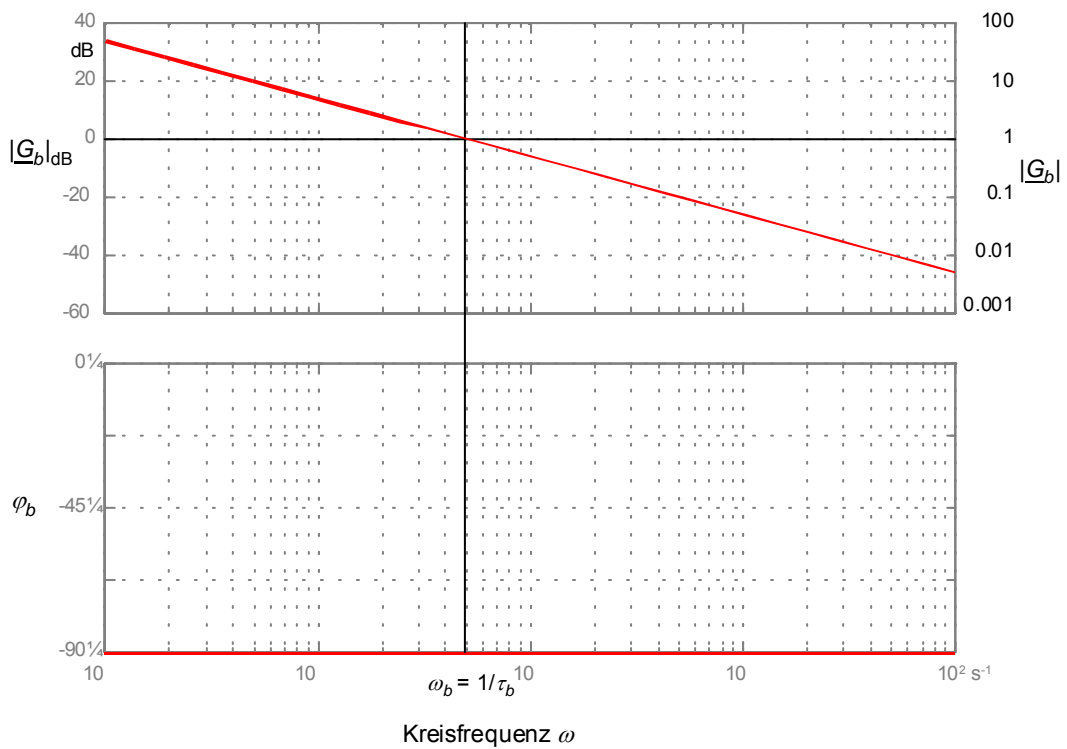


Fig. 8 Bodediagramm der Funktion $\underline{G}_b = 1/(j\omega\tau_b)$, hier mit $\tau_b = 2$ s

Faktor $\underline{G}_c = 1 + j\omega\tau_c$ mit einer Nullstelle bei $s = -1/\tau_c$

Fig. 9 zeigt das Bodediagramme für die Funktion $\underline{G}_c = 1 + j\omega\tau_c$ (mit $\tau_c = 2$ s). Diese Funktion kann mit einigen wenigen Asymptoten und Eckwerten sehr genau gezeichnet werden. Der Betrag lässt sich mit zwei Geraden approximieren, welche sich bei der Eck- oder Grenzfrequenz $\omega_c = 1/\tau_c$ schneiden. Unterhalb ω_c ist der Betrag konstant 1 bzw. 0 dB, oberhalb von ω_c steigt die Betragsfunktion asymptotisch mit 20 dB/DK an. Bei ω_c selber ist der Betrag auf $\sqrt{2}$ bzw. 3 dB angestiegen. Man sagt auch, mit zunehmender Frequenz ergibt die Nullstelle im Amplitudengang einen Knick "nach oben" um +20 dB/DK.

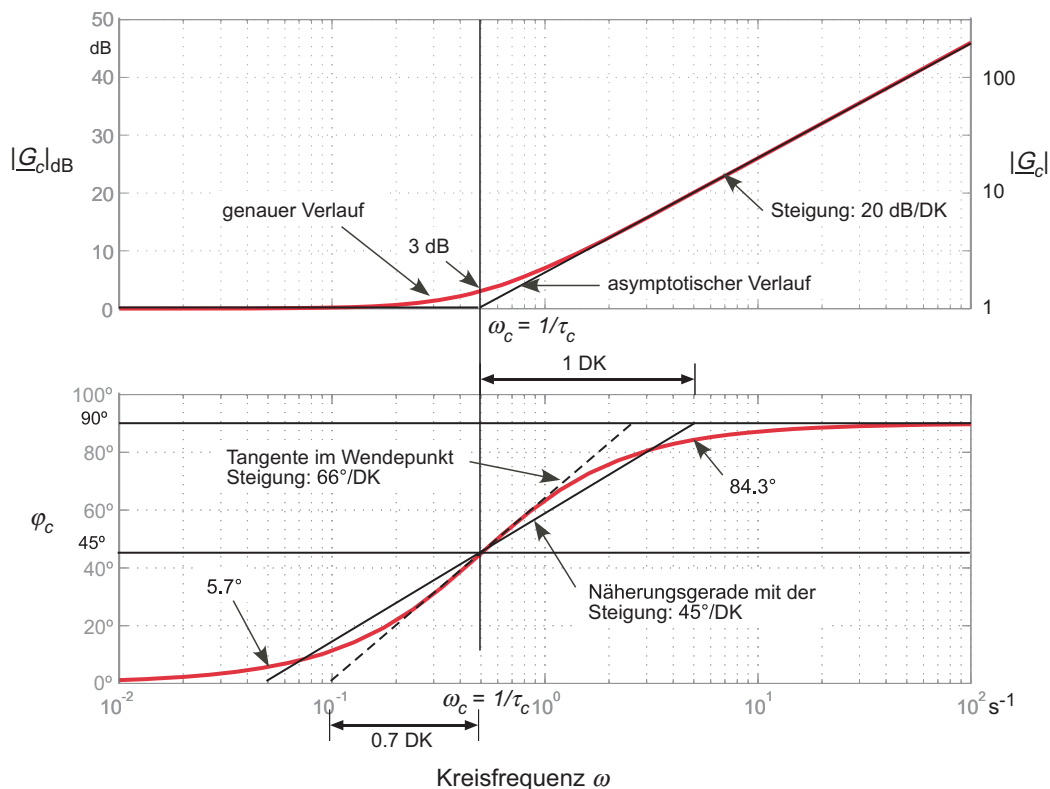


Fig. 9 Bodediagramm des Faktors $\underline{G}_c(j\omega) = 1 + j\omega\tau_c$

Die Phase verläuft für Kreisfrequenzen von $\omega = 0$ bis ∞ von 0° auf 90° . Im Bodediagramm entsteht eine punktsymmetrische Kurve um den Wert von 45° bei ω_c . Den Übergang kann man mit zwei Geraden approximieren. Entweder man wählt die Tangente im Wendepunkt bei ω_c , welche eine Steigung von $66^\circ/\text{DK}$ hat. Man kann diese auch zeichnen, indem man ihre Schnittpunkte mit der 0° - bzw. 90° -Achse findet, welche 0.7 Dekaden von ω_c entfernt liegen. Eine häufig verwendete Alternative ist die Näherungsgerade mit der Steigung von 45° pro Dekade, um welche sich die Phasenfunktion schlängelt. Eine Dekade von ω_c entfernt weicht die Phase noch 5.7° vom asymptotischen Endwert ab.

In den meisten Fällen begnügt man sich mit der asymptotischen Darstellung. Dem Kenner ist wohl bewusst, dass die Übergänge fließend sind.

Faktor $\underline{G}_d = 1/(1 + j\omega\tau_d)$ mit einem Pol bei $s = -1/\tau_d$

Das Bodediagramm der Funktion $\underline{G}_d(j\omega)$ haben wir bereits in Fig. 6 für $\tau_d = 1/\omega_g = 0.5$ s gezeichnet. Da diese Funktion dem Kehrwert von \underline{G}_c entspricht, führt dies im Bodediagramm einfach zu einer Spiegelung des Diagramms von Fig. 9 an der 0-dB- bzw. 0° -Achse. Alle Aussagen über Asymptoten, Steigungen etc. können sinngemäss von Fig. 9 übernommen werden. Man sagt auch, mit zunehmender Frequenz ergibt der Pol im Amplitudengang einen Knick "nach unten" um -20 dB/DK.

Beispiel 5 Bodediagramm für ein RC-Netzwerk

An einem einfachen elektrischen Netzwerk soll gezeigt werden, wie das Bodediagramm einer Frequenzgangfunktion, wenn sie in **Produktform** dargestellt wird, mit Hilfe der Diagramme der vier Basisfaktoren \underline{G}_a bis \underline{G}_d rasch gezeichnet werden kann. Die Schaltung von Fig. 10 hat für das Spannungsverhältnis U_2/U_1 die Frequenzgangfunktion $\underline{G}_{21}(j\omega)$, welche als komplexer Spannungsteiler berechnet werden kann:

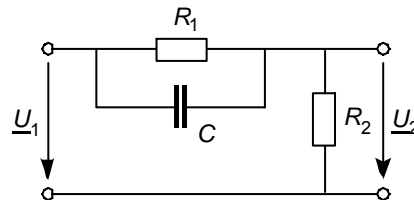


Fig. 10 Schaltungsbeispiel

$$\underline{G}_{21}(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{1/R_1 + j\omega C}} = \frac{R_2 (1 + j\omega CR_1)}{(R_1 + R_2)(1 + j\omega CR_1 R_2 / (R_1 + R_2))}$$

$$\underline{G}_{21}(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2 (1 + j\omega/\omega_1)}{(R_1 + R_2)(1 + j\omega/\omega_2)} = K \frac{(1 + j\omega/\omega_1)}{(1 + j\omega/\omega_2)} = K \frac{(1 + j\omega\tau_1)}{(1 + j\omega\tau_2)} = \frac{b_0 + b_1 j\omega}{a_0 + a_1 j\omega} \quad (48)$$

mit $\omega_1 = \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{CR_1}$, $\omega_2 = \frac{1}{\tau_2} = \frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2}$ und $K = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

und $b_0 = K, b_1 = K\tau_1, a_0 = 1, a_1 = \tau_2$

Diese Frequenzgangfunktion besteht aus dem konstanten Faktor K , einem Faktor \underline{G}_c mit der Grenzfrequenz ω_1 und einem Faktor \underline{G}_d mit der Grenzfrequenz ω_2 . In der logarithmischen Darstellung transformieren sich jetzt die Multiplikationen in der Frequenzgangfunktion in Additionen für die Beträge und die Phasen. Fig. 11 zeigt das Ergebnis der logarithmischen Darstellung der Frequenzgangfunktion obigen Beispiels für die Werte $R_1 = 20$ k Ω , $R_2 = 339$ Ω und $C = 100$ nF. Daraus ergibt sich $\omega_1 = 500$ s $^{-1}$, $\omega_2 = 30'000$ s $^{-1}$, $K = 16.66 \cdot 10^{-3}$, $K_{dB} = -35.6$ dB, $b_0 = 16.66 \cdot 10^{-3}$, $b_1 = 33.33 \cdot 10^{-6}$ s, $a_0 = 1, a_1 = 33.33 \cdot 10^{-6}$ s. 2

² Es handelt sich hier um ein phasenhebendes Netzwerk (Lead-Kompensator), das in der Regelungstechnik oft verwendet wird.

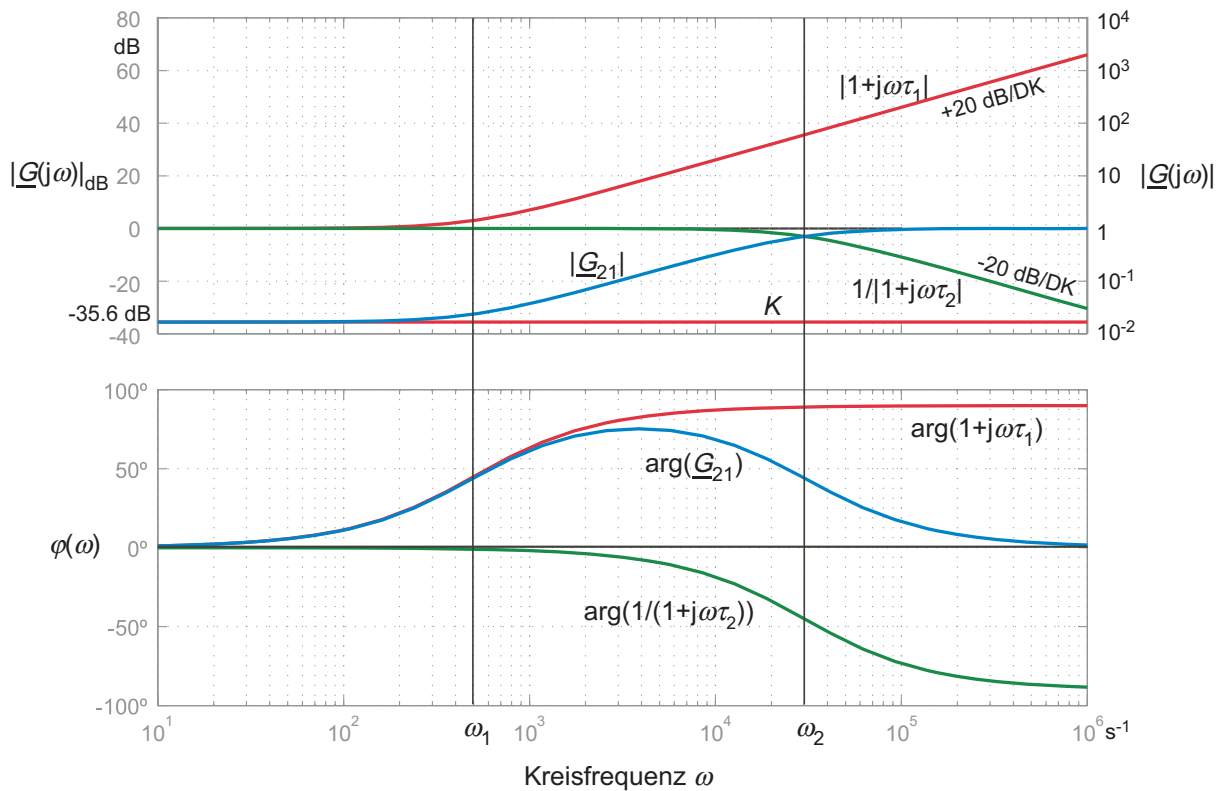


Fig. 11 Konstruktion des Bodediagramms der Frequenzgangfunktion des Beispiels von Fig. 10 aus den Beiträgen der einzelnen Faktoren

Die grosse Bedeutung des Bodediagramms erkennt man auch aus der Tatsache, dass Matlab dafür einen eigenen Befehl `bode` geschaffen hat. Dazu beschreibt man das System z.B. mit den Koeffizienten der Frequenzgangfunktion $\underline{G}(j\omega)$ gemäss Gl. (15). Man muss also die Zerlegung in Faktoren nicht vornehmen. Um das Bodediagramm des Beispiel 5 zu zeichnen, genügt folgendes kurzes Matlabprogramm:

```
%SIN, Beispiel 5

b1= 33.33e-6;           %Koeffizienten der Frequenzgangfunktion
a1=b1;
b0=0.01667;
a0=1;

num=[b1 b0];          %Zähler der Frequenzgangfunktion
den=[a1 a0];          %Nenner der Frequenzgangfunktion
sys=tf(num,den)        %Definition der Frequenzgangfunktion
bode(sys,{10,100000}) %Bodediagramm zeichnen, w = 10 bis 100000 s-1
```

6. Das Bodediagramm für Systeme 2. Ordnung

Die Differentialgleichung für Systeme 2. Ordnung haben wir im Kapitel **Modellbildung** in der Form

$$\ddot{x} + 2 \cdot d \cdot \omega_0 \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = k \cdot \omega_0^2 \cdot u \quad (49)$$

gefunden. Für eine stationäre Anregung erhalten wir daraus nach dem Verfahren von Abschnitt 2 mit den Koeffizienten der Differentialgleichung $a_0 = \omega_0^2$, $a_1 = 2d\omega_0$, $a_2 = 1$ und $b_0 = k\omega_0^2$ die Frequenzgangfunktion.

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{k \cdot \omega_0^2}{(j\omega)^2 + j\omega 2d\omega_0 + \omega_0^2} \quad (50)$$

Wir setzen wieder $j\omega = s$ und zerlegen den Nenner dieser Funktion in Faktoren der Form $(j\omega - \underline{p}_k)$ mit

$$\underline{p}_k = \omega_0 \left(-d \pm \sqrt{d^2 - 1} \right) \quad (51)$$

Für den aperiodischen und grenzperiodischen Fall mit $d \geq 1$ erhalten wir zwei reelle Lösungen. Dann entstehen zwei Faktoren der Form $(j\omega - \underline{p}_k)$, deren Darstellung wir bereits kennen. Andernfalls, nämlich für den periodischen Fall $d < 1$, sind die beiden Wurzeln konjugiert komplex:

$$\underline{p}_k = \omega_0 (-d \pm j\sqrt{1-d^2}) \quad (52)$$

Ausmultipliziert ergeben diese natürlich den Nenner von Gl. (50):

$$(j\omega - \underline{p}_k)(j\omega - \underline{p}_k^*) = (j\omega)^2 - j\omega 2 \operatorname{Re}[\underline{p}_k] + |\underline{p}_k|^2 = (j\omega)^2 + j\omega 2d\omega_0 + \omega_0^2 \quad (53)$$

In diesem Fall lässt sich das Bodediagramm für die Funktion von Gl. (50) nur noch als Ganzes mit den Parametern d und ω_0 zeichnen. Für die folgende Darstellung teilen wir Zähler und Nenner von Gl. (50) durch ω_0^2 und setzen, ohne Verlust an Allgemeingültigkeit, $k = 1$. Wir erhalten so eine weitere Standardfunktion, die wir $\underline{G}_e(j\omega)$ nennen.

$$\underline{G}_e(j\omega) = \frac{1}{(j\omega/\omega_0)^2 + 2d(j\omega/\omega_0) + 1} \quad (54)$$

Zerlegt man diese Funktion in Betrag und Phase, erhält man (bei φ_e den Quadranten beachten):

$$|\underline{G}_e(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2d\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)^2}} \quad \text{und} \quad \varphi_e = -\arctan\left(\frac{2d\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) \quad (55)$$

Das zugehörige Bodediagramm ist in Fig. 12 dargestellt. Diese Frequenzgangfunktion zeigt das typische Verhalten eines Tiefpasses. Man spricht auch vom Frequenzgang des Tiefpasses

2. Ordnung. Er weist bei Frequenzen, die tief sind verglichen mit ω_0 bzw. f_0 , einen konstanten Betrag von 1 oder 0 dB auf, da $k = 1$ gesetzt wurde. Für Frequenzen wesentlich höher als ω_0 fällt der Betrag mit 40 dB/DK ab. Diese abfallende Asymptote schneidet die 0-dB-Linie genau bei ω_0 . In der Nähe von ω_0 erfährt der Betrag für $d < 1/\sqrt{2}$ eine sog. Überhöhung \ddot{u}_0 , die umso grösser ist, je kleiner d ist. Ein Blick auf Gl. (54) zeigt, dass $|\underline{G}(j\omega_0)| = Q = 1/(2d)$ ist. Dieser Überhöhungsfaktor wird auch **Güte des Systems** genannt, die z.B. bei Filtern eine Rolle spielt. Das Maximum der Überhöhung fällt aber nicht genau mit ω_0 zusammen, sondern liegt immer etwas unterhalb davon.

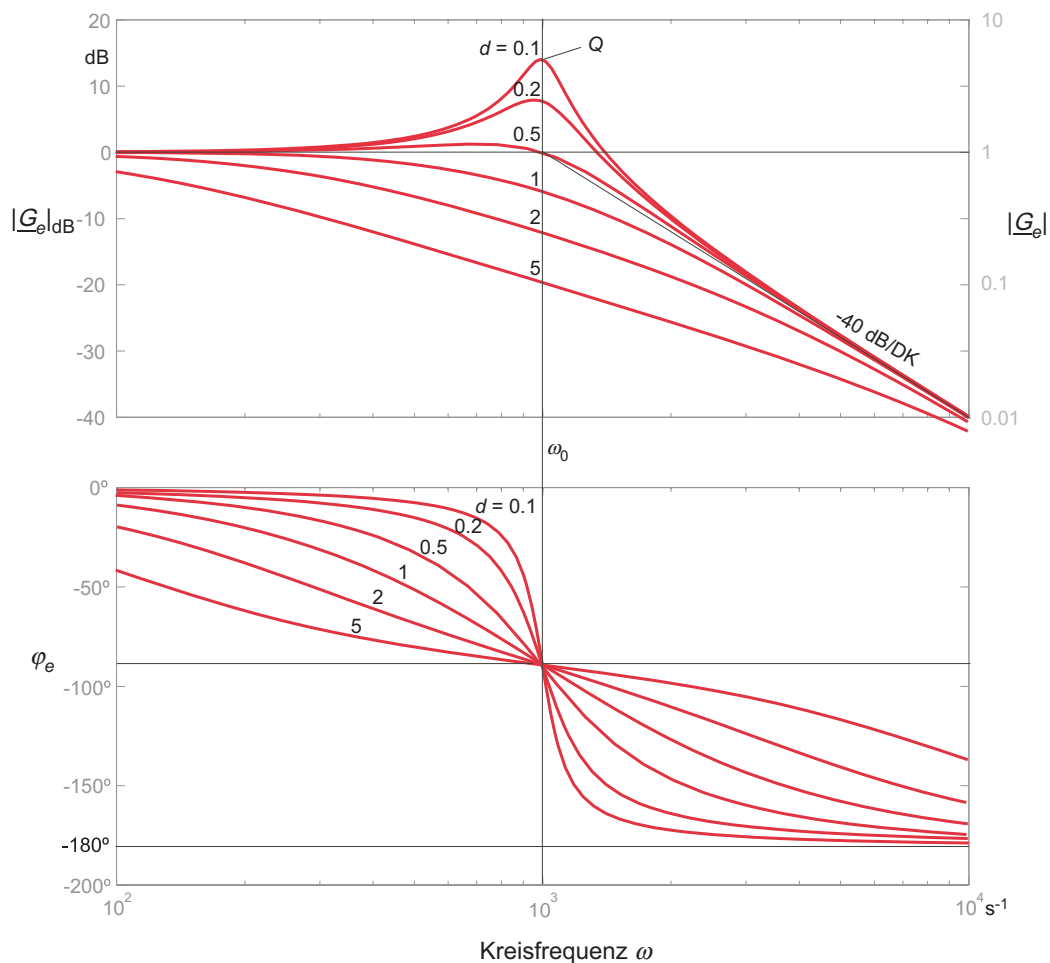


Fig. 12 Bodediagramm des Tiefpasses 2. Ordnung für $\omega_0 = 1000 \text{ s}^{-1}$ mit d als Parameter

Die Phase verläuft von 0° bei $\omega = 0$ gegen $\varphi = -180^\circ$ für ω nach unendlich. Bei ω_0 ist die Phase in allen Fällen -90° . Je kleiner d ist, umso steiler erfolgt der Übergang in der Umgebung von ω_0 .

Für $k \neq 1$ verschiebt sich die Kurve um k_{dB} nach oben oder unten.

Als letzte noch zu behandelnde Funktion bleibt uns die reziproke Funktion von Gl. (54), nämlich

$$\underline{G}_f(j\omega) = (j\omega / \omega_0)^2 + 2d(j\omega / \omega_0) + 1 \quad (56)$$

Wir sparen uns ihre Darstellung, da wir sie aus der Spiegelung des Bodediagramms von $\underline{G}_e(j\omega)$ an den Achsen mit $|G|_{\text{dB}} = 0$ dB für den Betrag bzw. $\varphi = 0^\circ$ für die Phase erhalten.

Beispiel 6 Masse-Feder-Dämpfer-Glied

Wir kehren zurück zum Masse-Feder-Dämpfer-Glied aus dem **Kapitel Modellbildung**. Dort haben wir für die Auslenkung x der Masse m aus der Gleichgewichtslage x_G die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \frac{e}{m} \dot{x} + \frac{f}{m} x = \frac{F_e}{m} \quad (57)$$

gefunden (e = Dämpfungskoeffizient, f = Federkonstante und F_e = extern aufgebrachte Kraft auf die Feder). Nun nehmen wir an, die externe Kraft eines Linearmotors werde sinusförmig mit variabler Frequenz variiert. Damit wird eine Analyse im Frequenzbereich sinnvoll. Wir lösen die Differentialgleichung wieder mit einem Ansatz mit sinusförmigen Grössen für die Kraft F_e und den Weg x . Beide Grössen schreiben wir mit komplexen Drehzeigern unter Verwendung der Festzeiger $\underline{F}_e(j\omega)$ für die Kraft bzw. $\underline{X}(j\omega)$ für den Weg. Damit können die zwei Ableitungen von x berechnet und in Gl. (57) eingesetzt werden. Schliesslich erhalten wir die Gleichung

$$\underline{X}(j\omega) = \underline{F}_e \frac{1/m}{(j\omega)^2 + \frac{e}{m}j\omega + \frac{f}{m}} = \underline{F}_e \frac{1/f}{\frac{m(j\omega)^2}{f} + \frac{e}{f}j\omega + 1} \quad (58)$$

Mit den bereits früher eingeführten Abkürzungen gelangen wir wieder zur Normdarstellung

$$\begin{aligned} \frac{f}{m} &:= \omega_0^2 & \Rightarrow \omega_0 &= \sqrt{\frac{f}{m}} \\ \frac{e}{m} &:= 2d\omega_0 & \Rightarrow d &= \frac{e}{2\omega_0 m} = \frac{e}{2\sqrt{fm}} \\ \frac{1}{m} &:= k\omega_0^2 & \Rightarrow k &= \frac{1}{\omega_0^2 m} = \frac{1}{f} \end{aligned}$$

$$\underline{G}_x(j\omega) = \frac{\underline{X}(j\omega)}{\underline{F}_e(j\omega)} = \frac{k\omega_0^2}{(j\omega)^2 + 2d\omega_0(j\omega) + \omega_0^2} = \frac{k}{(j\omega/\omega_0)^2 + 2d(j\omega/\omega_0) + 1} \quad (59)$$

Die Darstellung dieser Frequenzgangfunktion ergibt, abgesehen vom Faktor k , der zu einer vertikalen Verschiebung entsprechend der Verstärkung bei kleinen Frequenzen führt, genau das Bild von Fig. 12.

Nun möchten wir aber zusätzlich noch den Quotienten der Geschwindigkeit der Masse zur externen Kraft darstellen. Für diese gilt $v = \dot{x}$, oder wenn wir diese Beziehung auch für sinusförmige Bewegungen schreiben:

$$\underline{V}(j\omega) = j\omega \cdot \underline{X}(j\omega) \quad (60)$$

mit \underline{V} = komplexer Festzeiger der Geschwindigkeit. Setzen wir die Gl. (60) in Gl. (59) ein, so erhalten wir die Frequenzgangfunktion für das Verhältnis von Geschwindigkeit \underline{V} zu Kraft \underline{F}_e :

$$\underline{G}_v(j\omega) = \frac{\underline{V}(j\omega)}{\underline{E}_e(j\omega)} = \frac{k \cdot j\omega}{(j\omega/\omega_0)^2 + 2d(j\omega/\omega_0) + 1} \quad (61)$$

Diese Gleichung setzt sich neu aus einem Faktor \underline{G}_a , siehe Gl. (41), und einem Faktor \underline{G}_e , siehe Gl. (54), zusammen. Das zugehörige Bodediagramm können wir durch Addition der Diagramme der beiden Faktoren konstruieren. Den Zähler formen wir noch leicht um, um den Quotienten ω/ω_0 zu erhalten:

$$k \cdot j\omega = \frac{1}{\omega_0 m} \cdot \frac{j\omega}{\omega_0} = K \frac{j\omega}{\omega_0} \quad (62)$$

Damit erhalten wir eine Konstante $K = 1/(\omega_0 m)$ und dazu einen Faktor \underline{G}_a , der gerade bei ω_0 die Verstärkung 1 hat. Wir schreiben Gl. (61) somit in der Form

$$\underline{G}_v(j\omega) = \frac{\underline{V}(j\omega)}{\underline{E}_e(j\omega)} = K \frac{j\omega/\omega_0}{(j\omega/\omega_0)^2 + 2d(j\omega/\omega_0) + 1} \quad (63)$$

Damit kann das Bodediagramm besonders einfach aus den Normfaktoren zusammengesetzt werden, wie Fig. 13 dies zeigt.

Es entsteht ein bezüglich ω_0 symmetrisches Bodediagramm für den Betrag mit Asymptoten mit der Steigung +20 dB/DK unterhalb ω_0 und -20 dB/DK oberhalb ω_0 . Beide kreuzen sich im Punkt $\{\omega_0 \ 0 \text{ dB}\}$. Bei ω_0 selber ist der Wert des Betrags wie bei der Funktion \underline{G}_e $1/2d$. Durch den Faktor K wird das Diagramm des Betrags einfach um $20 \log(K)$ vertikal verschoben. Zusammen wird damit der Betrag bei ω_0 $K/(2d) = 12.5 \square 22 \text{ dB}$. Man könnte auch sagen, dass die Funktion \underline{G}_a die ursprüngliche Asymptote von \underline{G}_e bei tiefen Frequenzen um 20 dB/DK nach unten drückt und bei hohen Frequenzen wird sie um 20 dB/DK nach oben gedrückt, oder \underline{G}_e wird um 20 dB/DK im Gegenuhrzeigersinn gekippt.

Bei der Phase sind die Zusammenhänge noch einfacher. Durch den Faktor \underline{G}_a im Zähler wird die Phase φ_v gegenüber φ_e um 90° zu positiven Werten verschoben. Sie verläuft von $+90^\circ$ bei sehr tiefen Frequenzen über 0° bei ω_0 zu -90° bei sehr grossen Frequenzen.

Einer der wichtigsten Vorteile des Bodediagramms steckt in der Möglichkeit, Teildiagramme, die zu Faktoren der Frequenzgangfunktion gehören, direkt addieren zu können. Voraussetzung dafür ist, dass die Frequenzgangfunktion in Faktoren zerlegt werden kann. Für ein lineares zeitinvariantes System haben wir gezeigt, wie die Frequenzgangfunktion in die elementaren Faktoren \underline{G}_a bis \underline{G}_f zerlegt werden kann. Andererseits werden oft einzelne **Teilsysteme kaskadiert**, von denen die Bodediagramme bekannt sind. Falls die gesamte Frequenzgangfunktion als **Produkt der Teilfunktionen** gebildet werden kann, lässt sich dann das Bodediagramm der Gesamtfunktion wieder als Summe der Teil-Bodediagramme konstruiert.

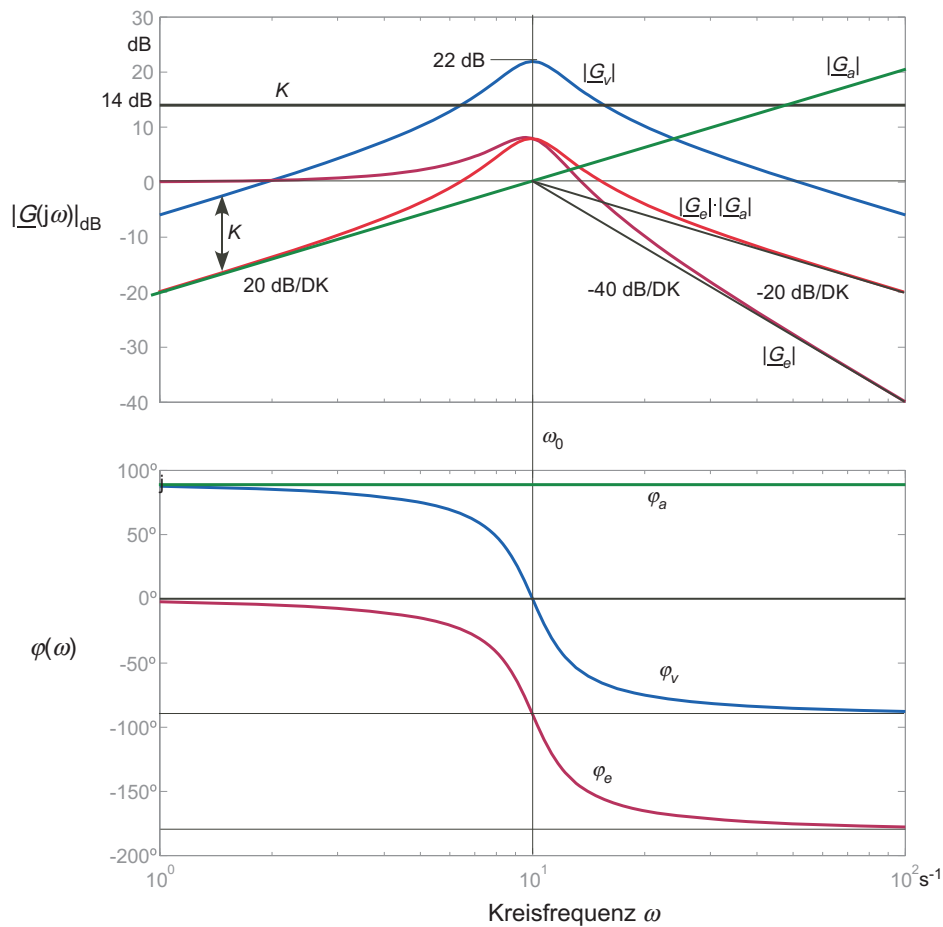


Fig. 13 Bodediagramm für das Verhältnis $\underline{G}_v(j\omega) = \underline{V}/\underline{F}_e$ im Masse-Feder-Dämpfer-Glied mit $\omega_0 = 10 \text{ s}^{-1}$, $d = 0.2$ und $K = 5 \text{ m}/(\text{sN})$

7. Das Nyquistdiagramm (Ortskurve)

Im Bodediagramm werden Amplituden- und Phasengang getrennt in Funktion der logarithmierten Frequenz aufgetragen. Komplexe Funktionen wie $\underline{G}(j\omega)$ lassen sich aber auch als Kurve in der komplexen Ebene aufzeichnen. Die Kreisfrequenz ω ist dabei ein Kurvenparameter. Die entstehende Grafik nennt man eine Ortskurve und im speziellen Fall eines Frequenzgangs hat man ihr nach ihrem Begründer H. Nyquist den Namen **Nyquistdiagramm** gegeben.

Die Frequenzgangfunktion $\underline{G}(j\omega)$ lässt sich nach Gl. (23) aufteilen in Real- und Imaginärteil oder nach Gl. (24) in Polarform schreiben. Beide Formen eignen sich, um für beliebige Frequenzen die komplexe Grösse in einer $\underline{G}(j\omega)$ -Ebene einzutragen, wie dies in Fig. 14 dargestellt ist.

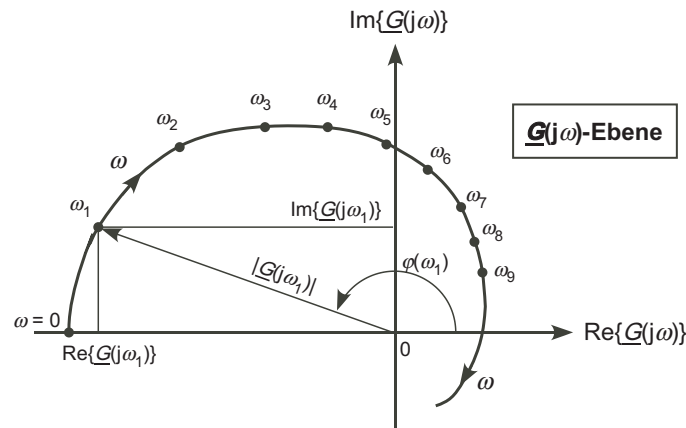


Fig. 14 Das Nyquistdiagramm (Ortskurve) einer Frequenzgangfunktion $\underline{G}(j\omega)$

Für das Nyquistdiagramm zeichnet man die Zeiger bzw. deren Endpunkte für eine grosse Zahl von Frequenzen in der komplexen Ebene ein. Dann verbindet man diese miteinander und erhält so eine kontinuierliche Kurve mit dem Laufparameter f oder ω . In dieser Darstellung gewinnt man sehr rasch einen Überblick über den Verlauf der Frequenzgangfunktion. Dafür ist sie weniger gut geeignet, wenn man für bestimmte Frequenzen genaue Werte für Betrag und Phase oder Real- und Imaginärteil herauslesen will.

Beispiel 7 Nyquistdiagramm des RC-Glieds

Wir nehmen nochmals unser einfaches Beispiel des RC-Glieds von Fig. 3 mit seiner Frequenzgangfunktion

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau},$$

die wir nach Betrag und Phase aufteilen:

$$|\underline{G}(j\omega)| = \frac{1}{|1 + j\omega\tau|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \tag{64}$$

$$\varphi(\omega) = 0 - \arg\{1 + j\omega\tau\} = -\arctan(\omega\tau)$$

Zeichnet man das zugehörige Nyquistdiagramm für positive Frequenzen, so erhält man den Halbkreis von Fig. 15. Variiert man ω von $-\infty$ bis 0, so erhält man das Spiegelbild bezüglich der reellen Achse der bereits gezeichneten Ortskurve. Dies ist eine Folge von Gl. (31). Die Ortskurve einer Frequenzgangfunktion ist immer symmetrisch bezüglich der reellen Achse, wenn man die Frequenz von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen lässt.

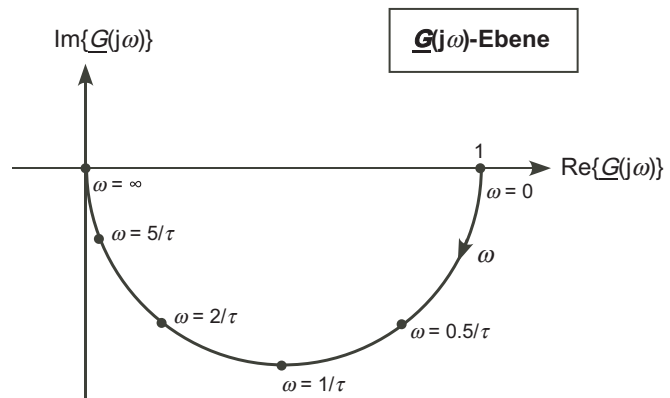


Fig. 15 Nyquistdiagramm zum Beispiel von Fig. 3

Zur Aufzeichnung der Ortskurven verwendet man am einfachsten ein Mathematikprogramm, beispielsweise Matlab (der Befehl lautet `nyquist(...)`, mit dem auch negative Frequenzen aufgezeichnet werden). Aber auch ohne Programm kann man ohne grosse Berechnungen mit Hilfe von ein paar einfachen Regeln schon einiges über die Ortskurve aussagen. Dazu gehen wir von der Produktform Gl. (38) aus, die wir hier mit Faktoren 1. Ordnung ausschreiben:

$$\underline{G}(j\omega) = K \frac{(1 + j\omega\tau_{z1})(1 + j\omega\tau_{z2}) \cdots \cdots}{(j\omega)^\alpha (1 + j\omega\tau_{p(\alpha+1)})(1 + j\omega\tau_{p(\alpha+2)}) \cdots \cdots} \quad (65)$$

Die α Zeitkonstanten der Integratoren (Glieder vom Typ \underline{G}_b) seien der Einfachheit halber in K enthalten. Die Nummerierung der Pole setzt sich daher nach α fort, also $\alpha + 1$ etc. Die Grösse α bezeichnet man auch als Integratorüberschuss (dabei sind allfällige $j\omega$ -Terme im Zähler (\underline{G}_a) bereits gekürzt).

Grad des Zählers = L

Grad des Nenners = N mit $N \geq L$

$N-L$ wird als Polüberschuss bezeichnet.

Es gilt:

- a) Schnittpunkte mit der reellen Achse:

$$\text{Im}\{\underline{G}(j\omega)\} = 0$$

- b) Schnittpunkte mit der imaginären Achse

$$\text{Re}\{\underline{G}(j\omega)\} = 0$$

- c) Phase der Ortskurve für $\omega \rightarrow 0$:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \alpha$$

- d) Phase der Ortskurve für $\omega \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} (N - L)$$

Diese Regeln für das asymptotische Verhalten der Phase gelten natürlich auch für das Bode-diagramm.

Beispiel 8 Nyquistdiagramm eines Systems mit einfachen Nullstellen und Polen

$$\underline{G}(j\omega) = K \frac{(1 + j\omega\tau_{z1})}{(1 + j\omega\tau_{p1})(1 + j\omega\tau_{p2})(1 + j\omega\tau_{p3})} \quad (66)$$

mit $\tau_{p1} < \tau_{p2} < \tau_{z1} < \tau_{p3}$

Dieser Frequenzgang soll mit konkreten Zahlen für die Zeitkonstanten τ_i und K dargestellt werden. Wählt man $K = 2$, $\tau_{p1} = 10 \mu\text{s}$, $\tau_{p2} = 50 \mu\text{s}$, $\tau_{z1} = 200 \mu\text{s}$ und $\tau_{p3} = 2 \text{ ms}$, so findet man das Bode- und Nyquistdiagramm von Fig. 16. In diesem Beispiel ist $N = 3$, $L = 1$ und $\alpha = 0$. Mit Hilfe der oben gefundenen Regeln und Standardwissen aus dem Gebiet der Kurvendiskussionen erhält man:

$$\omega \rightarrow 0: \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \alpha \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} |\underline{G}(j\omega)| = K$$

$$\omega \rightarrow \infty: \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \cdot 2 = -\pi \quad \text{und} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} |\underline{G}(j\omega)| = 0$$

Man beachte besonders, dass die Phase für $\omega \rightarrow \infty$ mit $-\pi$ in den Ursprung läuft.

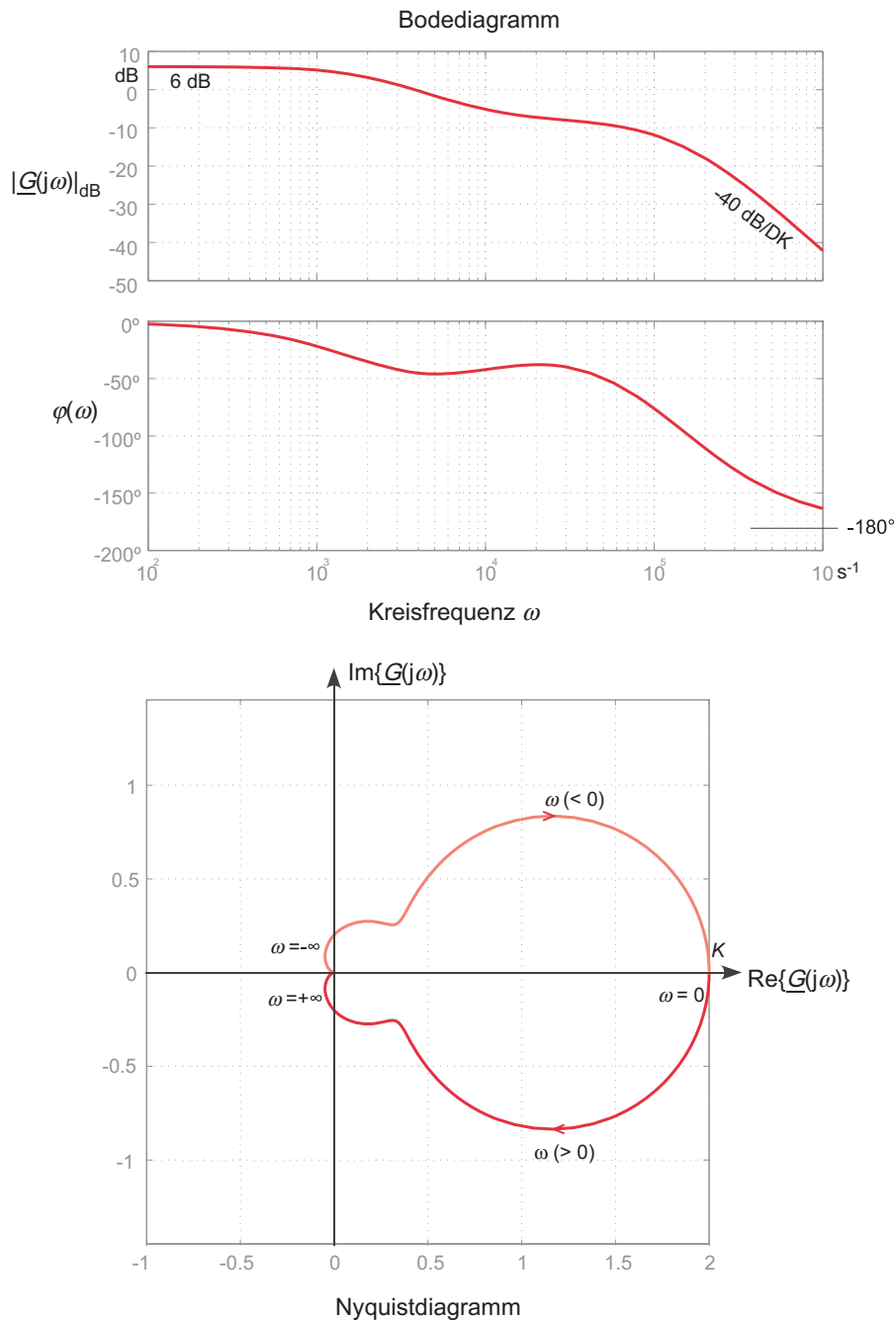


Fig. 16 Bode- und Nyquistdiagramm zur Frequenzgangfunktion von Gl. (66)

8. Schlussbemerkungen

Neu in diesem Kapitel haben wir das System sinusförmig angeregt und uns nur für den stationären Zustand, also jenen nach Abklingen des Einschwingvorgangs interessiert. Das Ausgangssignal ist daher ebenfalls sinusförmig und das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangssignal ist durch den frequenzabhängigen komplexen Frequenzgang $G(\omega)$ gegeben. Diese Funktion kann direkt aus den Koeffizienten der Differentialgleichung des Systems bestimmt

werden. Sie ist, nicht überraschend, identisch mit der den Elektroingenieuren aus der komplexen Wechselstromlehre bekannten Frequenzgangfunktion.

Ganz wichtig ist der Zusammenhang der Frequenzgangfunktion mit der Stossantwort des Systems: Die beiden bilden ein Fouriertransformationspaar

$$g(t) \quad \longleftrightarrow \quad \underline{G}(j\omega)$$

Die Frequenzgangfunktion kann auf vielfältige Art grafisch dargestellt werden. Da es sich um eine komplexe frequenzabhängige Funktion handelt, sind zur Darstellung der Frequenzabhängigkeit immer zwei reelle Darstellungen notwendig. Als Alternative bietet sich die Darstellung als Ortskurve an.

Folgende Darstellungen werden gebraucht:

- Real- und Imaginärteil in Funktion der Frequenz
- Betrag und Phase in Funktion der Frequenz
- Betrag und Phase in einer doppelt- bzw. einfach logarithmischen Darstellung, das sog. Bodediagramm
- Das Nyquistdiagramm, welches der Ortskurvendarstellung von $\underline{G}(j\omega)$ in der komplexen Zahlenebene entspricht.

Das Bodediagramm ist besonders beliebt, da es eine grosse Reihe von Vorteilen besitzt. Liegt die Frequenzgangfunktion als Produkt von Faktoren vor, so können diese im Bodediagramm direkt addiert werden. Kann beispielsweise die Frequenzgangfunktion einer Kaskade von Teilsystemen als Produkt von Teilfrequenzgangfunktionen beschrieben werden, können deren Bodediagramme direkt zum Gesamtdiagramm addiert werden. Dasselbe Verfahren kann auch auf ein einzelnes System angewandt werden, wenn dessen Frequenzgangfunktion in elementare Faktoren zerlegt wird. Wir haben 6 verschiedene Norm-Faktoren kennen gelernt, mit denen alle linearen, zeitinvarianten Frequenzgangfunktionen dargestellt werden können.

9. Zusammenfassung

Beziehung zwischen Differentialgleichung und Frequenzgangfunktion

Zur Differentialgleichung
$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k x}{dt^k} = \sum_{k=0}^L b_k \frac{d^k u}{dt^k}$$

gehört die Frequenzgangfunktion
$$\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{X}}{\underline{U}} = \frac{\sum_{k=0}^L b_k \cdot (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k \cdot (j\omega)^k}$$

Zusammenhang zwischen Stossantwort und Frequenzgangfunktion

Die Frequenzgangfunktion ist die Fouriertransformierte der Stossantwort

$$\underline{G}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \quad \underline{G}(j\omega) \longleftrightarrow g(t)$$

Eigenschaften der Frequenzgangfunktion

$$\underline{G}(-j\omega) = \underline{G}(j\omega)^*$$

$\text{Re}\{\underline{G}(\omega)\}$ und $|\underline{G}(\omega)|$ sind gerade Funktionen von ω

$\text{Im}\{\underline{G}(\omega)\}$ und $\arg\{\underline{G}(\omega)\}$ sind ungerade Funktionen von ω

Darstellungsarten der Frequenzgangfunktion

$$\underline{G}(f) = \text{Re}\{\underline{G}(f)\} + j\text{Im}\{\underline{G}(f)\} = |\underline{G}(f)| e^{j\varphi}$$

a) Zwei skalare Darstellungen aufgeteilt nach Real- und Imaginärteil

$$\text{Re}\{\underline{G}(f)\}$$

$$\text{Im}\{\underline{G}(f)\}$$

b) Zwei skalare Darstellungen aufgeteilt nach Betrag und Phase

$$|\underline{G}(f)| = \sqrt{(\text{Re}\{\underline{G}(f)\})^2 + (\text{Im}\{\underline{G}(f)\})^2}$$

$$\varphi(f) = \arctan \frac{\text{Im}\{\underline{G}(f)\}}{\text{Re}\{\underline{G}(f)\}}$$

c) Das Bodediagramm, eine logarithmische Darstellung

$$\text{Frequenzachse} \quad f_{\log} = \log(f/f_{\text{bez}}) \text{ bzw. } \omega_{\log} = \log(\omega/\omega_{\text{bez}})$$

$$\text{Amplitudengang} \quad G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \cdot \log \frac{|\underline{G}(j\omega)|}{G_{\text{bez}}}$$

$$\text{Phasengang} \quad \varphi(j\omega) = \arg\{\underline{G}(j\omega)\}$$

Bodediagramm eines Produkts von Teilfunktionen

Für $\underline{G}(f) = \prod_{k=1}^n \underline{G}_k(f)$ gilt:

$$\text{Amplitudengang} \quad G_{\text{dB}}(f) = 20 \sum_{k=1}^n \log \frac{|\underline{G}_k(f)|}{G_{\text{bez}}}$$

$$\text{Phasengang} \quad \varphi(f) = \sum_{k=1}^n \arg \{ \underline{G}_k(f) \}$$

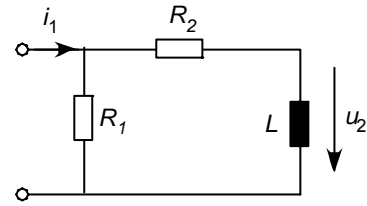
d) Nyquistdiagramm, Ortskurvendarstellung von $\underline{G}(j\omega)$ mit dem Kurvenparameter ω

Polardarstellung mit dem Betrag $|\underline{G}(j\omega)|$ und der Phase $\arg \{ \underline{G}(j\omega) \}$

Aufgaben

1. Gegeben das elektrische RL-Netzwerk von Fig. 17. Dabei sei i_1 die Inputgrösse des Systems.

Fig. 17 RL-Netzwerk



- a) Man bestimme die Frequenzgangfunktion $\underline{Z}_{21}(j\omega) = \underline{U}_2/\underline{I}_1$.
- b) Wie lautet die DGL. für dieses System?
- c) Man zeichne das Bodediagramm und die Ortskurve für $\underline{Z}_{21}(j\omega)$ für $R_1 = 500 \Omega$, $R_2 = 200 \Omega$ und $L = 1 \text{ mH}$.
2. Das Torsionspendel (Aufgabe 4, **Kapitel Modellbildung**) wird durch die DGL.

$$J \cdot \ddot{\varphi} + R \cdot \dot{\varphi} + D \cdot \varphi = M(t)$$

beschrieben mit J = Trägheitsmoment, R = Reibungskoeffizient und D = Torsionskonstante des Pendels. An dieses wird das äussere Drehmoment $M(t)$ angelegt.

- a) Wie lautet die Frequenzgangfunktion $\underline{G}(j\omega) = \underline{\Phi}(j\omega)/\underline{M}(j\omega)$? Dabei sind $\underline{\Phi}(j\omega)$ und $\underline{M}(j\omega)$ die Festzeiger für $\varphi(t)$ bzw. $M(t)$ bei einer sinusförmigen Anregung. Diese könnte z.B. mit einem kleinen Elektromotor erfolgen, welcher ein periodisch wechselndes Drehmoment erzeugt.
- b) Man zeichne das Bodediagramm und die Ortskurve für $\underline{G}(j\omega)$ mit folgenden numerischen Zahlenwerten: $J = 10^{-3} \text{ kgm}^2$, $D = 0.5 \text{ Nm/rad}$ und $R = 8 \cdot 10^{-3} \text{ Nm/(rad/s)}$.

3. Gegeben ist die Frequenzgangfunktion

$$\underline{G}(j\omega) = K \frac{(1 + j\omega\tau_{z1})}{j\omega(1 + j\omega\tau_{p1})}$$

mit $K = 50$, $\tau_{z1} = 0.01 \text{ s}$ und $\tau_{p1} = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ s}$

- a) Gesucht sind das Bodediagramm und die Ortskurve für diese Frequenzgangfunktion.
- b) Um welchen Faktor müsste $\underline{G}(j\omega)$ ergänzt werden, damit diese Frequenzgangfunktion für $\omega < 10 \text{ s}^{-1}$ auf einen konstanten Wert einschwenkt?
4. Von einem System kennt man sein Bodediagramm, Fig. 18. Man versuche daraus die Frequenzgangfunktion und die DGL. des Systems zu gewinnen.

Hinweise: Man versucht, die vorliegende Betragskurve mit Geraden der zulässigen Steigungen von $n \cdot 20 \text{ dB/DK}$ mit $n = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ zu approximieren. Aus den Schnitt-

punkten der verschiedenen Geraden lassen sich dann die Eckfrequenzen der einzelnen Faktoren herauslesen (Knick "nach oben" für Nullstellen, Knick "nach unten" für Pole).

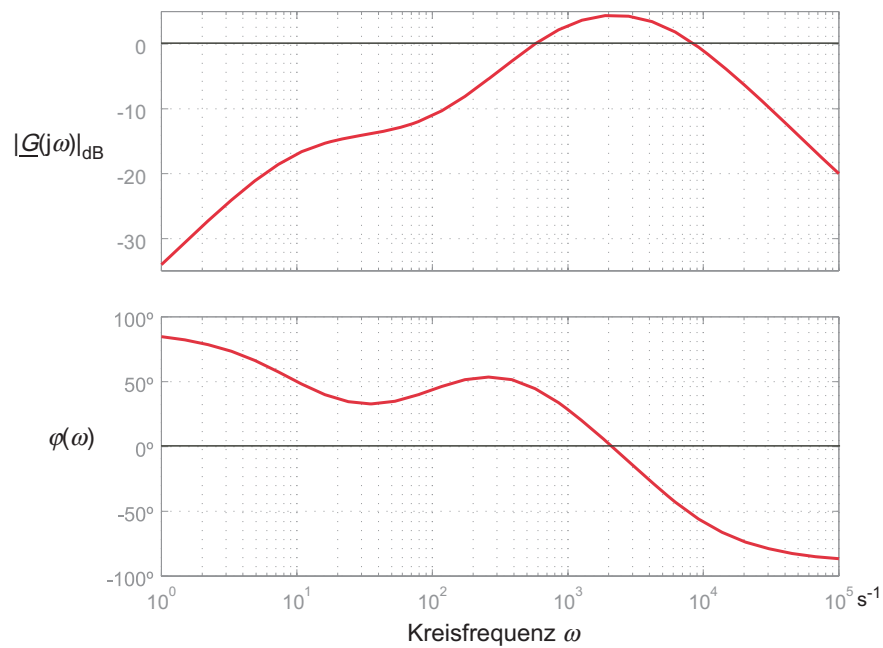


Fig. 18 Ein gegebenes Bodediagramm

Lösungen

1. a) $Z_{21}(j\omega) = R_1 \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$ mit $\tau = L/(R_1 + R_2)$

b) $\tau \cdot \dot{u}_2 + u_2 = R_1 \tau \cdot \dot{i}_1$

c)

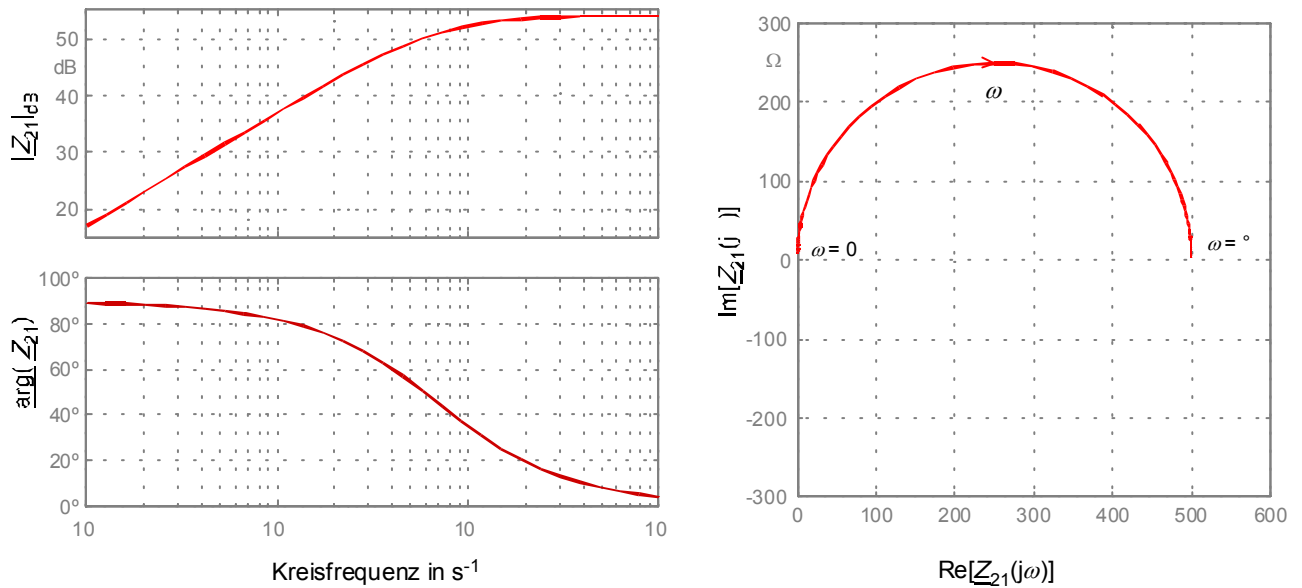


Fig. 19 Bodediagramm und Ortskurve zu Aufgabe 1

2. a) $G(j\omega) = \frac{1}{\frac{R}{J}(j\omega)^2 + \frac{D}{J}(j\omega) + \frac{D}{J}}$

b) $\omega_0 = 22.36 \text{ s}^{-1}$

$d = 0.179 < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$G(j\omega)$ hat eine Überhöhung $Q = 1/(2d) = 2.79$ (8.9 dB)

$k = 2 \square 6 \text{ dB}$

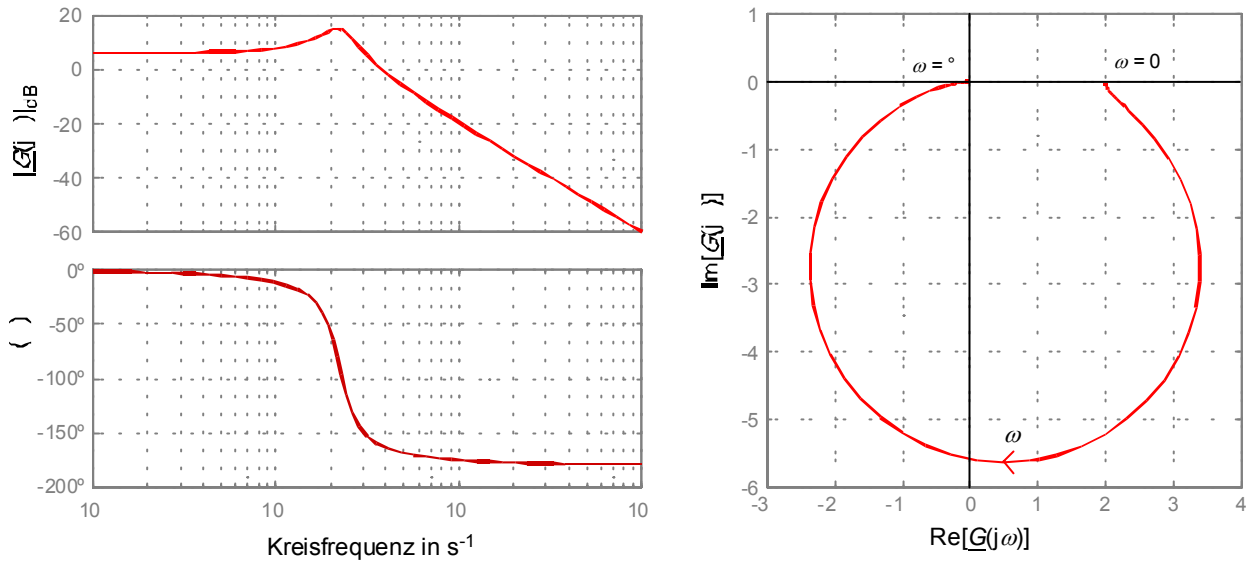


Fig. 20 Bodediagramm und Ortskurve zu Aufgabe 2

3. a) $\alpha = 1, L = 1, N = 2$

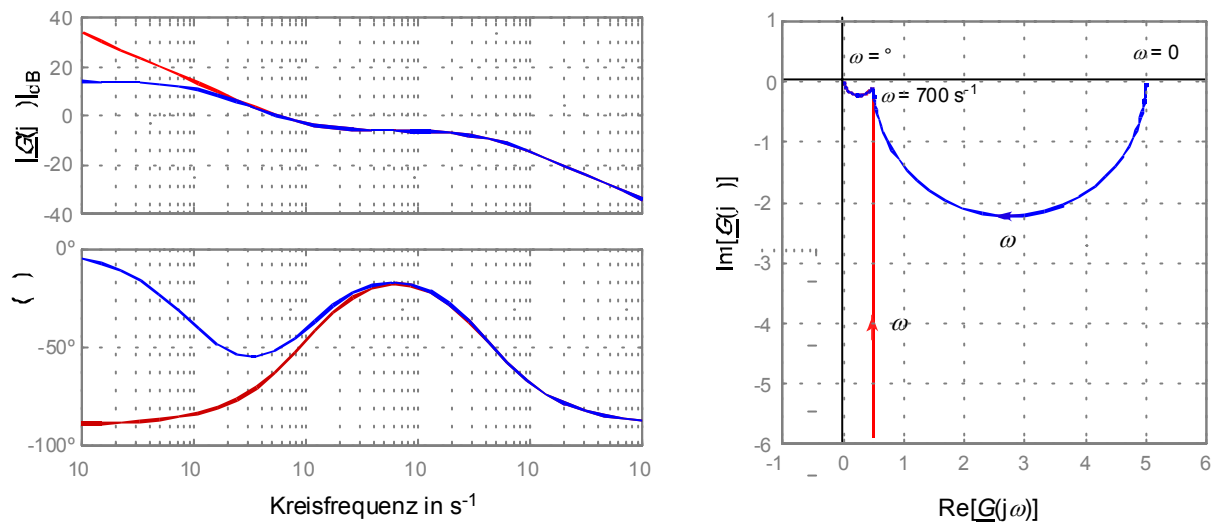


Fig. 21 Bodediagramm und Ortskurve zu Aufgabe 3, Lösung zu Aufgabe a) = rot, Lösung zu Aufgabe b) = blau

b) Die Frequenzgangfunktion müsste mit dem Faktor

$$\frac{j\omega\tau_{p2}}{1+j\omega\tau_{p2}} \quad \text{mit } \tau_{p2}=0.1\text{s}$$

ergänzt werden, welcher bis zur Kreisgrenzfrequenz $\omega_{p2} = 1/\tau_{p2} = 10 \text{ s}^{-1}$ mit 20 dB/DK ansteigt und anschliessend auf den konstanten Wert 1 übergeht. Damit erhält man die neue Frequenzgangfunktion

$$\underline{G}(j\omega) = K\tau_{p2} \frac{(1 + j\omega\tau_{z1})}{(1 + j\omega\tau_{p2})(1 + j\omega\tau_{p1})}$$

4.

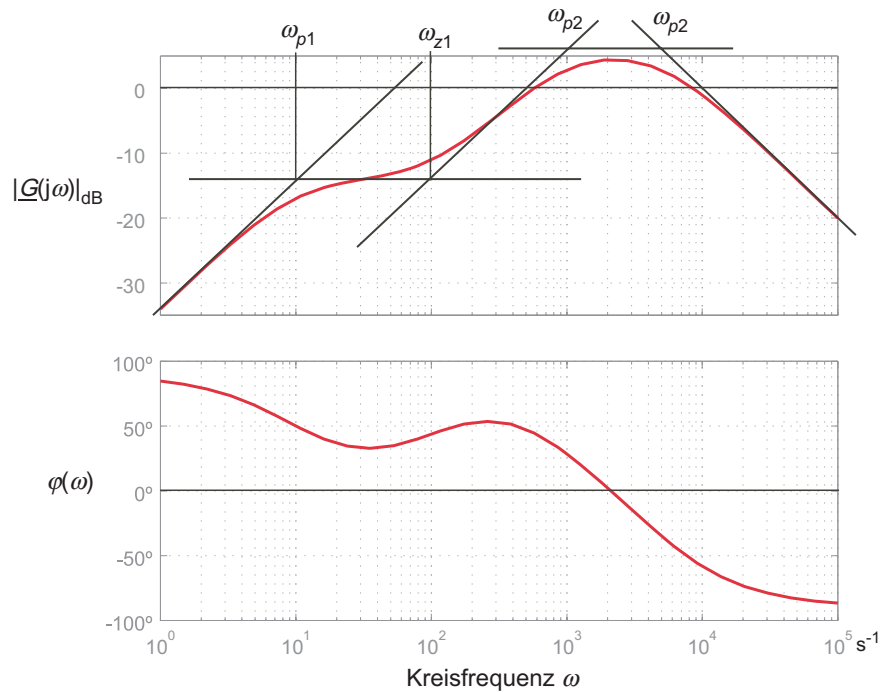


Fig. 22 Bodediagramm mit eingefügten Asymptoten

Aus den in Fig. 22 eingezeichneten Geraden resultieren die Schnittpunkte mit den Eckfrequenzen ω_{z1} , ω_{p1} , ω_{p2} und ω_{p3} . Damit lässt sich die Frequenzgangfunktion anschreiben:

$$\underline{G}(j\omega) = K \frac{j\omega(1 + j\omega\tau_{z1})}{(1 + j\omega\tau_{p1})(1 + j\omega\tau_{p2})(1 + j\omega\tau_{p3})}$$

mit $\omega_{z1} = 100$ s $^{-1}$, $\omega_{p1} = 10$ s $^{-1}$, $\omega_{p2} = 1000$ s $^{-1}$ und $\omega_{p3} = 5000$ s $^{-1}$ sowie $K = 0.02$.

Eine Simulation, beispielsweise mit Matlab, bestätigt sowohl den Amplituden wie den Phasengang.

Differentialgleichung:

$$\tau_{p1}\tau_{p2}\tau_{p3} \cdot \ddot{y} + [\tau_{p1}\tau_{p2} + \tau_{p1}\tau_{p3} + \tau_{p2}\tau_{p3}] \dot{y} + [\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3}] y = K \cdot \dot{u} + K\tau_{z1} \cdot \ddot{u}$$

Hinweis: Es gibt Frequenzgangfunktionen mit identischem Amplitudengang aber unterschiedlichem Phasengang. Damit die Frequenzgangfunktion tatsächlich richtig gebildet wird, muss deshalb auch der Phasengang auf korrekte Wiedergabe überprüft werden. Warum die Phasengänge unterschiedliche ausfallen können, geht über den hier behandelten Stoff hinaus.