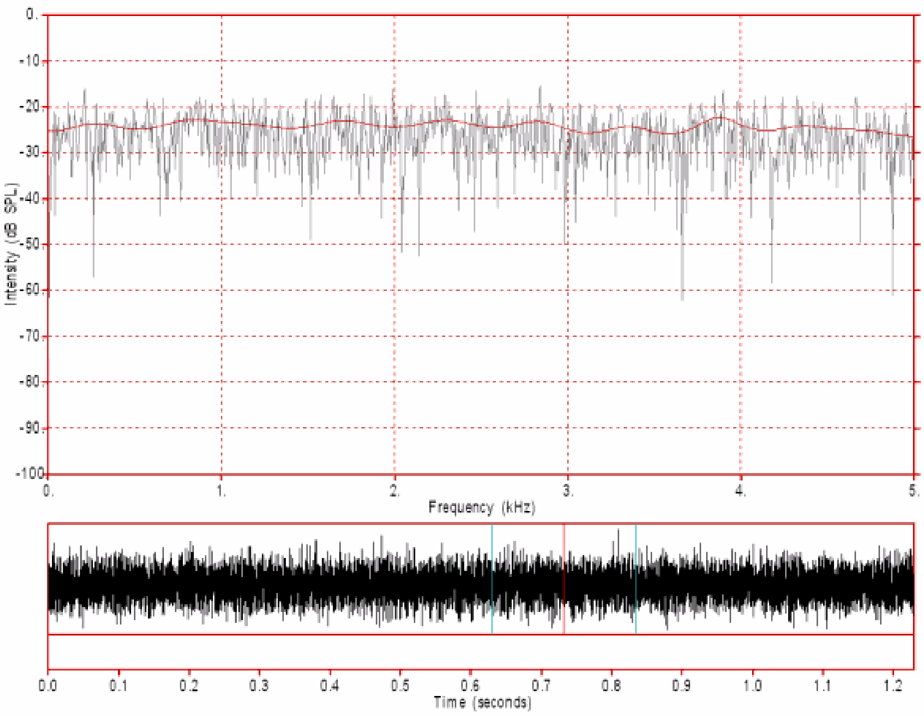
Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften
School of Engineering

Kapitel 4: Rauschen



Inhaltsverzeichnis

4.1. Übersicht

Jede Signalübertragung wird in mehr oder weniger ausgeprägtem Mass durch Störungen beeinträchtigt. Man unterscheidet vier Hauptarten von Störungen:

1. **Übersprechen (Interferenz):** Eindringen von fremden Nachrichtensignalen in den Übertragungskanal durch elektromagnetische Kopplung in Kabeln, Überlappung von Nachbarspektren in FDMA-Systemen oder ungenügende Orthogonalität der Codes in CDMA-Systemen.
2. **Linienstörer:** Periodische oder quasiperiodische Signale, herrührend von Elektromotoren, Zündungen bei Autos, industriellen HF-Geräten, Mikrowellenöfen, sowie Netzbrumm, Oberwellen, usw.
3. **Rauschen:** Thermisches Rauschen, Stromrauschen, kosmisches Rauschen, 1/f-Rauschen, usw.
4. **Bursts**: Gewitterentladungen, Funkenbildung bei Schaltvorgängen, Wackelkontakte, Durchschläge, usw.

Als Mass für die Qualität einer Signal- oder Nachrichtenverbindung hat sich der *Störabstand S/N* eingebürgert, wobei *S* für die *Signalleistung* und *N* für die *Störleistung* steht. Handelt es sich bei der Störung um Rauschen, so spricht man auch vom *Signal zu Geräuschverhältnis S/N* (engl. *signal to noise ratio*). Bei schwachen Signalpegeln sinkt das S/N und es treten in digitalen Kommunikationssystemen auf Grund der Störungen *Bitfehler* auf. Für alle gängigen Modulations- und Detektionsarten gibt es eine direkte Verknüpfung zwischen dem Wert des S/N und der *Bitfehlerrate BER* (engl. *bit error ratio*), d.h. der Anzahl fehlerhaften Bits im Verhältnis zu allen gesendeten Bits. Wenn man also in einem Übertragungssystem das Signal zu Geräuschverhältnis kennt, kann man direkt Rückschlüsse auf die zu erwartenden Bitfehler ziehen.

4.2. Thermisches Rauschen

Das *thermische Rauschen* oder *Widerstandsrauschen* nimmt einen zentralen Platz bei der Dimensionierung von Übertragungssystemen ein. Im Gegensatz zum Übersprechen und allfälligen Linienstörern ist es garantiert immer vorhanden, kann relativ gut modelliert werden und bildet eine natürliche untere Schwelle für das S/N in einem Kommunikationssystem.

Thermisches Rauschen kommt in jedem Leiter vor und wird durch die ungeordnete Wärmebewegung der Ladungsträger hervorgerufen (Brown'sche Bewegung). In einem ohmschen Widerstand, wie er in Abbildung 1 gezeigt wird, tritt an den Anschlüssen durch eine zufällige Ansammlung von Elektronen sporadisch eine Rauschspannung auf, selbst wenn kein Strom durch den Leiter fliesst.

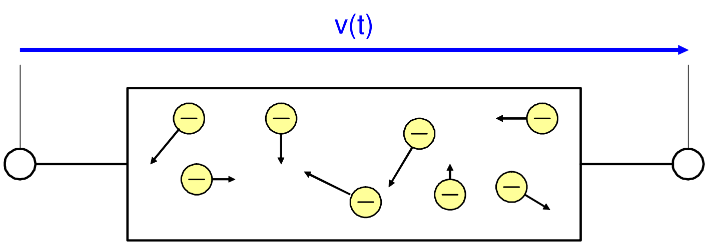


Abbildung 1: Die thermische Bewegung der Elektronen in einem Widerstand erzeugt eine zufällige Rauschspannung an den Klemmen.

Ein typischer Verlauf einer Rauschspannung $v(t)$ ist in Abbildung 2 aufgetragen. Die auftretenden Spannungen liegen unter üblichen Bedingungen in der Grössenordnung von Mikrovolts.

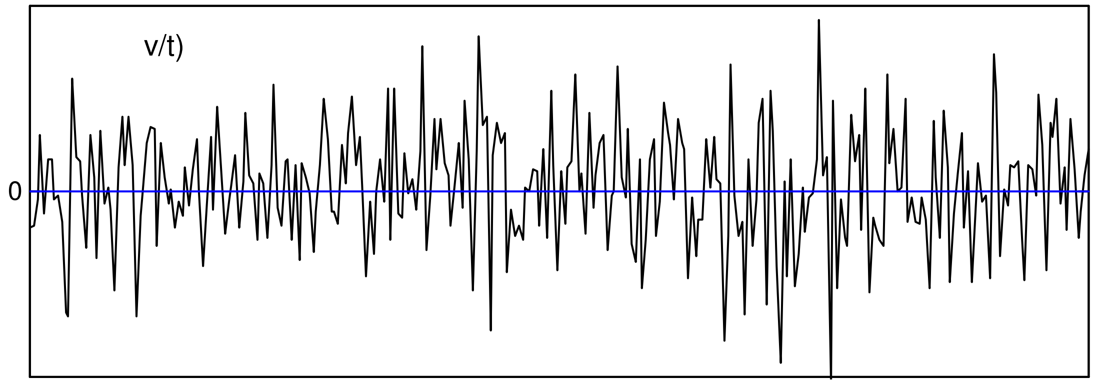


Abbildung 2: Zufälliger oder „stochastischer“ Verlauf einer Rauschspannung über die Zeit.

Wir haben es mit einen *Zufallssignal* (engl. *random signal*) oder einem „*stochastischen* Signal zu tun, da wir aus der Vergangenheit des Signals den zukünftigen Verlauf nicht vorhersagen können und sich ein einmal aufgetretener Signalverlauf in einem wiederholten Experiment nicht wiederholen lässt.

Stochastische Signale können nur mit statistischen Grössen oder Mittelwerten beschrieben werden. Bei einem thermischen Rauschsignal ist der lineare Mittelwert der Spannung Null, da ja im Mittel kein Strom fliessen kann. Schauen wir uns den Verlauf der momentanen Rauschleistung

$$p(t) = \frac{v^2(t)}{R} \tag{1}$$

an, die durch das Quadrat $v^2(t)$ der Rauschspannung in Abbildung 3 bestimmt ist, sehen wir, dass sich ein quadratischer Mittelwert v^2_{eff} der Spannung über die Zeit bestimmen lässt, der für die mittlere Leistung des Rauschsignals charakteristisch ist (blaue Linie).

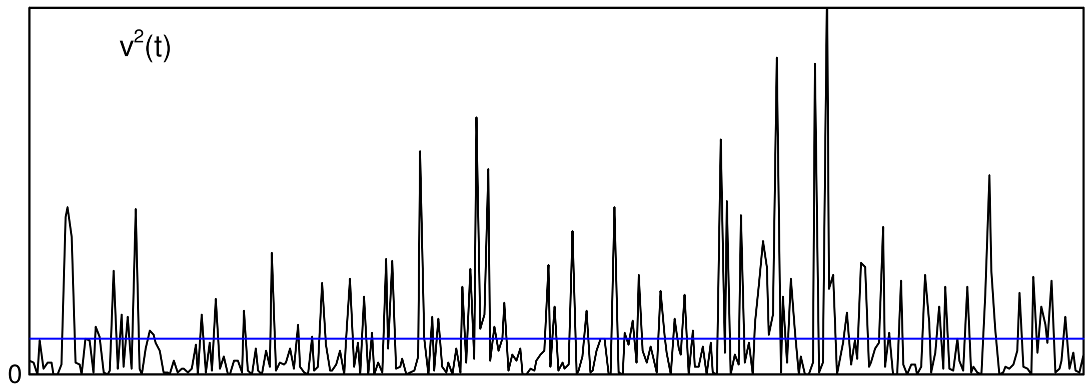


Abbildung 3: Verlauf der momentanen Rauschleistung $p(t) = v^2(t)/R$ über die Zeit.

4.3. Weisses Rauschen

Im Jahre 1928 hat J. Johnson experimentell herausgefunden, dass die mittlere Rauschleistung in einem Leiter mit Widerstand R:

1. proportional zur absoluten Temperatur T in Kelvin ist, da die Temperatur ein Mass für die thermische Bewegung der Ladungsträger ist.
2. proportional zur Bandbreite Δf ist, über die ein Rauschsignal gemessen wird.

Diese Eigenschaften wurden im gleichen Jahr durch H. Nyquist theoretisch untermauert und als „Johnson-Nyquist“ Beziehung formuliert:

$$\boxed{\Delta N = 4\,k\,T\,\Delta f}$$ für die mittlere Rauschleistung oder mit (1) (2)

$$v_{eff}^2 = 4\ k\ T\,R\ \Delta f$$ für die mittlere quadrierte Rauschspannung (3)

mit den Grössen

ΔN = Rauschleistung [W] im Frequenzintervall Δf

k = $1.38\ 10^{-23}$ [Ws/K] Boltzmann-Konstante

T = absolute Temperatur [K]

R = Leiterwiderstand [Ω]

Δf = Frequenzintervall [Hz]

Abbildung 4 zeigt das dazugehörige einseitige Rauschleistungsdichtespektrum $L_e(f)$ eines Leiters. Erstaunlicherweise ist die Rauschleistungsdichte in jedem Frequenzintervall gleich gross und dies bis zu Frequenzen von ca. 10^{15} Hz. Bei noch höheren Frequenzen machen sich dann Quanteneffekte bemerkbar, die dafür sorgen, dass die Leistungsdichte abnimmt.

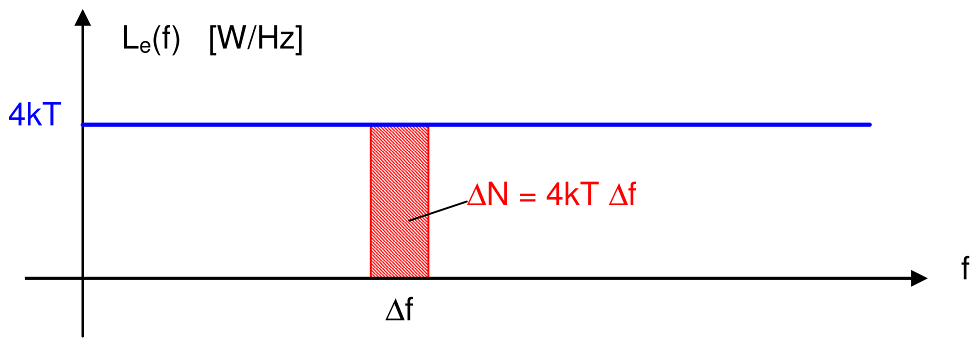


Abbildung 4: Einseitiges Leistungsdichtespektrum $L_e(f)$ von weissem Rauschen.

Definition: Weisses Rauschen

Weisses Rauschen ist ein stochastisches Signal, das über den gesamten Frequenzbereich eine *konstante Leistungsdichte* besitzt. Mit einer quasi unbeschränkten Bandbreite, kann sich ein weisses Rauschsignal beliebig schnell ändern, so dass eine Spannung $v(t_1)$, die zu einer Zeit t_1 auftritt, völlig unabhängig von den Spannungen $v(t)$ ist, die zu früheren oder späteren Zeitpunkten $t \neq t_1$ auftreten.

Bei thermischem Rauschen beträgt die Rauschleistungsdichte

$$L_e(f) = 4\,kT = \text{const. [W/Hz]} \tag{4}$$

Die mittlere Rauschleistung in einem Frequenzband Δf beträgt also mit (2) $\Delta N = L_e(f)\cdot\Delta f$ und die effektive Rauschspannung damit

$$v_{eff} = \sqrt{\Delta N \cdot R} = \sqrt{L_e(f)\cdot \Delta f \cdot R} = \sqrt{4kT \cdot R \cdot \Delta f} \tag{5}$$

Der absolute Temperaturnullpunkt befindet sich bei -273 °C. Damit lassen sich Temperaturen zwischen °Celsius und Kelvin umrechnen. Bei einer Temperatur von T = 290 K, d.h. bei ca. 17 °C nimmt die Rauschleistungsdichte mit (4) den runden Wert

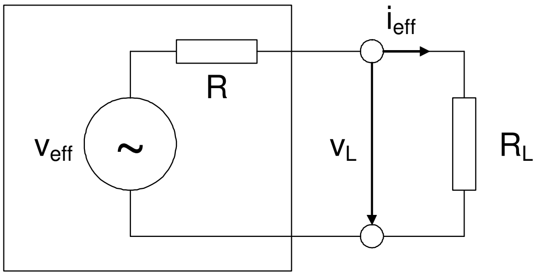
$$L_e(f)_{\,290\,K} = 16\cdot 10^{-21}\ \text{W/Hz}$$

an. Messen wir als Beispiel bei dieser Temperatur die effektive Rauschspannung eines Widerstands *R* von 50 Ω über eine Systembandbreite Δ*f* von 0...20 MHz, so erhalten wir mit (5) den Wert

$$\left. v_{eff} \right|_{T=290K,\Delta f=20MHz} = \sqrt{L_e(f)\cdot \Delta f \cdot R} = \sqrt{16\cdot 10^{-21}\cdot 20\cdot 10^{6}\cdot 50} = 4\ \mu V$$

Zu jeder Rauschspannung muss also die Temperatur und die Bandbreite angegeben werden, bei der sie gemessen wurde.

Als nächstes wollen wir die maximale Rauschleistung bestimmen, die ein rauschender Widerstand *R* an eine Last R_L abgeben kann. Mit der in Abbildung 5 gezeigten *Ersatzschaltung* stellen wir einen rauschenden Leiter als *Serieschaltung* einer *Rauschspannungsquelle* mit Effektivwert v_{eff} und einem *nichtrauschenden Widerstand R* dar. Der Lastwiderstand R_L wird in dieser Betrachtung als ideal angenommen.



Rauschender Widerstand R

Abbildung 5: Ersatzschaltbild eines rauschenden Widerstands R.

Die an R_L abgegebene Rauschleistung beträgt

$$N_L = R_L i_{eff}^2 = \frac{R_L}{(R+R_L)^2} v_{eff}^2 = \frac{R_L R}{(R+R_L)^2} 4kT\Delta f$$

und nimmt für $R_L = R$ ein Maximum

$$N_{max} = \frac{R^2}{(R+R)^2} 4kT\Delta f = kT\Delta f \qquad (6)$$

an. Die *maximal verfügbare Rauschleistung* bei Leistungsanpassung ist also *unabhängig* von der Grösse des rauschenden Widerstands.

Weil bei schnellen analogen Signalübertragungen und in Kommunikationssystemen meistens mit Leistungsanpassung gearbeitet wird, merken wir uns die Formel (6). Mit logarithmischen Pegeln in [dBm] ergibt sich mit T = 290 K die Faustformel

$$N\,[\text{dBm}] \approx -174\ \text{dBm} + 10\cdot \log_{10}(\Delta f) \qquad (7)$$

die mit einer Genauigkeit von ±0.5 dB im Temperaturbereich von -45 °C ... +90 °C gilt. In Tabelle 1 ist die thermische Rauschleistung in Abhängigkeit der Rauschbandbreite aufgelistet.

Rauschbandbreite Δf	Rauschleistungspegel N [dBm]
1 Hz	-174 dBm
1 kHz	-144 dBm
1 MHz	-114 dBm
1 GHz	-84 dBm

Tabelle 1: Thermischer Rauschleistungspegel als Funktion der Rauschbandbreite.

4.4. Gauss'sches oder normalverteiltes Rauschen

Bisher haben wir nur die spektralen Eigenschaften des thermischen Rauschens untersucht. Im Frequenzbereich haben wir eine konstante Rauschleistungsdichte festgestellt und diese Eigenschaft weisses Rauschen genannt. Über das Verhalten des thermischen Rauschens im Zeitbereich haben wir erst ausgesagt, das der Verlauf stochastisch ist und sich das Signal auf Grund der unbeschränkten Bandbreite beliebig schnell ändern kann.

Analysiert man wie in Abbildung 6 die Statistik der auftretenden zeitlichen Werte einer Rauschspannung, stellt man fest, dass die Amplituden v(t) der Häufigkeitsverteilung

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad \text{mit} \quad x = \frac{v}{v_{eff}} \tag{8}$$

gehorchen. Die obenstehende Funktion nennt man *Gauss'sche Verteilung* oder *Normalverteilung*. Sie besitzt eine *Standardabweichung*, die mit dem Effektivwert v_{eff} der Rauschspannung *v(t)* übereinstimmt. Das Quadrat der Standardabweichung, also in unserer Anwendung gerade die mittlere Signalleistung v^2_{eff} , heisst *Varianz*.

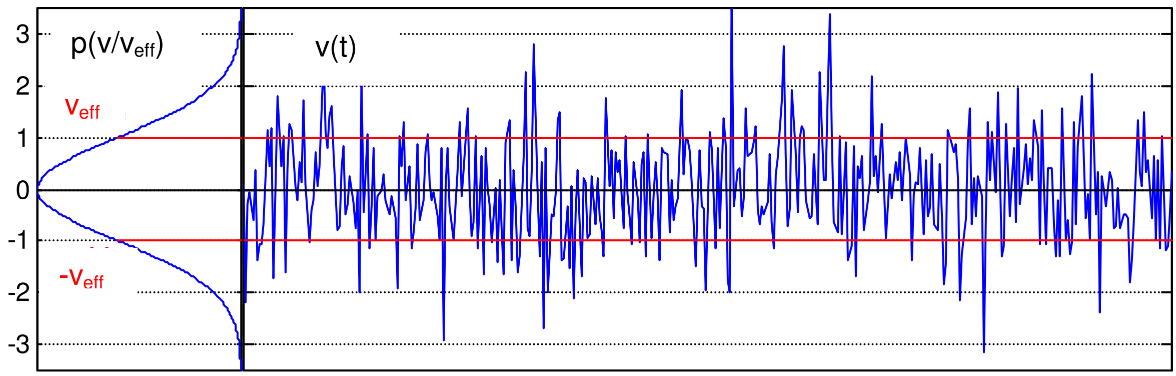


Abbildung 6: Die Amplituden einer thermischen Rauschspannung sind normalverteilt.

4.5. Signal- zu Rauschverhältnis

In einem praktischen Übertragungssystem ist dem Nutzsignal s(t) immer auch ein Rauschsignal n(t) überlagert (vorher mit v(t) bezeichnet), so dass üblicherweise für ein empfangenes Signal gilt

$$v(t) = s(t) + n(t)$$

Dies gilt für analoge Signale genauso wie für digitale Signale. Abbildung 7 zeigt ein praktisches Beispiel eines Datensignals $s(t)$ mit der Bitfolge '1 1 0 1 0 0 1', das mit weissem Rauschen $n(t)$ überlagert ist.

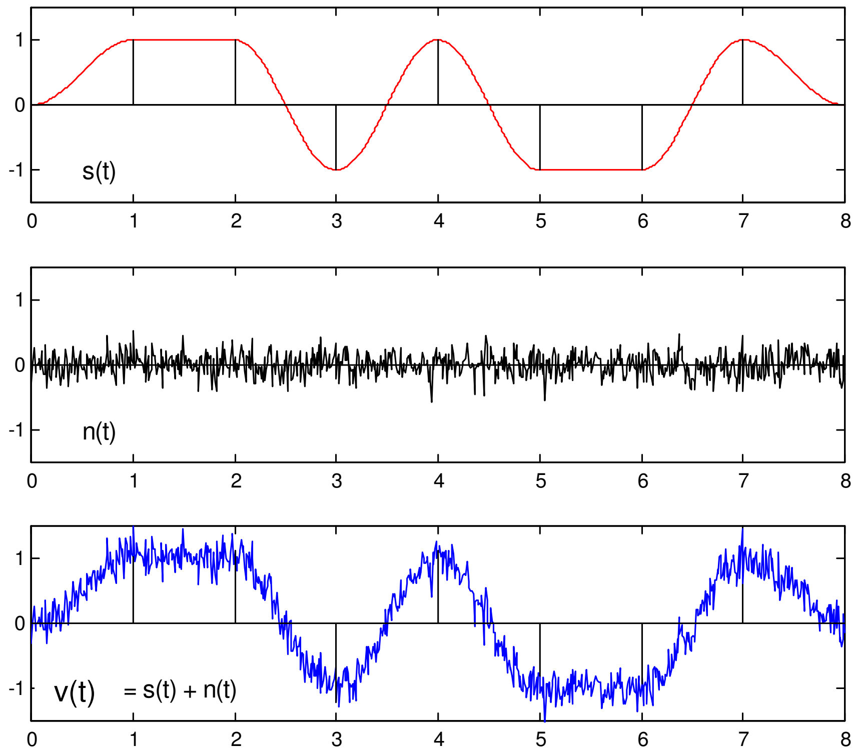


Abbildung 7: Datensignal s(t) mit überlagertem weissen Rauschen n(t). Das Signal zu Rauschverhältnis SNR beträgt +15 dB.

Im Beispiel von Abbildung 7 beträgt die Signalamplitude ±1 V. Der Effektivwert der Rauschspannung $n(t)$ ist N_{eff} = 0.178 V. Das Signal zu Rauschverhältnis errechnet sich zu

$$S/N = \frac{(1\,\mathrm{V})^2}{(0.178\,\mathrm{V})^2} = 31.62 \ .$$

Meist wird das S/N in Dezibel angegeben und oft zur Unterscheidung SNR (signal-to-noise ratio) genannt:

$$\mathrm{SNR} = 10 \cdot \log_{10}(S/N) = 10 \cdot \log_{10}(S) - 10 \cdot \log_{10}(N) \qquad (9)$$

In unserem Beispiel beträgt das SNR = $10 \cdot \log_{10}(31.62)$ = +15 dB, was in Abbildung 7 rein optisch beurteilt genügt, um das verrauschte Datensignal zuverlässig zu dekodieren.

4.6. Rauschbandbreite eines Zweitors

Weisses Rauschen besitzt ein unbeschränktes Spektrum mit konstanter Leistungsdichte. Um die Rauschleistung in einem Übertragungssystem möglichst tief zu halten, muss die Rauschbandbreite so klein wie möglich gewählt werden. Dazu werden Zweitore mit Tiefpass- oder Bandpasscharakter verwendet, die das Spektrum soweit einschränken, dass der Grossteil der spektralen Nutzsignalleistung noch mit akzeptabler Dämpfung und Verzerrung durchgelassen wird, aber gleichzeitig die gesamte Rauschleistung ausserhalb dieses Nutzbandes unterdrückt wird.

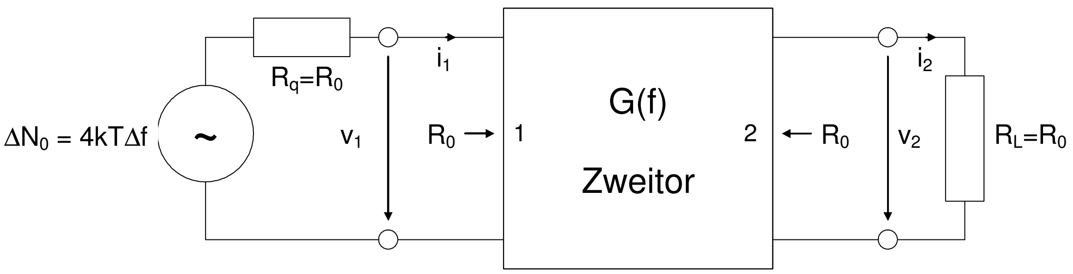


Abbildung 8: Mit Rauschquelle beschaltetes Zweitor.

Das Zweitor in Abbildung 8 besitzt eine frequenzabhängige Leistungsübertragungsfunktion

$$G(f) = \frac{P_2(f)}{P_1(f)} = \frac{v_2(f)^2}{v_1(f)^2}$$

und ist am Eingang mit einer thermischen Rauschquelle der konstanten Rauschleistung $\Delta N_0 = 4kT\,\Delta f$ beschaltet. Mit $R_q = R_L = R_0$ herrscht an beiden Toren Leistungsanpassung, so dass gemäss (6) das Zweitor am Eingang eine Rauschleistung von $\Delta N_1 = kT\,\Delta f$ aufnimmt. Die Rauschleistungsdichte am Ausgang ist frequenzabhängig und hat den Wert

$$\Delta N_2 = G(f)\Delta N_1 = G(f)kT\Delta f\ .$$

Dabei haben wir ein eventuelles Eigenrauschen des Zweitors nicht berücksichtigt. Die gesamte Rauschleistung N_2 am Ausgang berechnet sich durch Integration der einseitigen Rauschleistungsdichte über die positive Frequenzachse

$$N_2 = \int_0^\infty G(f)\cdot kT\cdot df = kT\cdot G(f_0)\,\frac{\int_0^\infty G(f)\cdot df}{G(f_0)} \tag{10}$$

Die Grösse $$B_N = \frac{\int_0^\infty G(f)\cdot df}{G(f_0)} \tag{11}$$

wird als *Rauschbandbreite* des Zweitors bezeichnet, f_0 ist die Mittenfrequenz. Ihre Bedeutungen gehen aus Abbildung 9 hervor. Die rechteckförmige Ersatz-Übertragungsfunktion mit Bandbreite B_N bei f_0 und konstanter Leistungsverstärkung $G(f_0)$ lässt gleichviel Rauschleistung durch, wie das ursprüngliche $G(f)$.

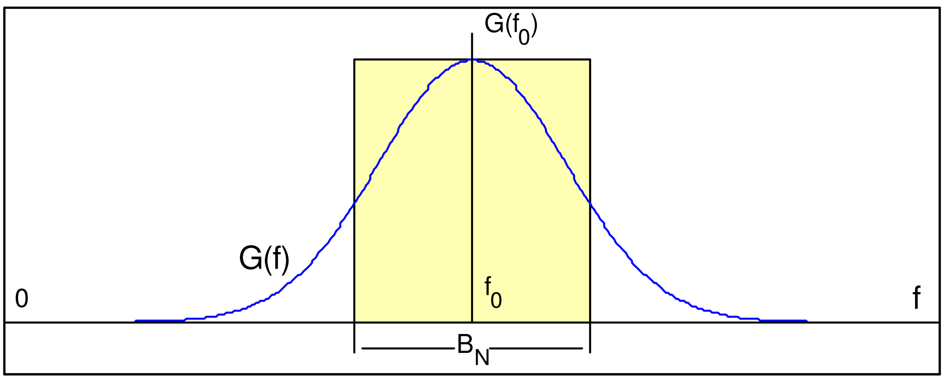


Abbildung 9: Rauschbandbreite B_N eines Zweitors mit Leistungsübertragungsfunktion G(f).

Kennt man die Rauschbandbreite B_N und die Verstärkung $G = G(f_0)$ bei der Mittenfrequenz f_0 eines Zweitors, so muss man den genauen Verlauf von $G(f)$ nicht mehr wissen. Für die Ausgangsrauschleistung folgt somit

$$N_2 = G \cdot kT \cdot B_N = G \cdot N_1 \tag{12}$$

Wir haben also die Eingangsrauschleistung $N_1 = kT\,B_N$ auf die Rauschbandbreite B_N beschränkt. Dies macht Sinn, weil das Rauschspektrum ausserhalb der Rauschbandbreite sowieso durch das Zweitor herausgefiltert wird.

4.7. Rauschzahl eines Zweitors

Bei der vorangegangenen Berechnung der Ausgangsrauschleistung eines Zweitors haben wir das Eigenrauschen des Zweitors noch nicht berücksichtigt. Die Beziehung (12) muss ergänzt werden zu

$$N_2 = G\,N_1 + N_Z\,, \tag{13}$$

wobei N_Z den Rauschleistungsbeitrag des Zweitors darstellt. Der Quotient

$$F = \frac{N_2}{GN_1} = 1 + \frac{N_Z}{GN_1} \tag{14}$$

wird als *Rauschzahl* oder *Rauschfaktor* (engl. *noise figure NF*) bezeichnet. In Datenblättern wird die Rauschzahl häufig mit

$$NF = 10 \cdot \log_{10}(F)$$

in Dezibel angegeben. Gute „low-noise“ Vorverstärker haben eine Rauschzahl von 2-3 dB. Es gilt stets die Ungleichung

$$F \geq 1 \quad . \tag{15}$$

Bei bekannter Rauschzahl F und Leistungsverstärkung G eines Zweitors lässt sich sowohl die Ausgangsrauschleistung N_2, als auch die Eigenrauschleistung N_Z aus der thermischen Eingangsrauschleistung $N_1 = kT\,B_N$ bestimmen:

$$\boxed{\begin{aligned} N_2 &= F\,G\,N_1 \\ N_Z &= (F-1)\,G\,N_1 \end{aligned}} \tag{16}$$

In Abbildung 8 legen wir nun anstatt einer Rauschquelle ein Nutzsignal mit der Signalleistung S_1 an. Unter der Annahme, das $G(f)$ eine annähernd rechteckige Übertragungsfunktion mit konstanter Leistungsverstärkung G über das Nutzband des Signals sei, beträgt die Signalleistung S_2 am Ausgang des Zweitors

$$S_2 = G\,S_1 \tag{17}$$

Bilden wir unter Verwendung von (16) das Signal-zu-Rauschverhältnis S_2/N_2 am Ausgang des Zweitors, so erhalten wir die Beziehung

$$\boxed{F = \frac{S_1 / N_1}{S_2 / N_2}} \tag{18}$$

Die Rauschzahl F steht also auch für die Verschlechterung des Störabstands, verursacht durch das Eigenrauschen des Zweitors.

4.8. Kaskadierung von Zweitoren

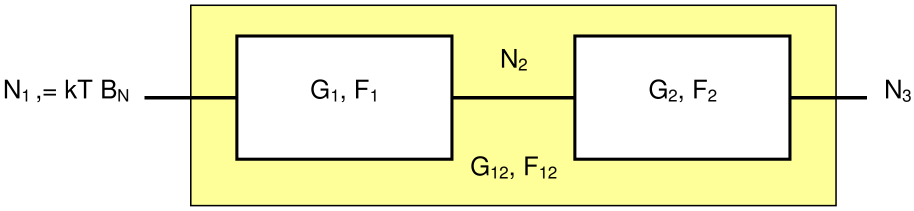


Abbildung 10: Kaskadierung von zwei Zweitoren

Uns interessiert die Rauschzahl F_{12} der Kaskadenschaltung in Abbildung 10:

$N_1 = kT \cdot B_N$

$N_2 = G_1 \cdot N_1 + (F_1 - 1) \cdot G_1 \cdot kTB_N$

$N_3 = G_2 \cdot N_2 + (F_2 - 1) \cdot G_2 \cdot kTB_N$

=> $N_3 = G_1 \cdot G_2 \cdot N_1 + G_1 \cdot G_2 \cdot (F_1 - 1) \cdot N_1 + G_2 \cdot (F_2 - 1) \cdot N_1$

Die Definition (14) liefert das Resultat

$$\boxed{F_{12} = \frac{N_3}{G_1 G_2 N_1} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1}} \qquad (19)$$

Die Rauschzahl des ersten Zweitors in einer Kette wirkt sich für $G_1 >> 1$ weitaus am stärksten aus. Deshalb werden in Schaltungen mit hoher Empfindlichkeit (z.B. Funkempfänger) direkt am Eingang rauscharme Vorverstärker mit hoher Verstärkung eingesetzt.

Die in der Praxis oft verwendete Formel (7) für die Rauschleistung kann jetzt mit der Rauschzahl F des Zweitores erweitert werden:

$$N\,[\text{dBm}] \approx -174\ \text{dBm} + 10 \cdot \log_{10}(\Delta f) + NF\,[\text{dB}] \qquad (20)$$

4.9. Schrotrauschen

Neben dem thermischen Rauschen ist das Schrotrauschen (engl. Shot Noise) die wichtigste Rauschursache. Das Schrotrauschen entsteht, da bei einem makroskopisch fließenden Strom die einzelnen Stromimpulse der Elektronen nicht unbedingt gleichmäßig, sondern zu voneinander unabhängigen Zeiten auftreten. Eine solche statistische Schwankung der Zahl der Ladungsträger tritt im pn-Übergang einer Diode, bzw. eines Transistors auf (Abb. 11). Dieses Rauschen ist bei den aktiven Zweitoren meistens mitverantwortlich für die Rauschzahl.

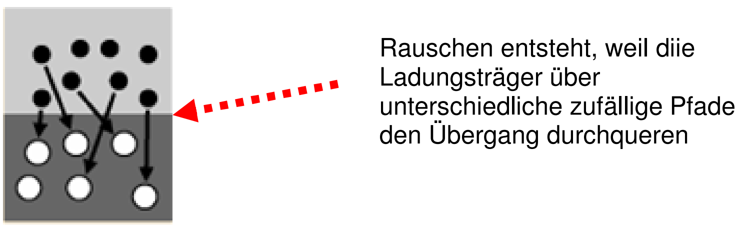


Abbildung 11: Schrotrauschen bei Halbleitern

Da es sich beim Schrotrauschen auch um ein weißes Rauschen handelt, lässt sich der Schrotrauschstrom in der Messbandbreite Δf leicht angeben:

$$i_{eff} = \sqrt{2 \cdot I \cdot e \cdot \Delta f} \qquad [A/Hz^{1/2}] \qquad [21]$$

Die Grösse I entspricht dem Gleichstrom der durch das Bauelement fliesst (Arbeitspunkt) und e die Ladung eines Elektrons in Coulomb ($e = 1.6\ 10^{-19}$ C).

Die Rauschleistung verursacht durch den Halbleiter an einer Last R_L in Serie zur Diode, welche vom Gleichstrom I durchflossen ist, ergibt sich für der Bandbreite Δf zu:

$$N_L = R_L i_{eff}^2 = 2\ I\ e\ \Delta f\ R_L \qquad [22]$$

Dazu kommt natürlich noch das Widerstandsrauschen des internen Widerstandes im Arbeitspunkt. Um das gesamte Rauschen zu berechnen wird der Überlagerungssatz für die verschiedenen Quellen angewendet und der Effektivwert aller Beiträge ermittelt (siehe ASV Kap. 5)
Ein nahezu ideales Schrotrauschen zeigt eine Hochvakuumdiode in Sättigung (alle von der Kathode emittierten Elektronen werden von der Anode abgesaugt), weshalb sie auch als Rauschnormal eingesetzt wird. Metallische Leiter hingegen zeigen kein Schrotrauschen.

Ein Schrotrauschen wird insbesondere in pn-Halbleiter-Dioden (einschließlich Photodioden), Schottky-Dioden etc. beobachtet. Dabei spielt es keine Rolle ob ein Durchlass- oder Sperrstrom fliesst Da Transistoren zusammengesetzt sind aus Halbleitern mit Diodenübergängen zeigen wiederum alle Transistor und FET basierten aktiven Schaltungen wie Op-Amp, Komparator ebenfalls ein Schrotrauschen.

Für weitere Rauscharten, wie zum Beispiel das niederfrequente Funkelrauschen (engl. Flicker Noise oder 1/f Noise) wird auf die Literatur verwiesen.

4.10. Literaturverzeichnis

Dieses Kapitel ist aus der Vorlesung SU von Prof. Dr. A. Steffen adaptiert worden.

[1] Noise Reduction Techniques in Electronic Systems, Henry W. Ott, ISBN-10: 0471850683, 1988, Wiley Verlag

[2] Rauschen (Halbleiter-Elektronik) (Taschenbuch), Rudolf Müller, ISBN-10: 3540511458, Springer Verlag 1989

[3] siehe auch Kap. 5 ASV Skript

Anhang A:

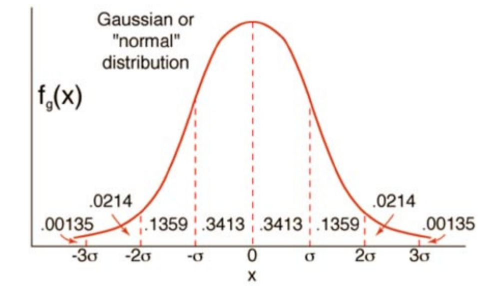
Gaussian Distribution Function

Distribution	Functional Form	Mean	Standard Deviation
Gaussian	$f_g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	a	σ

If the number of events is very large, then the Gaussian distribution function may be used to describe physical events. The Gaussian distribution is a continuous function which approximates the exact binomial distribution of events.

The Gaussian distribution shown is normalized so that the sum over all values of x gives a probability of 1. The nature of the gaussian gives a probability of 0.683 of being within one standard deviation of the mean. The mean value is a=np where n is the number of events and p the probability of any integer value of x (this expression carries over from the binomial distribution). The standard deviation expression used is also that of the binomial distribution.

The Gaussian distribution is also commonly called the "normal distribution" and is often described as a "bell-shaped curve".



The full width of the gaussian curve at half the maximum is

$$\Gamma = 2\sqrt{2\ln 2}\sigma \quad = 2.355\sigma$$